Soluzione ASB 07/02/11

Per la soluzione delle domande in grigio chiaro si rimanda al libro di testo e al materiale didattico. Per chiarimenti si prega di contattare il docente.

Esercizio 1. Illustrare lo schema generale di un'apparecchiatura per l'acquisizione di segnali spontanei, descrivendo brevemente i diversi componenti. Fornire un esempio di segnale biomedico spontaneo, indicando valori tipici e sottolineandone l'interesse in ambito clinico.

Esercizio 2. Dare la definizione di processo stocastico e discuterne le proprietà nel caso esso sia stazionario. Discutere alcuni andamenti tipici della funzione di autocorrelazione nel caso di processo stazionario in senso lato, indicando nei vari casi andamenti tipici delle funzioni campione.

Esercizio 3. Si consideri il modello di regressione lineare che lega una variabile dipendente y ad una indipendente x.

I. Il modello di regressione assume che la retta di regressione in ogni punto sia pari a

A. ☑ $E(y \mid x)$ B. ☐ $E(y)$ C. ☐ $E(x \mid y)$ D. ☐ $E\left(\frac{y}{x}\right)$

II. Considerando e_i l'errore delle misura i-esima rispetto al modello, i parametri della regressione sono tali da minimizzare

A. ☐ $\sum_i e_i$ B. ☑ $\sum_i e_i^2$ C. ☐ $\left(\sum_i e_i\right)^2$ D. ☐ $\left(\sum_i |e_i|\right)^2$

III. Si dica quali tra le seguenti espressioni descrive correttamente il legame tra il coefficiente angolare della retta, b, e il coefficiente di correlazione ρ tra la variabile dipendente e quella indipendente. Con σ_x e σ_y si indicano le deviazioni standard delle variabili indipendente e dipendente rispettivamente.

A. ☐ $b = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ B. ☐ $b = \frac{\rho}{\sigma_x^2}$ C. ☐ $b = \rho$ D. ☑ $b = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ E. ☐ $b = \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

IV. Supposte verificate le ipotesi per la validità del modello di regressione, e detta $\sigma = 1$ la deviazione standard dell'errore, dire per quali di questi intervalli la probabilità che l'errore sia in essi contenuto è pari a 0.5

A. ☑ $(-\infty, 0)$ B. ☐ $\left(-\frac{\sigma}{2}, +\frac{\sigma}{2}\right)$ C. ☐ $(0, 0.5)$ D. ☐ $(0, +2\sigma)$

Esercizio 3.

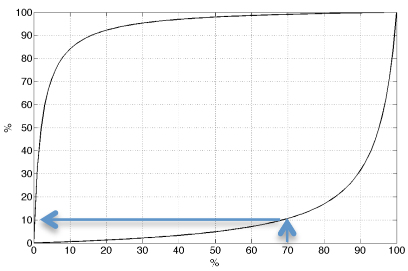
Sia dato un test diagnostico tale che il numero di falsi positivi, quando applicato ad una popolazione di 1500 soggetti dei quali 750 malati, sia pari a 13 mentre il numero di falsi negativi è pari a 5.
Si indichi la specificità del test (risultati approssimati alla 4^a cifra decimale)

Spec=VN/(VN+FP)=VN/sani=(sani – FP)/sani=(750-13)/750=0.9827

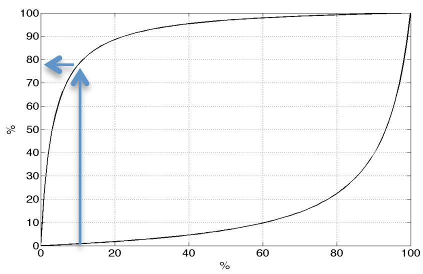
Dato un test con specificità pari a 0.97 e sensibilità pari a 0.98, dire quale è la probabilità che il test fornisca un risultato positivo se applicato ad un soggetto estratto casualmente da una popolazione caratterizzata dalla probabilità di malattia pari al 20%.

$p_{tp} = p_{tp|m}\, p_m + p_{tp|s}\, p_s = p_{tp|m}\, p_m + (1-p_{tn|s})\,(1-p_m) = 0.98*0.2+(1-0.97)*0.8=0.22$

Nelle figure seguenti sono rappresentate le curve che legano la probabilità di malattia stimata, dopo aver eseguito un test diagnostico, in funzione della probabilità a priori di malattia e dell'esito del test stesso, relative a due test, rispettivamente test 1 e 2. Un soggetto esegue i due test in cascata. In origine si pensa che sia malato con una probabilità pari a 0.7. Si indichi la probabilità di malattia del soggetto se al primo test risulta negativo e al secondo positivo. Indicare graficamente il processo per la stima di tale probabilità.



1)



2)

probabilità di malattia dopo i due test 80%

Esercizio 5 Si disegnino il modulo e la fase della Trasformata Continua di Fourier del seguente segnale

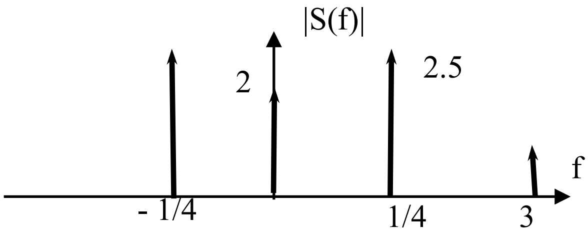
$$s_1(t) = -2 + 5\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) + e^{j6\pi t}$$

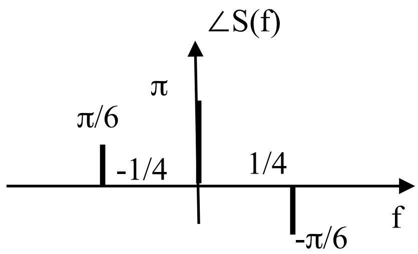
Discutere le differenze di tale rappresentazione con quella relativa allo Sviluppo in Serie di Fourier del medesimo segnale.

Si rappresenti il seguente spettro in modulo e fase $S_2(f) = c\delta(f + f_A)$ con $c = e^{j\frac{\pi}{2}}$ e $f_A = 4$. Si determini l'espressione dell'antitrasformata di $S_2(f)$.

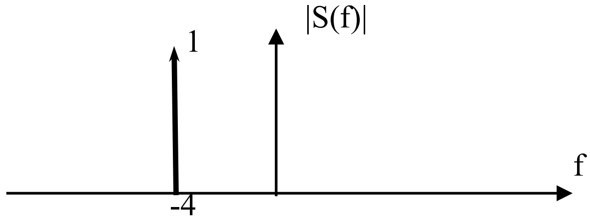
$$S_1(f) = -2\delta(f) + \frac{2.5}{j}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f - \frac{1}{4}\right) - \frac{2.5}{j}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f + \frac{1}{4}\right) + \delta(f-3) =$$

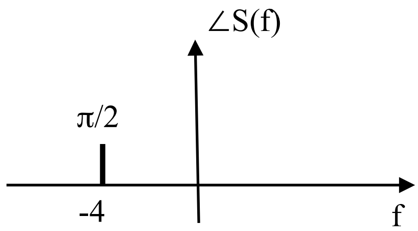
$$= 2e^{j\pi} + 2.5e^{-j\frac{\pi}{6}}\delta\left(f - \frac{1}{4}\right) + 2.5e^{j\frac{\pi}{6}}\delta\left(f + \frac{1}{4}\right) + \delta(f-3)$$





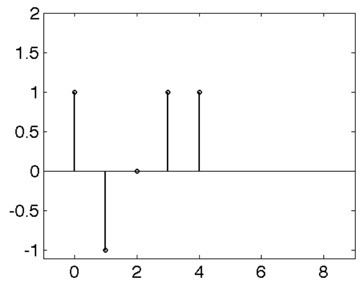
$S_2(f) = c\delta(f + f_A)$ con $c = e^{j\frac{\pi}{2}}$ e $f_A = 4$



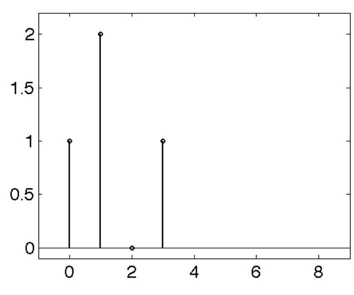


$s_2(t) = je^{-j4\pi t}$

Esercizio 6 Si considerino le sequenze nelle seguenti figure



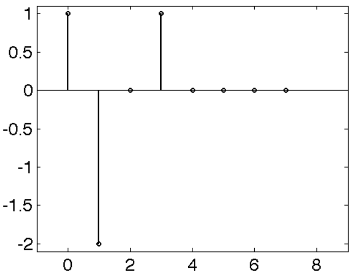
x[n]



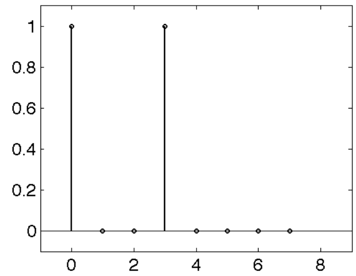
y[n]

I. Dire quale tra le seguenti è la convoluzione tra x[n] e y[n]

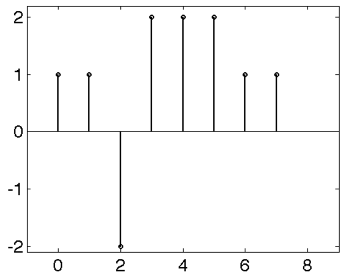
A. ☐



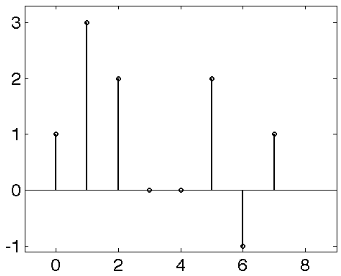
B. ☐



C. ☑



D. ☐



Date due sequenze x e y lunghe rispettivamente 9 e 12 campioni, si vuole calcolare la convoluzione lineare tramite la convoluzione circolare. Dire qual è il periodo della sequenza ottenuta dalla convoluzione circolare.

A. ☐ 12 campioni B. ☑ 20 campioni C. ☐ 21 campioni D. ☐ 22 campioni

Dato un sistema lineare e tempo invariante al cui ingresso è presente il segnale $s(t) = 2\cos(\pi t)$ indicare quale tra i seguenti segnali non può essere un'uscita di tale sistema

A. ☑ $s(t) = 2\cos(2\pi t)$ B. ☐ $s(t) = 2e^{-j(\pi t)}$ C. ☐ $s(t) = 8\cos(\pi t)$

Essedo il sistema LTI le autofunzioni sono del tipo $e^{j2\pi ft}$. *Non è possibile che in uscita siano presenti componenti frequenziali che non sono presenti in ingresso. Da qui la soluzione indicata*

Si considerino il sistema caratterizzato dalla seguente trasformazione ingresso uscita, applicata al segnale di ingresso x(t): $y(t) = \sqrt{t_0}\,x\left(t + t_0^2\right) + \sin(t)$ con t_0 costante. Si dica se tale sistema è:

A. ☐ lineare e tempo variante B. ☐ lineare e tempo invariante

C. ☐ non lineare e tempo invariante D. ☑ non lineare e tempo variante

Esercizio 7. Sia dato un segnale con banda compresa tra 50 e 39 MHz. Si indichi la minima frequenza di campionamento utilizzabile

La banda del segnale è B=11 MHz. La grandezza Fmax/B=4.5455 comporta m=4 da cui Fc=2Fmax/m=25 Hz

Dato un segnale reale s(t) di tipo passa basso con frequenza massima pari a 2 MHz, si consideri il segnale $s_1(t)=\cos(2\pi f_1 t)+5s(t)\sin(2\pi f_0 t)$ con f_0=8MHz e con f_1=7 MHz. Qual è la banda occupata dal segnale $s_1(t)$ (si indichi solo la banda per frequenze positive)?

Il segnale reale passa basso occupa le frequenze tra -2 e 2 MHz. Per il teorema della modulazione il segnale $s(t)\sin(2\pi f_0 t)$ occupa le frequenze tra -10 e -6 e quelle tra 6 e 10. Il segnale $\cos(2\pi f_1 t)$ possiede due componenti a -7 e 7 MHz. Quindi la somma dei due segnali occupa la banda tra 6 e 10 (e tra -10 e -6).

Si ipotizzi di avere una sequenza x[n] con 22 campioni e dt=0.2. Si scriva il valore della frequenza massima visualizzabile dall'analisi con TDF della suddetta sequenza (si consideri l'intervallo di frequenze centrato nell'origine)

Le frequenze ottenibili sono $f=\frac{1}{Ndt}\left[-\frac{N}{2}:\frac{N}{2}-1\right]$ *e la frequenza massima è quindi*

$$f=\frac{1}{Ndt}\left(\frac{N}{2}-1\right)=\frac{10}{22*0.2}=2.2727$$

Si indichi quale è la risoluzione in frequenza ottenibile dalla TDF della sequenza y[n] ottenuta in uscita ad un sistema al cui ingresso viene posto la sequenza x[n] del punto precedente. Il sistema in oggetto possiede una risposta impulsiva finita, lunga 15 punti, ed ha una caratteristica di tipo passa basso con frequenza di taglio 1Hz.

N_{in}=22

N_{out}=22+15-1=36

*da cui si ricava df_{out}=1/(N_{out}*dt) =1/(36*0.2)=0.1389 Hz*

Le caratteristiche passa basso del sistema non incidono sulla taratura dell'asse frequenziale in uscita.

Esercizio 8 Discutere la distribuzione statistica della media campionaria nei casi di varianza nota e incognita. Spiegare in cosa consiste l'intervallo di confidenza e le operazioni necessarie per la sua stima nei due casi.