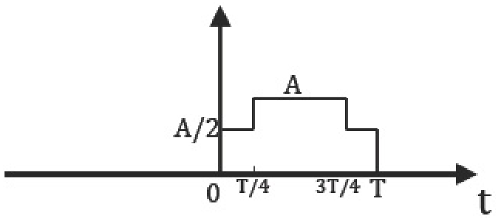
Si consideri il segnale s(t) in figura e se ne calcoli la Trasformata Continua di Fourier. A vale 2 V e T è paria a 1 s.



una soluzione possibile è la seguente

$$s(t) = \frac{A}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) + \frac{A}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right)$$

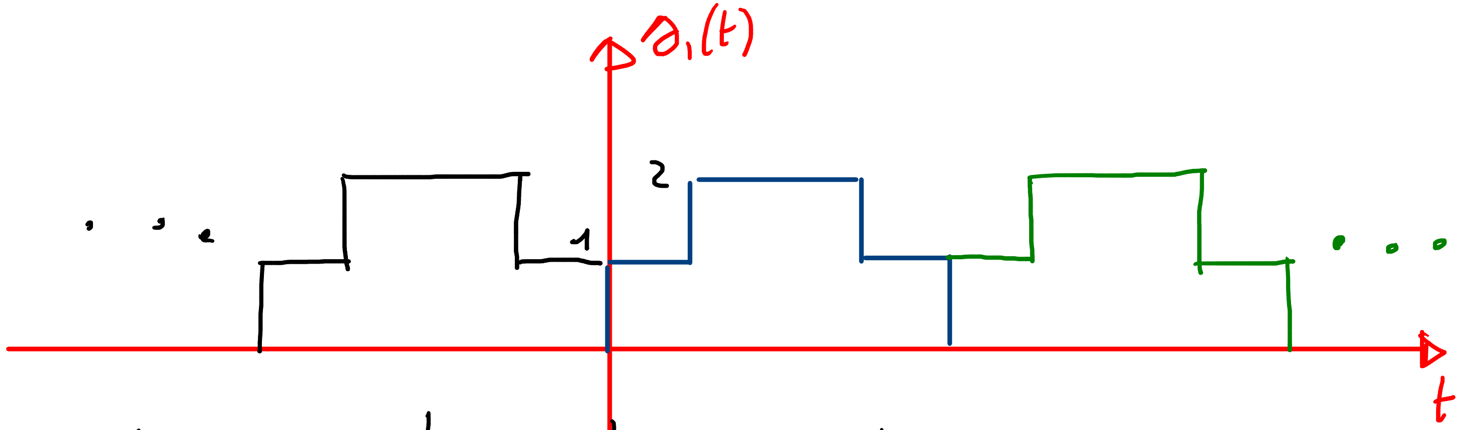
$$S(f) = \frac{A}{2}T\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} + \frac{A}{2}\frac{T}{2}\,\mathrm{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)e^{-j2\pi f T/2} =$$

$$= e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}\,\frac{A}{2}T\left(\mathrm{sinc}(fT) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)\right) = e^{-j\pi f}\left(\mathrm{sinc}(f) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(f/2)\right)$$

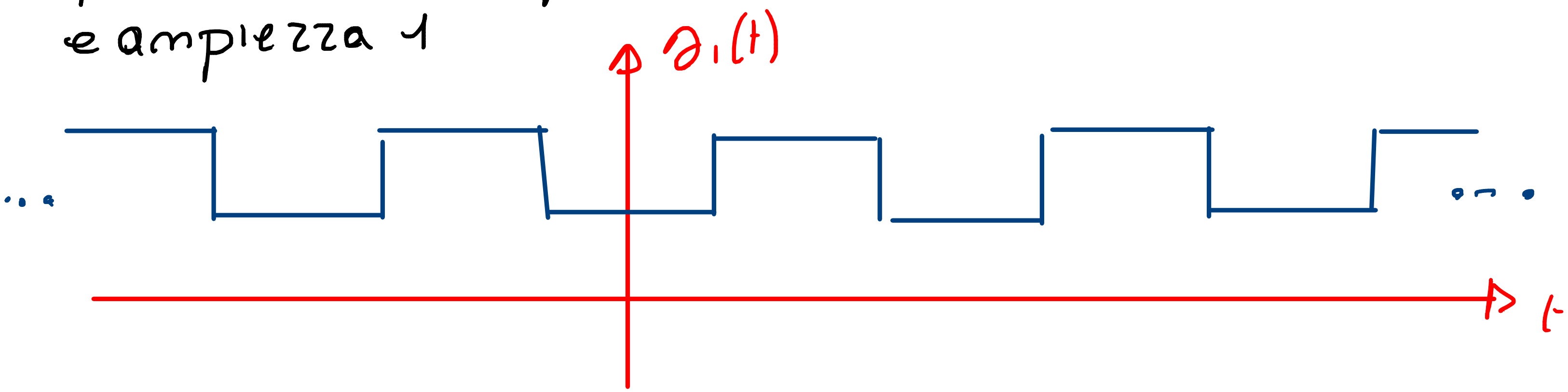
Si consideri il segnale periodico ottenuto in questo modo

$$s1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kT)$$

Farne il grafico e discutere in quali modi ne possa essere fatta l'analisi in frequenza e qual è il risultato atteso. In questo caso si chiede di discutere qualitativamente l'andamento atteso in frequenza.



quindi è un'onda quadra con valore medio pari a 1,5 e ampiezza 1



può essere analizzata tramite
Sviluppo in Serie di Fourier

in questo caso avremmo un coeff $S_0 = 1{,}5$

la frequenza fondamentale è pari ad $1\ Hz$

i coeff. S_1 e S_{-1} sono i coeff. che moltiplicano i fasori a questa frequenza (positiva e negativa)

nello spettro sono presenti infinite armoniche con coeff. S_n alle frequenze $\frac{n}{T_0}$ Hz dove $T_0 = 1s$

il modulo dei coeff. $\to 0$ per $n \to \infty$ come $1/n$

È possibile utilizzare anche la Trasf. Continua di F.

In questo caso dovremmo utilizzare la $\delta(f)$ per rappresentare le componenti spettrali alle diverse frequenze.

Inoltre si chiede di stimarlo quantitativamente sia sfruttando il legame tra le trasformate applicabili nei due casi sia utilizzando le operazioni per studiare in frequenza un segnale tempo continuo periodica.

Possiamo sfruttare la relazione tra TCF del segnale aperiodico ($s(t)$) e Sviluppo in Serie del segnale periodicizzato

$$S_n = \frac{1}{T_0} S\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

$$S_n = e^{-j\pi n}\left(\operatorname{sinc}(n) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\right) = \left(\operatorname{sinc}(n) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\right)e^{-j\pi n}$$

altro modo

$$S_n = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} s_1(t)\, e^{-j2\pi n\frac{t}{T_0}}\,dt =$$ scelgo il periodo $-\frac{T}{4}, \frac{3}{4}T$

$$S_n = \frac{1}{1}\int_{-\frac{1}{4}T}^{\frac{3}{4}T} x_1(t)\, e^{-j2\pi n\frac{t}{1}}\,dt = \int_{-\frac{1}{4}}^{1/4} \frac{A}{2} e^{-j2\pi n t}\,dt + \int_{1/4}^{3/4} A e^{-j2\pi n t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{(-j2\pi n)}\left(e^{-j\frac{\pi n}{2}} - e^{j\frac{\pi n}{2}}\right) + \frac{2}{(-j2\pi n)}\left(e^{-j\frac{\pi 3n}{2}} - e^{-j\frac{\pi n}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(-2j)\sin\frac{\pi n}{2}}{(-2j)\left(\frac{\pi n}{2}\right)} + \frac{2}{(-2j)(\pi n)} e^{-j\pi n}\left(e^{-j\frac{\pi n}{2}} - e^{j\frac{\pi n}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{e^{-j\pi n}}{\frac{\pi n}{2}}\,\frac{1}{(-2j)}(-2j)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) + e^{-j\pi n}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) =$$

$$= \mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + e^{-j\pi n}\right)$$

Si consideri l'operatore convoluzione lineare indicato con il simbolo $\otimes$, dire quale tra le seguenti affermazioni è vera

A. ☐ $x[n] - x[n-1] = \left[1 - u[n-1]\right] \otimes x[n]$

B. ☐ $x[n] - x[n-1] = \left[1 - \delta[n-1]\right] \otimes x[n]$

C. ☐ $x[n] - x[n-1] = \left[u[n] - u[n-1]\right] \otimes x[n]$

D. ☐ $x[n] - x[n-1] = \left[\delta[n] - \delta[n-1]\right] \otimes x[n]$

se ricordiamo che $x[n] \otimes \delta[n] = x[n]$ e

$x[n] \otimes \delta[n-1] = x[n-1]$

troviamo la soluzione

Si consideri il seguente segnale periodico $s(t) = 1 + sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + sin\left(\frac{\pi}{9}t\right)$, se volessimo campionare correttamente il segnale quale sarebbe il massimo passo di campionamento utilizzabile?

A. ☐ 18 s B. ☐ 6 s C. ☐ 9 s D. ☐ 12 s

s(t) è formato da 3 componenti a frequenza

$f_1 = 0$

$f_2 = \frac{1}{12}$

$f_3 = \frac{1}{18}$

se ricordiamo che $f_c \geq 2f_{max} \Rightarrow \frac{1}{dt} \geq 2\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

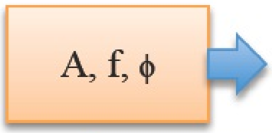
$\Downarrow$

$dt \leq 6$

Esercizio 4 Si consideri il sistema lineare e tempo invariante in figura 1, del quale non si conosce la risposta in frequenza. Dopo aver fornito una definizione di risposta in frequenza, si indichi come sia possibile stimarla avendo a disposizione il generatore di forme d'onda in A) in grado di generare onde sinusoidali a frequenza, ampiezza e fase variabili, e l'oscilloscopio B) in grado di misurare il segnale in uscita permettendo di stimarne ampiezza, frequenza e ritardo rispetto all'ingresso.

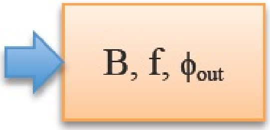
Fig.1.

A)



genera segnali del tipo $x = A\sin(2\pi f\, t + \phi)$

B)



Si richiede di definire la risp. in frequenza. Questo viene lasciato allo studente.

Una di queste definizioni di $H(f)$ aiuta a determinare il corretto utilizzo dei sistemi per la stima di $H(f)$

In particolare

$$H(f) = \frac{y(t)}{x(t)}\Big|_{x(t) = e^{j2\pi f t}}$$

ovvero il rapporto tra uscita ed ingresso quando questo è un'autofunzione del tipo exp complesso ci permette di determinare $H(f)$ alla frequenza f
In generale $H(f)$ è una costante complessa $\forall f$.

Avendo a disposizione il sistema A che genera segnali $A \sin(2\pi f t + \phi)$ avremo

$$x(t) = \frac{A}{2j} e^{j\phi} e^{j(2\pi f t)} - \frac{A}{2j} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f t}$$

in uscita quindi avremo

$$y(t) = H(+f)\frac{A e^{j\phi}}{2j} e^{j2\pi f t} + H(-f)\left(-\frac{A}{2j} e^{-j\phi}\right) e^{-j2\pi f t}$$

visto che H è un sist. reale si ha $H(f) = H(-f)^*$

quindi $|H(f)| = |H(-f)|$ $\quad \angle H(f) = \angle H(-f)$

da cui $y(t) = |H(f)|\, e^{+j\angle H(f)} \frac{A}{2j} e^{j\phi} e^{j2\pi f t} +$

$$+ |H(f)|\, e^{-j\angle H(f)} \left(-\frac{A}{2j}\right) e^{-j\phi} e^{-j2\pi f t} = |H(f)| A \sin(2\pi f t + \phi + \angle H(f))$$

Quindi dando in ingresso al sistema H una sinusoide ad una frequenza nota, possiamo ricavare il modulo della

risposta in frequenza, in corrispondenza della frequenza in ingresso, come rapporto tra l'ampiezza della sinusoide in uscita e quella in ingresso.
La fase della risposta in frequenza si ottiene come differenza tra la fase della oscillazione in uscita e quella in ingresso

Al variare di f in ingresso è possibile ricavare $H(f)$ per tutte le frequenze di interesse