Trasformata discreta di Fourier di una sequenza periodica

Consideriamo una sequenza infinita e periodica di periodo N x[nT] tale per cui x[nT+NT]=x[nT].
Per rappresentare tale sequenza si possono utilizzare N funzioni complesse del tipo

$$e_k[n] = e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Queste sono funzioni oscillanti, periodiche di periodo N/k, infatti

$$e_k[n+N/k] = e^{\frac{j2\pi k(n+N/k)}{N}} = e^{\frac{j2\pi kn}{N}} e^{\frac{j2\pi kN}{Nk}} = e^{\frac{j2\pi kn}{N}} e^{j2\pi} = e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Cerchiamo di precisare il significato fisico delle oscillazioni.
Se la sequenza deriva da un campionamento di un segnale tempo continuo x(t)

$$e_k[n] = e^{\frac{j2\pi knT}{NT}}$$

Scrivendo in questo modo la funzione oscillante, si individua la frequenza di oscillazione

$$f_k = \frac{k}{NT}$$

Le frequenze sono multiple della frequenza fondamentale 1/NT. Tali frequenze vengono dette “armoniche”
È possibile fare riferimento alla frequenza normalizzata rispetto al tempo di campionamento

$$f = \frac{k}{N}$$

o alla pulsazione normalizzata

$$\omega = \frac{2\pi k}{N}$$

La trasformata discreta di Fourier (TDF) di una sequenza periodica, anche detta Serie Discreta di Fourier (SDF), si esprime con la seguente sommatoria

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Il fatto di avere un numero finito di funzioni deriva dal fatto che:
- In ogni periodo della sequenza è presente un numero finito di campioni
- Le funzioni sono periodiche

I coefficienti della TDF della sequenza periodica sono dati da

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

Questi coefficienti sono periodici di periodo N infatti

$$\tilde{X}(k+N) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{\frac{-j2\pi(k+N)n}{N}} =$$

$$= \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}\right) e^{-j2\pi n} = \tilde{X}(k)$$

La periodicità dei coefficienti della SDF implica che sono sufficienti N campioni di X[k] per avere tutte le informazioni sul contenuto frequenziale della sequenza: in particolare è possibile scegliere l'intervallo [0,1,…,N-1] oppure un intervallo centrato attorno allo zero.

Esempio.

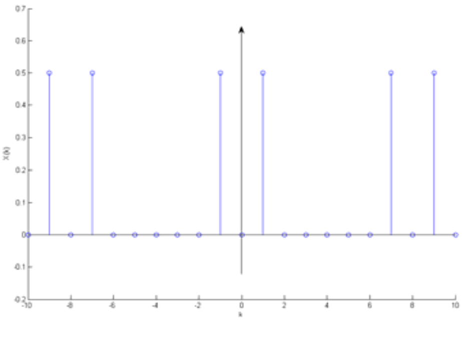
$$\tilde{x}[n] = \cos\left(\frac{2\pi nT}{NT}\right)$$

Dalle formule di Eulero si ricava

$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi n}{N}} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}}\right)$ dal confronto con $\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$ si vede che $\tilde{X}(1) = 1/2$ e $\tilde{X}(-1) = 1/2$

Si deve notare che per la periodicità degli $\tilde{X}(k)$ si ottiene $\tilde{X}(1+hN) = 1/2$ e $\tilde{X}(-1+hN) = 1/2$ con *h* intero.

Se scegliamo *N*=8



Trasformata discreta di Fourier di una sequenza finita

Il caso della TDF di una sequenza finita viene ricavato a partire dalla TDF della sequenza periodica ottenuta periodicizzando la sequenza finita stessa.

Detta x[n] la sequenza finita di lunghezza N, consideriamo la sequenza ottenuta dalla sua periodicizzazione, con periodo N:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

Per cui vale la seguente relazione:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Dall'ultima relazione si vede che è possibile ricavare la sequenza finita da quella periodica: ne consegue che, a partire dai coefficienti della TDF della sequenza periodica, è possibile ricavare i valori della sequenza finita.
Per analogia al legame esistente nel dominio temporale tra le due sequenze, si definisce il legame tra i coefficienti delle due trasformate: abbiamo visto che i coefficienti dello trasformata discreta di Fourier di una sequenza periodica, formano a loro volta una sequenza periodica in k. I coefficienti della TDF della sequenza finita si ottengono da questi ultimi secondo la seguente relazione

$$X(k) = \begin{cases} \tilde{X}(k) & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(k - nN)$$

La TDF di una sequenza finita si ottiene quindi come

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} \qquad 0 \le k \le N-1$$

L'operazione inversa si esprime come

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \qquad 0 \le n \le N-1$$

Trasformata discreta di Fourier di una sequenza finita : algoritmi FFT

La TDF di una sequenza finita può essere calcolata utilizzando algoritmi, computazionalmente efficienti, quali gli algoritmi Fast Fourier Transform (FFT).
L'efficienza degli algoritmi FFT consiste nel numero di operazioni necessarie per calcolare la TDF di una sequenza finita di N campioni:

-il calcolo della TDF, a partire dalla definizione, implica l'utilizzo di $8N^2$-2N operazioni

-tramite algoritmi FFT si arriva a 8log2(N)+6N operazioni

Tale velocità di calcolo giustifica l'utilizzo di algoritmi FFT per il calcolo della convoluzione tra due sequenze.