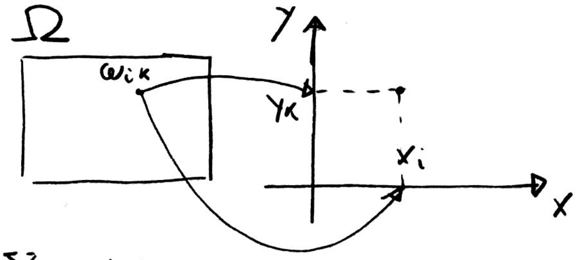
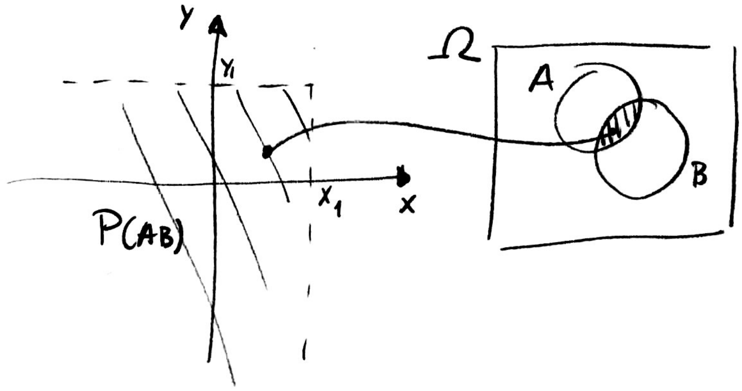


X e Y costituiscono un vettore aleatorio che trasforma gli elementi di Ω in punti del piano x,y

eventi $A = \{\omega : X(\omega) \leq x_1\}$

$B = \{\omega : Y(\omega) \leq y_1\}$

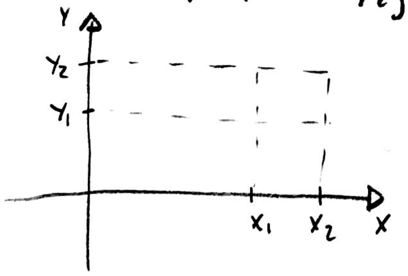


Funzione di distribuzione congiunta

$$F_{XY}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

Proprietà

- $0 \leq F_{XY}(x,y) \leq 1$
- $P\{x_1 < X \leq x_2, Y \leq y\} = F_{XY}(x_2,y) - F_{XY}(x_1,y) \geq 0$
- $P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F_{XY}(x_2,y_2) - F_{XY}(x_1,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1) + F_{XY}(x_1,y_1)$



- $F_{XY}(-\infty,-\infty) = F_{XY}(-\infty,y) = F_{XY}(x,-\infty) = 0$
- $F_{XY}(\infty,\infty) = 1$ $\quad \{X \leq \infty, Y \leq \infty\}$ evento certo

Funzione di distribuzione marginale

$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty)$

$F_Y(y) = F_{XY}(\infty,y)$

visto che

$\{X \leq x, Y \leq \infty\} = \{X \leq x\}$

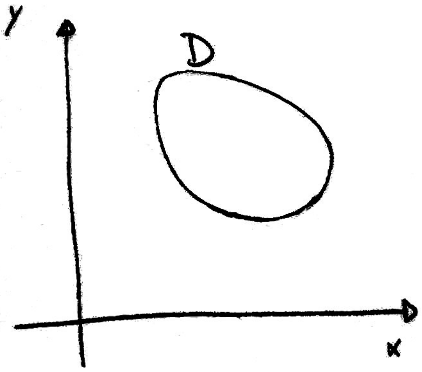
$\{X \leq \infty, Y \leq y\} = \{Y \leq y\}$

Densità di probabilità congiunta (caso continuo) 27/11/07

$$f_{XY}(x,y) \triangleq \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \, \partial y}$$

$$f_{XY}(x,y) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{P\{x < X \leq x+\Delta x,\ y < Y \leq y+\Delta y\}}{\Delta x \, \Delta y}$$

visto che $P\{\cdot\} \geq 0 \Rightarrow f_{XY}(x,y) \geq 0$



$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$P\{X \leq x, Y \leq \infty\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(\xi,y)\,d\xi\,dy = F_X(x)$$

$$P\{X \leq \infty, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,\eta)\,dx\,d\eta = F_Y(y)$$

Densità di probabilità marginale

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(\xi,y)\,d\xi\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

analogamente

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

Densità di prob. condizionata della v.a. X supposto Y=y

$$f_X(x \mid Y=y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

nel caso della v.a. Y supposto X=x

$$f_Y(y \mid X=x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

27/11/07

variabili indipendenti

eventi indipendenti $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

due v.a. si dicono statisticamente indipendenti se gli eventi $\{X \leq x\}$ $\{Y \leq y\}$ sono indipendenti qualunque siano x e y

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\}$$

$$\Downarrow$$

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

v.a. continue
$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = f_X(x) f_Y(y)$$

$$f_X(x|Y=y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

$$f_Y(y|X=x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

v.a discrete

$$P\{X=x_i, Y=y_k\} = P\{X=x_i\} P\{Y=y_k\}$$

$$\Downarrow$$

$$P\{X=x_i \mid Y=y_k\} = P\{X=x_i\}$$

$$P\{Y=y_k \mid X=x_i\} = P\{Y=y_k\}$$

$\boxed{N.B}$ v.a continue

$$E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\, f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = E\{X\} E\{Y\}$$

v.a discrete

$$E\{XY\} = \sum_i \sum_k x_i y_k P\{X=x_i, Y=y_k\} = \sum_i \sum_k x_i y_k P\{X=x_i\} \cdot P\{Y=y_k\} =$$
$$= \sum_i x_i P\{X=x_i\} \cdot \sum_k y_k P\{Y=y_k\} = E\{X\} E\{Y\}$$