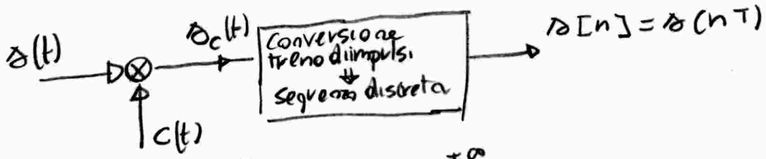
Trasformata di Fourier di una sequenza

Consideriamo la sequenza come ottenuta dal campionamento di un segnale tempo continuo $s(t)$

definiamo un treno di impulsi $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$



$$s_c(t) = s(t) \cdot c(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\, \delta(t-nT)$$

Calcoliamo la TCF di $s_c(t)$

$$\mathcal{F}_c[s_c(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\, e^{-j2\pi nTf}$$

infatti $\delta(t) \Leftrightarrow 1$, e per la TCF vale la proprietà del ritardo

Se consideriamo i valori della sequenza dopo la conversione treno impulsi $\Rightarrow$ seq. discreta si ottiene

$$S_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]\, e^{-j2\pi nTf} \triangleq \overline{S(f)} \qquad (1)$$

che è per definizione <u>la trasformata della sequenza $s[n]$</u>

Trasformata inversa

Dalla relazione (1) si vede che la $s[n]$ è la serie di Fourier di $\overline{S(f)}$

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} s(t)\, e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}}\, dt$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n\, e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}$$

$$s[n] = \frac{1}{f_c} \int_0^{f_c} S_c(f)\, e^{j2\pi n fT}\, df = T \int_0^{1/T} S_c(f)\, e^{j2\pi n fT}\, df$$

dove si è posto $f_c = \frac{1}{T}$

$$s[n] = T \int_0^{1/T} S_c(f)\, e^{j2\pi n fT}\, df$$

<u>Antitrasformata di Fourier della sequenza</u>

N.B.

La Trasformata di Fourier di una sequenza si può trovare indicata come

TDF in alcuni libri di testo (es. Verazzani)

oppure DTFT Discrete Time Fourier Transform

Nel nostro caso la chiameremo Trasformata di Fourier di una sequenza mentre con TDF ci riferiremo alla trasformata di sequenze periodiche (o finite e periodicizzate)

Utilizzo frequenza normalizzata

$$F = f/f_c = fT$$

$$\bar{S}(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\, e^{-j2\pi nF} \qquad s[n] = \int_0^1 \bar{S}(F)\, e^{j2\pi nF}\, dF$$

Utilizzo pulsazione normalizzata

$$\omega = 2\pi F$$

$$\bar{S}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]\, e^{-j\omega n} \qquad s[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{S}(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \bar{S}(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$\boxed{\text{ES}}$

Impulso rettangolare

$$x[n] = u[n] - u[n-N]$$

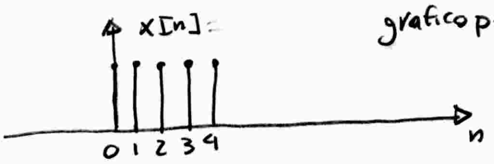


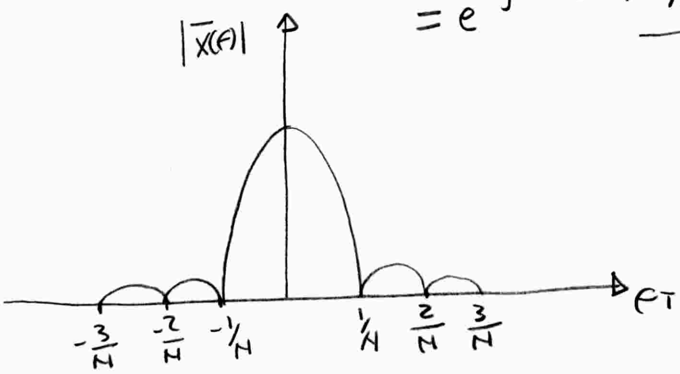
grafico per N=5

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi nfT} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi fT}\right)^n$$

visto che $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$

$$\bar{X}(f) = \frac{1 - e^{-j2\pi fTN}}{1 - e^{-j2\pi fT}} = \frac{e^{-j\pi fTN}}{e^{-j\pi fT}} \cdot \frac{e^{+j\pi fTN} - e^{-j\pi fTN}}{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}} =$$

$$= e^{-j\pi fT(N-1)}\, \frac{\sin(\pi fTN)}{\sin(\pi fT)}$$



Dimostriamo la periodicità di $\bar{S}(f)$

A.A. 2007/2008

$$\bar{S}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\, e^{-j2\pi n f T}$$

$$\bar{S}(f+f_c) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\, e^{-j2\pi n (f+f_c) T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]\, e^{-j2\pi n f T} e^{-j2\pi n f_c T} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]\, e^{-j2\pi n f T}$$

visto che $f_c = \frac{1}{T} \Rightarrow e^{-j2\pi n f_c T} = e^{-j2\pi n} = 1$

Grazie alla periodicità, sarà sufficiente la rappresentazione di $\bar{S}(f)$ in un periodo per avere tutte le informazioni su $\bar{S}(f)$.

Rispetto a f potremmo rappresentare $\bar{S}(f)$, ad esempio, tra 0 e $\frac{1}{T}$ o in $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$

Rispetto a $F = fT$ $\quad \bar{S}(F)$ potrà essere rappresentata in $[0, 1]$ $\quad [-1/2, 1/2]$

Rispetto a $\omega = 2\pi F$ $\quad \bar{S}(\omega)$ potrà essere rappresentata in $[0, 2\pi]$ $\quad [-\pi, +\pi]$

$\boxed{ES}$

$x[n] = a^n u[n] \quad , |a|<1$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]\, e^{-j2\pi f T n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi f T n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j2\pi f T}\right)^n$$

se $|a e^{-j\omega}|<1$ o $|a|<1$, la serie è assolutamente sommabile

per cui

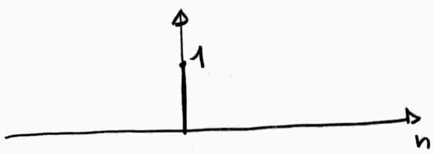
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j2\pi f T}\right)^n = \frac{1}{1-a e^{-j2\pi f T}}$$

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{1-a e^{-j2\pi f T}} = \frac{1}{(1-a\cos 2\pi f T) + j a \sin 2\pi f T}$$

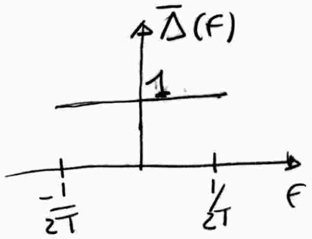
$$|\bar{X}(f)| = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos 2\pi f T)^2 + a^2 \sin^2(2\pi f T)}} \qquad \angle \bar{X}(f) = -\,\mathrm{atg}\,\frac{a \sin 2\pi f T}{1-a\cos 2\pi f T}$$

N.B. $\angle\bar{X}(f) \in$ I, IV quadrante

- $\delta[n]$ impulso discreto $\qquad \delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{per } n=0 \\ 0 & \text{per } n\neq 0 \end{cases}$

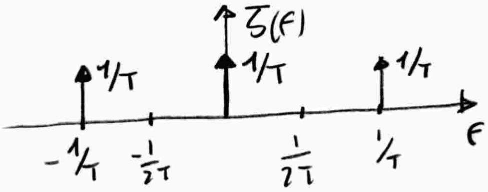


$$\bar{\Delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]\, e^{-j2\pi n f T} = 1/T$$



- $s[n] = 1$

$$\bar{S}(f) = \frac{1}{T}\delta(f), \quad f \in \left[-\tfrac{1}{2T}, \tfrac{1}{2T}\right]$$
(vedi dim. pag. 5)



- $s[n] = e^{j2\pi n f_0 T}$

$$\bar{S}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 T} e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n (f-f_0)T} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - f_0 - \frac{n}{T}\right)$$

vedi dimostrazione pag. 5

- $s[n] = \cos 2\pi n f_0 T$

$$\bar{S}(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\delta\left(f+f_0-\frac{n}{T}\right) + \delta\left(f-f_0-\frac{n}{T}\right)\right]$$

— T.F $\delta[n]=1$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n f T} = ?$$

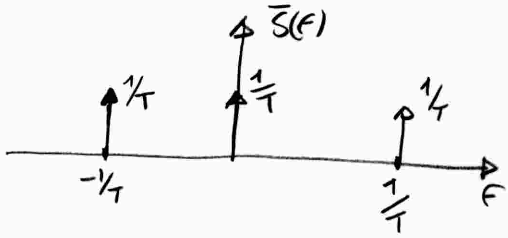
Ricordiamo che lo sviluppo in serie di Fourier del treno d'impulsi di Dirac

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

Facendo la trasformata continua di Fourier di entrambi i termini utilizzando, la proprietà del ritardo temporale nel primo termine e proprietà traslazione in frequenza, nel secondo

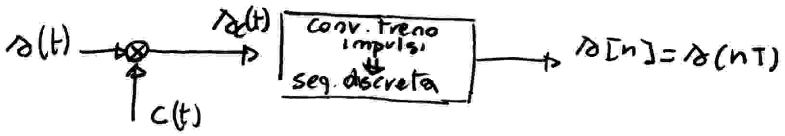
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi n f T} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

per cui $\qquad \bar{S}(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$



N.B.
Questa dimostrazione è utile sia per il calcolo della trasformata dell'esponenziale complesso (pag. 4)

Trasformata di Fourier di una Sequenza



Si cerca la relazione tra $S(f)$ trasformata del segnale continuo e $S_c(f)$ trasformata segnale campionato

$$S_c(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\,e^{-j2\pi nfT}=$$

si esprime $s(nT)$ come $\boxed{\mathcal{F}_c^{-1}[S(f)]_{t=nT}}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\,e^{j2\pi\nu nT}\,d\nu\, e^{-j2\pi nfT}=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(\nu)\,e^{-j2\pi(f-\nu)nT}\,d\nu=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-\nu)nT}\,d\nu=$$

utilizzando la dim. a pg. 5

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-\nu)nT}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\nu-\frac{n}{T}\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\nu-\frac{n}{T}\right)d\nu=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\,\delta\left(f-\nu-\frac{n}{T}\right)d\nu=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

II° modo

$$s_c(t)=s(t)\cdot c(t)\quad\overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow}\quad S_c(f)=S(f)\otimes C(f)$$

$$c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\frac{nt}{T}}\quad\overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow}\quad C(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$S_c(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\nu+\frac{n}{T}\right)d\nu=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\,\delta\left(f+\frac{n}{T}-\nu\right)d\nu=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f+\frac{n}{T}\right)\equiv\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f-\frac{n}{T}\right)$$