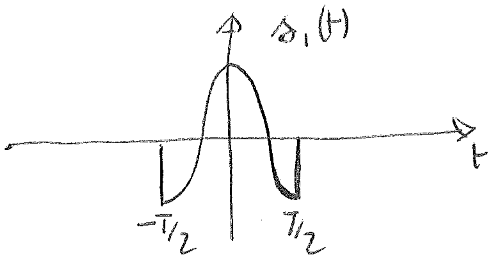
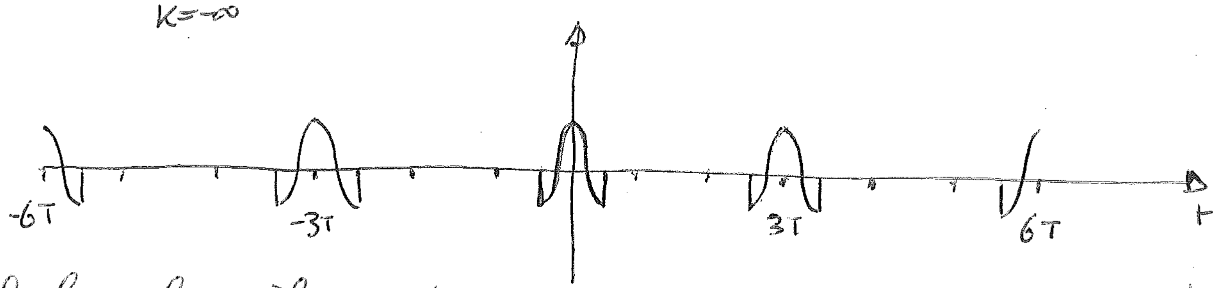
Esercizio 1

$$s_1(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$s(t) = s_1(t) \otimes \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3Tk)$$



Per calcolare lo sviluppo in serie di Fourier è possibile utilizzare il calcolo dei coefficienti a partire dall'equazione di analisi

$$S_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\, e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}}\, dt = \left(\begin{matrix}\text{visto che}\\ T_0 = 3T\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3T}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t)\, e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}}\, dt =$$ l'integrale di $s(t)$ tra $-\frac{T_0}{2}$ e $\frac{T_0}{2}$ diviene,

$$= \frac{1}{3T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos 2\pi \frac{t}{T}\, e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}}\, dt =$$ visto la funzione integranda è $\neq 0$ tra $-T/2$ e $T/2$

$$= \frac{1}{3T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{j2\pi \frac{t}{T}} + e^{-j2\pi \frac{t}{T}}}{2}\, e^{-j2\pi n \frac{t}{3T}}\, dt = \frac{1}{3T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}\left(e^{-j2\pi t\left(\frac{n}{3T}-\frac{1}{T}\right)} + e^{-j2\pi t\left(\frac{n}{3T}+\frac{1}{T}\right)}\right) dt$$

$$= \frac{1}{6T} \left.\frac{e^{-j2\pi t\left(\frac{n}{3T}-\frac{1}{T}\right)}}{-j2\pi\left(\frac{n}{3T}-\frac{1}{T}\right)}\right|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{6T} \left.\frac{e^{-j2\pi t\left(\frac{n}{3T}+\frac{1}{T}\right)}}{-j2\pi\left(\frac{n}{3T}+\frac{1}{T}\right)}\right|_{-T/2}^{T/2}$$

se $n \neq 3$ e $n \neq -3$

$$= \frac{1}{6T} \frac{e^{-j\pi\left(\frac{n}{3}-1\right)} - e^{j\pi\left(\frac{n}{3}-1\right)}}{-j2\pi\left(\frac{n}{3}-1\right)\frac{1}{T}} + \frac{1}{6T} \frac{e^{-j\pi\left(\frac{n}{3}+1\right)} - e^{j\pi\left(\frac{n}{3}+1\right)}}{-j2\pi\left(\frac{n}{3}+1\right)\frac{1}{T}} =$$

$$= \frac{1}{6} \frac{-2j \sin\left(\pi\left(\frac{n}{3}-1\right)\right)}{-j2\pi\left(\frac{n}{3}-1\right)} + \frac{1}{6T} \frac{-2j \sin\left(\pi\left(\frac{n}{3}+1\right)\right)}{-2j\pi\left(\frac{n}{3}+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{6} \mathrm{sinc}\left(\frac{n}{3}-1\right) + \frac{1}{6T} \mathrm{sinc}\left(\frac{n}{3}+1\right)$$ per $n \neq 3$ e $n \neq -3$

se $n=3$

$$S_3 = \frac{1}{3T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}\left(e^{-j2\pi t\left(\frac{3}{3T}-\frac{1}{T}\right)} + e^{-j2\pi t\left(\frac{3}{3T}+\frac{1}{T}\right)}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}\left(1 + e^{-j2\pi t\frac{2}{T}}\right)dt =$$

periodo pari a $T/2$; la funzione esegue due cicli tra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$ → l'integrale è nullo

$$= \frac{1}{3T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}dt = \frac{1}{3T}\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}-\left(-\frac{T}{2}\right)\right) = \frac{1}{6}$$

idem per $n=-3$.
Possiamo però evitare i conti visto che il segnale è reale per cui $S_3 = S_{-3}^*$

N.B.
è anche pari, per cui $S_n = S_{-n}$

altro modo (+ rapido in questo caso)
Si calcola la TCF di $s_1(t)$ e si sfrutta la relazione tra la TCF e i coeff dello sviluppo del segnale ottenuto periodicizzando $s_1(t)$

$$s_1(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \qquad S_1(f) = T\,\text{sinc}(fT) \otimes \left(\frac{\delta(f-\frac{1}{T})+\delta(f+\frac{1}{T})}{2}\right)$$

$$= \frac{T}{2}\,\text{sinc}\left(\left(f-\frac{1}{T}\right)T\right) + \frac{T}{2}\,\text{sinc}\left(\left(f+\frac{1}{T}\right)T\right)$$

$$S_n = \frac{1}{T_0}S_1\left(\frac{n}{T_0}\right) = \frac{1}{3T}S_1\left(\frac{n}{3T}\right) = \frac{1}{3T}\left[\frac{T}{2}\,\text{sinc}\left(\left(\frac{n}{3T}-\frac{1}{T}\right)T\right) + \frac{T}{2}\,\text{sinc}\left(\left(\frac{n}{3T}+\frac{1}{T}\right)T\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\,\text{sinc}\left(\frac{n}{3}-1\right) + \frac{1}{6}\,\text{sinc}\left(\frac{n}{3}+1\right)$$

Ricostruisco il segnale considerando la componente fondamentale

$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{3T}$

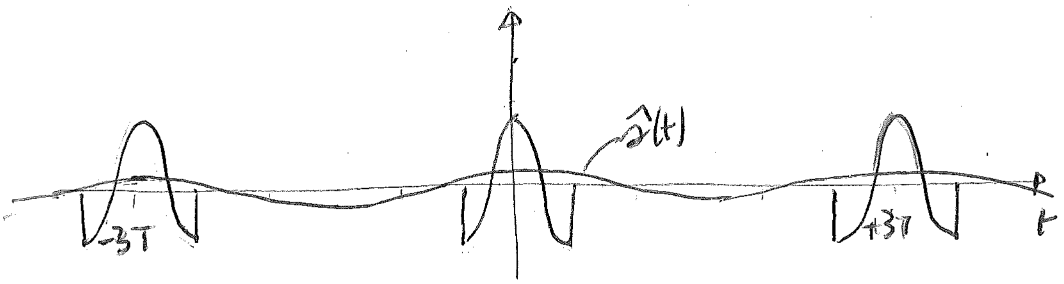
questa è data dai fasori per $n=1$ e $n=-1$

$$\hat{s}(t) = S_1 e^{j\frac{2\pi t}{T_0}} + S_{-1} e^{-j\frac{2\pi t}{T_0}}$$

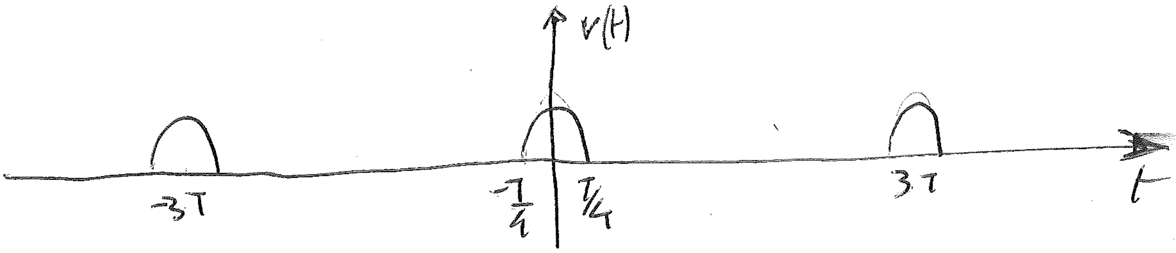
$$S_1 = \frac{1}{6}\,\text{sinc}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{6}\,\text{sinc}\left(\frac{5}{3}\right) \cong 0{,}04$$

$S_{-1} = S_1$

$$\hat{s}(t) = 0{,}04\, e^{j\frac{2\pi t}{3T}} + 0{,}04\, e^{-j\frac{2\pi t}{3T}} = 0{,}08\cos\left(\frac{2\pi t}{3T}\right)$$



$$r(t) = s_2(t) \otimes \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3kT) \qquad s_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\text{rect}\left(\frac{2t}{T}\right)$$



- sia $r(t)$ che $s(t)$ sono formati da frequenze multiple della fondamentale $f_0 = \frac{1}{T_0}$
- entrambi necessitano di infinite componenti
- il valore medio (S_0) di $s(t)$ è nullo, a differenza di quello di $r(t)$
- il segnale $s(t)$ ha bisogno di un contenuto maggiore alle alte frequenze, rispetto a $r(t)$, a causa delle brusche variazioni in esso presenti

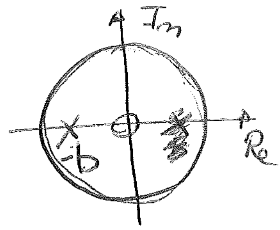
Esercizio 2

$$y[n] = x[n] - b\,y[n-1] \qquad 0<b<1$$

troviamo la funzione di trasferimento

$$Y(z) = X(z) - b\,z^{-1}\,Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+bz^{-1}} = \frac{z}{z+b}$$



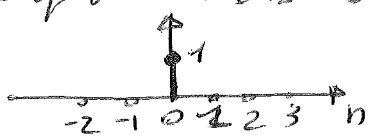
abbiamo un polo in $z=-b$ e uno zero in $z=0$

- Il sistema presenta un polo in modulo minore di 1 quindi è stabile

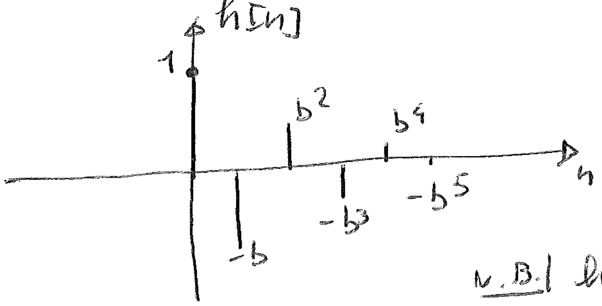
- Vediamo la risposta impulsiva.

Consideriamo le condizioni iniziali nulle ($y[-1]=0$)

L'ingresso, da definizione, è pari a $x[n]=\delta[n]$



n	$y[n]$
0	$\delta[0] - b\,y[-1] = 1$
1	$\delta[1] - b\,y[0] = -b$
2	$\delta[2] - b\,y[1] = b^2$
3	$-b^3$
4	$+b^4$
5	$-b^5$



N.B.| $h[n] = (-b)^n u[n]$

N.B.|
Anche dall'andamento di $h[n]$ si evince che $h[n]$ è assolutamente sommabile e quindi il sistema è stabile

- Vediamo la risposta in frequenza.

È possibile usare diversi approcci.
Si fa notare che non è consigliato in questo caso, calcolarla come TF della $h[n]$ stimata per $n=0,1,..5$ perché tale $h[n]$ è troncata tra 0 e 5 e la $H(f)$ sarebbe approssimata.

Possiamo calcolare la $\bar{H}(f)$ come

- TF della $h[n]$. In questo caso si vede che $h[n] = (-b)^n u[n]$
- come rapporto tra $y[n]$ e $x[n]$ quando $x[n] = e^{j2\pi n f T}$.
  Il rapporto va studiato al variare di f tra $-\frac{1}{2T}$ e $\frac{1}{2T}$
  Questo metodo richiede la soluzione nel tempo dell'equazione alle differenze per il calcolo della soluzione particolare.
- a partire dalla Trasformata Z

$$\bar{H}(f) = H(z)\Big|_{z=e^{j2\pi f T}}$$

- come rapporto tra trasformata dell'uscita e dell'ingresso

Utilizziamo questo ultimo approccio

$$y[n] = x[n] - b\,y[n-1]$$

Trasformiamo membro dx e sx

$$\bar{Y}(f) = \bar{X}(f) - b\,e^{-j2\pi f T}\,\bar{Y}(f)$$

$$\bar{Y}(f)\left(1 + b\,e^{-j2\pi f T}\right) = \bar{X}(f) \rightarrow \frac{\bar{Y}(f)}{\bar{X}(f)} = \frac{1}{1 + b\,e^{-j2\pi f T}}$$

$$\bar{H}(f) = \frac{1}{1 + b\,e^{-j2\pi f T}} = \frac{1}{1 + b\cos 2\pi f T - j b \sin 2\pi f T}$$

$$|\bar{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + b\cos 2\pi f T)^2 + b^2 \sin^2 2\pi f T}} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 + 2b\cos 2\pi f T}}$$

$$\angle \bar{H}(f) = \angle 1 - \angle\left(1 + b\cos 2\pi f T - j b \sin 2\pi f T\right) =$$

$$= 0 - \operatorname{atg}\left(\frac{-b\sin 2\pi f T}{1 + b\cos 2\pi f T}\right) = \operatorname{atg} \frac{b \sin 2\pi f T}{1 + b\cos 2\pi f T}$$

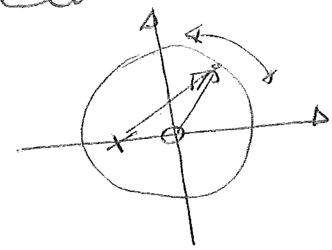
<u>N.B.</u> in questo caso la parte reale del denominatore è sempre ≥ 0

$$|\overline{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}25+\cos 2\pi f T}}$$

$T = 2s \Rightarrow f_c = 0{,}5$

eseguo per punti

dal metodo grafico si evince che tra 0 e π (e tra 0 e $-\pi$) non ci sono minimi o massimi locali

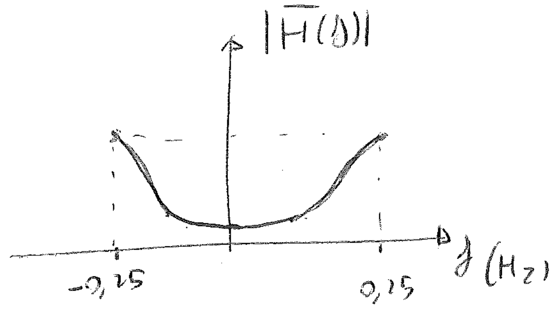


scelgo $f=0$ $f=\frac{1}{4T}$ e $f=\frac{1}{2T}$

$$|\overline{H}(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}25+1}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}25}} \cong 0{,}667$$

$$\left|\overline{H}\left(\tfrac{1}{4T}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}25+0}} \cong 0{,}894$$

$$\left|\overline{H}\left(\tfrac{1}{2T}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1{,}25-1}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}25}} = 2$$



- uscita se in ingresso si ha

$$x[n] = 2+\cos\frac{2\pi n}{10}$$

utilizziamo un approccio in frequenza. Consideriamo le trasformate dell'ingresso e dell'uscita (in un periodo tra $-\frac{1}{2T}$ e $\frac{1}{2T}$

$$\overline{X}(f) = 2\delta(f) + \frac{1}{2}\delta\left(f-\frac{1}{10T}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(f+\frac{1}{10T}\right)$$

$$\overline{H}(f) = \frac{1}{1+b\,e^{-j2\pi f T}}$$

$$\overline{Y}(f) = \overline{H}(f)\overline{X}(f) = \overline{H}(f)\,2\delta(f) + \frac{\overline{H}(f)}{2}\delta\left(f-\frac{1}{10T}\right) + \frac{1}{2}\overline{H}(f)\,\delta\left(f+\frac{1}{10T}\right) =$$

$$= 2\overline{H}(0)\,\delta(f) + \frac{\overline{H}\left(\frac{1}{10T}\right)}{2}\delta\left(f-\frac{1}{10T}\right) + \frac{\overline{H}\left(-\frac{1}{10T}\right)}{2}\delta\left(f+\frac{1}{10T}\right)$$

visto che $\overline{H}\left(\frac{1}{10T}\right) = \overline{H}^{*}\left(-\frac{1}{10T}\right)$

$$y[n] = 2\bar{H}(0) + \bar{H}\left(\frac{1}{10T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n T}{10T} + \angle \bar{H}\left(\frac{1}{10T}\right)\right)$$

$$\bar{H}(0) \cong 0{,}667$$

$$\bar{H}\left(\frac{1}{10T}\right) = \frac{1}{1+0{,}5e^{-j\frac{2\pi}{10}}} = \frac{1}{1+0{,}5e^{-j\frac{\pi}{5}}} = 0{,}6969\, e^{-j0{,}2}$$

$$y[n] = 1{,}3 + 0{,}697\cos\left(\frac{2\pi n}{10} - 0{,}2\right)$$

analogamente possiamo verificare facilmente che, essendo l'ingresso la combinazione lineare di tre esponenziali complessi (dei quali uno a frequenza nulla) che sono autofunzioni del sistema LTI dalla def. di risposta in frequenza.

$$x[n] = 2e^{j2\pi n 0} + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi n}{10}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi n}{10}}$$

$$y[n] = \bar{H}(0)\,2 + \frac{1}{2}\bar{H}\left(\frac{1}{10}\right)e^{j\frac{2\pi n}{10}} + \frac{1}{2}\bar{H}\left(-\frac{1}{10}\right)e^{-j\frac{2\pi n}{10}} =$$

$$= 2\bar{H}(0) + 2\left|\bar{H}\left(\frac{1}{10}\right)\right|\cos\left(\frac{2\pi n}{10} + \angle\bar{H}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$$

Esercizio 3

1) la sinusoide ha frequenza

$$\frac{1}{0{,}05} = 20\,Hz \Rightarrow f_c \geq 2 f_{max} = 40\,Hz$$

2) segnale $s(t) = \sum_{h=-2}^{2} S_h e^{j2\pi \frac{h}{5} t}$

può essere scritto come

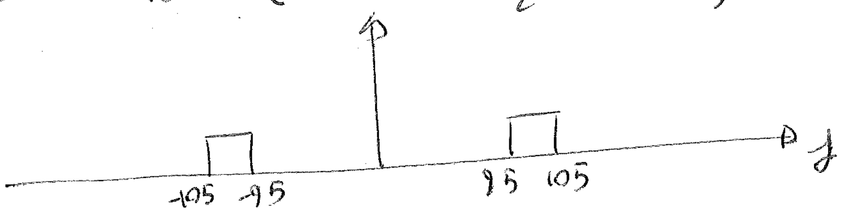
$$s(t) = S_{-2} e^{-j\frac{4\pi t}{5}} + S_{-1} e^{-j\frac{2\pi t}{5}} + S_0 + S_1 e^{j\frac{2\pi t}{5}} + S_2 e^{j\frac{4\pi t}{5}}$$

la frequenza massima vale $\frac{2}{5}$ per cui

$$f_c \geq \frac{4}{5} \Rightarrow T_c \leq \frac{5}{4} = 1{,}25$$

3) $s(t) = \mathrm{sinc}(10t)\cos(200\pi t)$

$$S(f) = \frac{1}{10}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{10}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}\delta(f+100) + \frac{1}{2}\delta(f-100)\right)$$



$f_{max} = 105$ $f_{min} = 95$ $\quad m = \left\lfloor \frac{f_{max}}{B} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{105}{10} \right\rfloor = 10$

$B = 10$

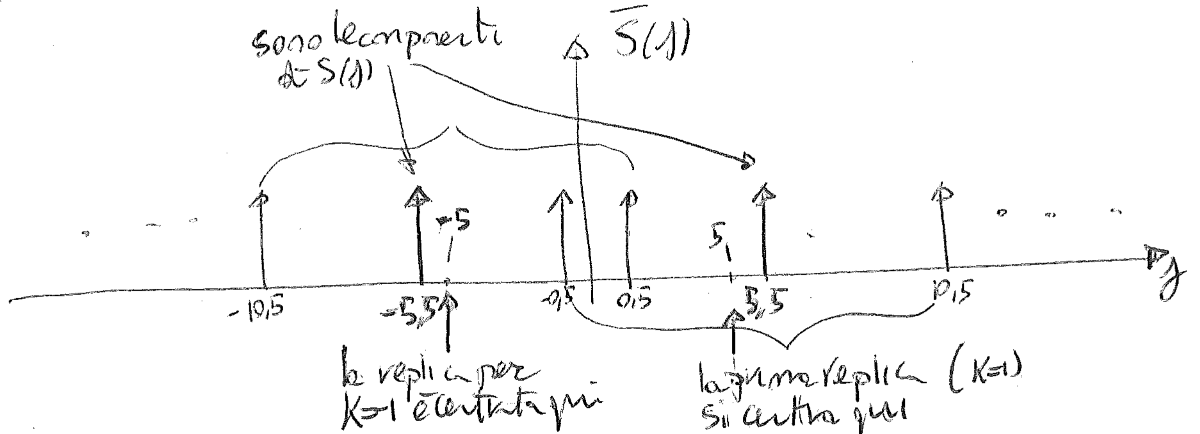
$$F_c = \frac{2 F_{max}}{m} = 21$$

4) $s(t) = \cos(11\pi t) \Rightarrow f_1 = 5{,}5\,Hz$

$$f_c = \frac{1}{0{,}2} = 5\,Hz$$

$$\overline{S}(f) = \frac{1}{T}\sum_{K=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{K}{T}\right)$$

Le repliche vengono centrate



N.B. non si è tenuto conto del fattore di scala $\frac{1}{T}$

Visto che le frequenze di interesse sono comprese tra $-2{,}5\,H$ e $2{,}5\,H$, la sequenza apparirà come un coseno a $0{,}5\,Hz$