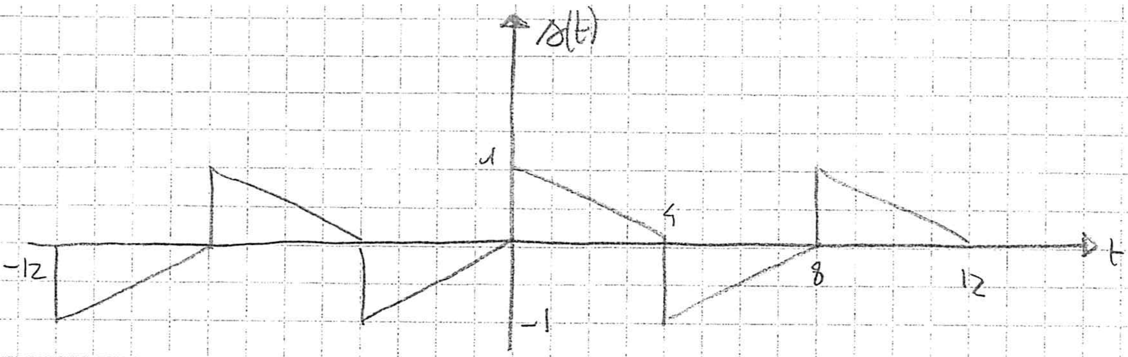
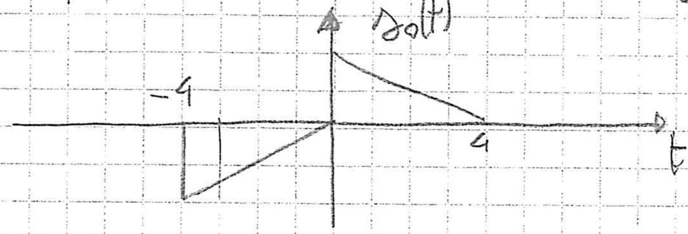


è un segnale a tempo continuo periodico e soddisfa le condizioni di Dirichlet

Possiamo usare la definizione e svolgere un integrale (che dovremo risolvere per parti) oppure sfruttare i teoremi della trasf.

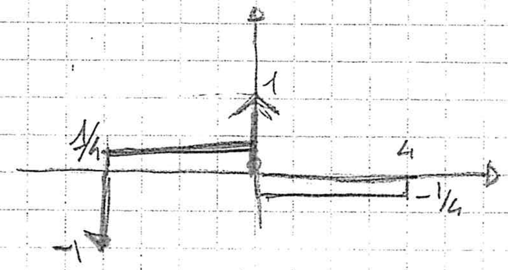
In particolare considero il segnale di un periodo base



detta $S_0(f)$ la TCF di s_0, i coeff. dello sviluppo in serie di $s(t)$ sono $S_n = \frac{1}{8} S_0\left(\frac{n}{8}\right)$

Trovo $S_0(f)$

$s_2(t) = s_0'(t) = \frac{d}{dt} s_0(t) =$



$$= -\delta(t+4) + \frac{1}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+2}{4}\right) + \delta(t) - \frac{1}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$$

$$S_2(f) = -e^{j2\pi f 4} + \frac{1}{4}\cdot 4\,\mathrm{sinc}(4f)\,e^{j2\pi 2 f} + 1 - \frac{1}{4}\cdot 4\,\mathrm{sinc}(4f)\,e^{-j2\pi 2 f} =$$

$$= e^{j4\pi f}\left(-e^{j4\pi f} + e^{-j4\pi f}\right) + \mathrm{sinc}(4f)\cdot\left(2j\sin(4\pi f)\right) =$$

$$= e^{j4\pi f}\left(-2j\sin 4\pi f\right) + \mathrm{sinc}(4f)\left(2j\sin 4\pi f\right)$$

Visto che $S_2(0) = 0$ utilizzando il teorema di integrazione

$$S_0(f) = e^{j4\pi f}\frac{\left(-\sin 4\pi f\right)}{\pi f} + \mathrm{sinc}(4f)\,\frac{\sin 4\pi f}{\pi f} =$$

$$= 4\,\mathrm{sinc}^2(4f) - 4\,\mathrm{sinc}(4f)\,e^{j4\pi f}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{\frac{j\pi n}{2}}$$

$$|f| < 0{,}4\ \mathrm{Hz} \Rightarrow n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$n \in \mathbb{N} \qquad f_n = \frac{n}{8}$$

$n = 0 \qquad S_0 = 0$

$n = 1 \qquad S_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}\right) e^{j\frac{\pi}{2}} =$

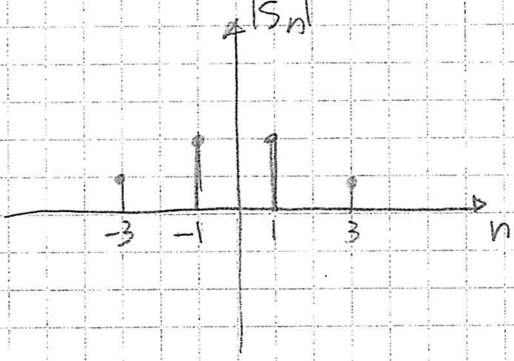
$\qquad = 0{,}20 - 0{,}32j \Rightarrow S_{-1} = 0{,}2 + 0{,}32j$

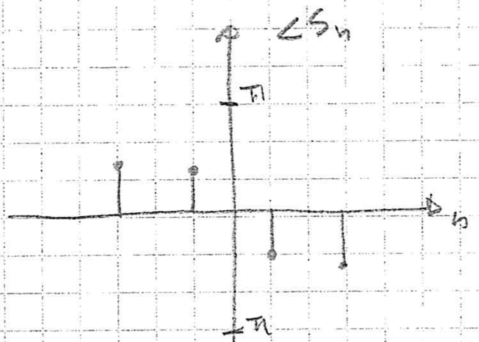
$\qquad |S_1| = 0{,}38 \qquad \angle S_1 = -1{,}004$

$n = 2 \qquad S_2 = 0 \Rightarrow S_{-2} = 0$

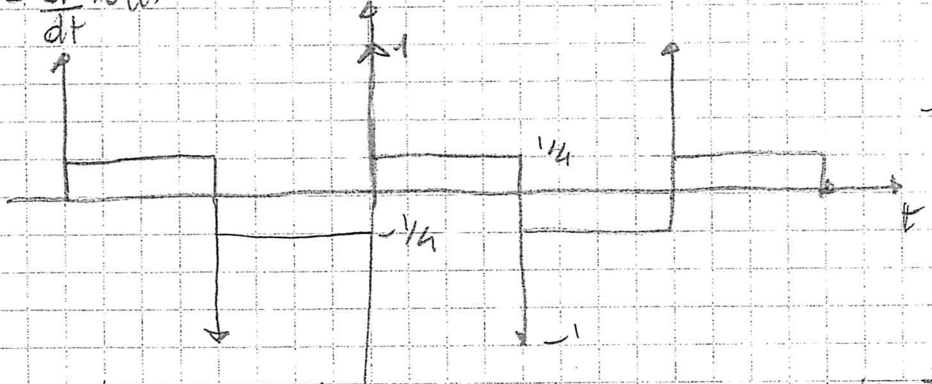
$n = 3 \qquad S_3 = 0{,}02 - 0{,}11j \qquad S_{-3} = 0{,}02 + 0{,}11j$

$\qquad S_3 = 0{,}109\, e^{-j1.36}$





$$s_2(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$



Se consideriamo che $s_2(t) = \frac{d}{dt} s(t)$ e $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j\frac{2\pi n t}{T_0}}$

$$S_{2n} = j\frac{2\pi n}{8} S_n \qquad s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j\frac{2\pi n}{T_0} S_n e^{j\frac{2\pi n t}{T_0}}$$

da qui si ha che $S_{2n} = \frac{2\pi |n|}{8} |S_n| e^{j(\angle S_n + \frac{\pi}{2})}$ per $n > 0$

e $S_{2n} = \frac{2\pi |n|}{8} |S_n| e^{j(\angle S_n - \frac{\pi}{2})}$ per $n < 0$

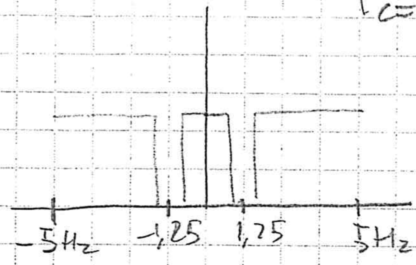
il segnale $S_2(t)$ rispetto a $S(t)$ possiede un contenuto alle freq. più elevate maggiore e un minore contributo alle basse

$y[n] = x[n] + b\,x[n-1] + x[n-2]$ $\qquad b \in \mathbb{R}$

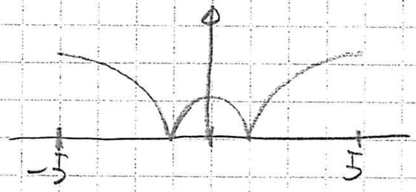
$T_c = 0{,}1\,s$

1) elimina banda (ad es.

$f_c = 1{,}25\,Hz$



si fa notare che non vengono date specifiche sulla banda attenuata, ma solo sulla frequenza centrale quindi potrei avere ∞ soluzioni tra le quali



posso agire in diversi modi

a) metodo geometrico

$$Y(z) = X(z) + b z^{-1} X(z) + z^{-2} X(z)$$

$$H(z) = 1 + b z^{-1} + z^{-2} = \frac{z^2 + bz + 1}{z^2}$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$$

parto da analisi semplice $\quad \sqrt{b^2-4} = 0 \quad b = 2$ o $b = -2$

$b = 2 \qquad z_{1,2} = -1 \longrightarrow$ due zeri in $-1 \Longrightarrow$ passa basso

$b = -2 \qquad z_{1,2} = 1 \longrightarrow$ due zeri in $1 \Longrightarrow$ passa alto

$\sqrt{b^2-4} < 0 \Longrightarrow z_{1,2} = \dfrac{-b \pm j\sqrt{4 - b^2}}{2}$ con $|b| < 2$

noto che $|z_{1,2}| = \sqrt{\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{4}{4} - \dfrac{b^2}{4}} = 1$

quindi per b compresa tra -2 e 2 gli zeri hanno modulo pari a $1 \rightarrow$

mi basta mettere gli zeri in modo tale da annullare $H(z)$ per $f = 1{,}25\,Hz$ e $f = -1{,}25\,Hz$

(4)

quindi $z_1 = 1 \cdot e^{j2\pi f_c T_c} = e^{j2\pi 1{,}25 \cdot 0{,}1} = e^{j\frac{2\pi}{8}} = e^{j\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ quindi $b = -\sqrt{2}$

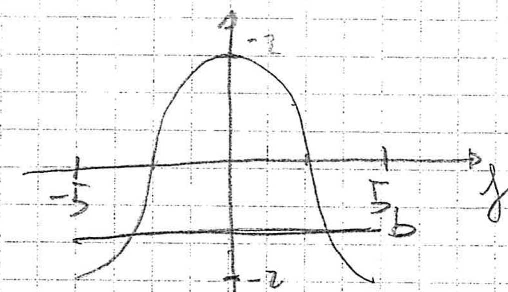
altro modo (solo indicato)

$H(z) = 1 + b z^{-1} + z^{-2}$ $\quad \bar{H}(f) = 1 + b e^{-j2\pi f T} + e^{-j4\pi f T}$

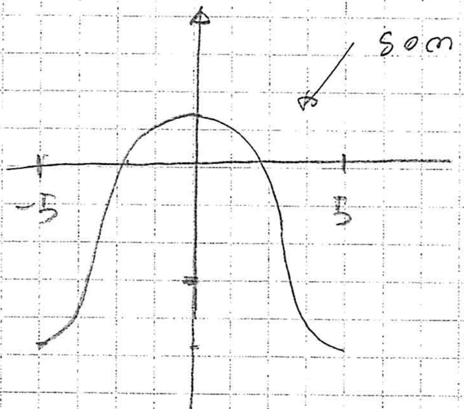
$\bar{H}(f) = e^{-j2\pi f T}\left(b + 2\cos(2\pi f T)\right)$

$|\bar{H}(f)| = |b + 2\cos(2\pi f T)|$ il modulo risulta pari

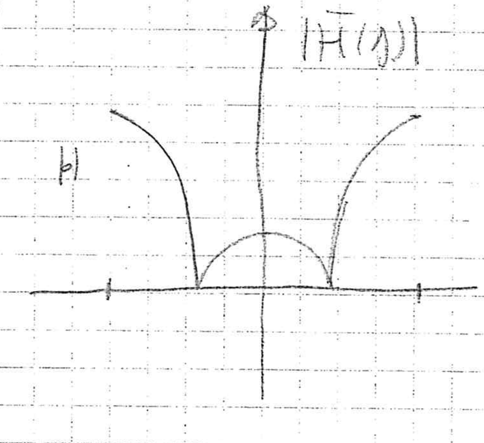
1) a $2\cos 2\pi f T$ traslato di b
2) e poi del risultato viene fatto il modulo



← ho disegnato $2\cos 2\pi f T$ e un b negativo



somma e poi $|\ |$



quindi bisogna fare in modo che $b + 2\cos 2\pi f T$ valga 0 in $f = 1{,}25$ Hz

$b + 2\cos 2\pi \frac{1{,}25}{10} = 0 \quad b + 2\cos\frac{2\pi}{8} = 0 \quad b = -2\cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

5

2) $$\overline{H}(f) = \left(2\cos 2\pi f T - \sqrt{2}\right) e^{-j2\pi f T}$$

$$\left|\overline{H}(f)\right| = \left|2\cos 2\pi f T - \sqrt{2}\right|$$

$$\angle \overline{H}(f) = -2\pi f T + \begin{cases} 0 & \text{per } |f| < 1{,}25\ Hz \\ \pi & \text{per } |f| > 1{,}25\ Hz \end{cases}$$

3) $$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$y[n] = h[n] - h[n-1]$ visto che

$h[n] = \delta[n] - \sqrt{2}\,\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$$y[n] = \delta[n] - \sqrt{2}\,\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-1] + \sqrt{2}\,\delta[n-2] - \delta[n-3] = \delta[n] - (1+\sqrt{2})\delta[n-1] + (1+\sqrt{2})\delta[n-2] + -\delta[n-3]$$

4) $$x[n] = 3 + \cos 2\pi \frac{n}{4}$$

si fa notare che usando la freq. normalizzata le frequenze in gioco sono 0 e $\frac{1}{4}$

usando in Hz sono 0 e $\frac{10}{4}$

questo si può anche vedere agendo come di seguito

$$x[n] = 3 + \cos 2\pi \frac{nT}{4T} = 3 + \cos 2\pi f_1 nT$$

con $f_1 = \frac{1}{4T} = \frac{10}{4}$

$$y[n] = 3\,\overline{H}(0) + \overline{H}\left(\frac{1}{4T}\right)\frac{1}{2}e^{j2\pi\frac{nT}{4T}} + \overline{H}\left(-\frac{1}{4T}\right)\frac{1}{2}e^{-j2\pi\frac{n}{4}} =$$

visto che

$$\overline{H}(0) = 2 - \sqrt{2}$$

$$\overline{H}\left(\frac{1}{4T}\right) = \left(2\cos 2\pi \frac{1}{4T}T - \sqrt{2}\right) e^{-j2\pi\frac{1T}{4T}} = \left(2\cos\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right) e^{-j\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\,j$$

$$y[n] = 3(2-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi\frac{n}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi n}{4}} =$$

$$= 3(2-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi n}{4} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 3(2-\sqrt{2}) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi n}{4}\right)$$

Es. 3)

$$s(t) = \cos\frac{2\pi t}{4} + \cos\frac{2\pi t}{10}$$

f_c min il campionamento passa banda con componenti...

per il campionamento passa basso $f_1 = \frac{1}{4}$ $f_2 = \frac{1}{10}$

per cui $f_c \geq 2 f_{max} = \frac{1}{2}$

una volta campionato il segnale bisogna verificare se la seq. è periodica e qual è il periodo

il segnale di partenza nel tempo continuo è periodico di periodo

$$T_0 = 20$$

essendo $T_c = 1/f_c = 2s$ si vede che T e T_0 in rapporto forniscano un numero razionale

per cui il periodo della sequenza è ancora $20s$

espresso in campioni si ha $N_0 = 10$

devo prendere quindi 10 campioni della sequenza

$$s[n] = \cos 2\pi\frac{n2}{4} + \cos 2\pi\frac{n2}{10}$$

$n = 0:9$

$S = \cos(\pi n) + \cos\frac{2\pi n}{5}$

$S = \mathrm{fft}(s)/N_0$

I coeff. $\neq 0$ sono quelli delle frequenze dei due coseni

visto che $f_K = \frac{K}{N_0 T} = \frac{K}{10 \cdot 2} = \frac{K}{20}$ avremo

7

quindi i coeff $\neq 0$ sono
quelli per $k=2$ e $k=5$ (nel vettore posizioni 3 e 6 rispettivamente

i coeff $\neq 0$ corrispondenti alle freq. negative $\tilde{X}_2 = \tilde{X}_{-2}^*$ e $\tilde{X}_5 = \tilde{X}_{-5}^*$

vista la periodicità dei coeff si trovano nelle posizioni

$-2+10=8 \Rightarrow$ posizione vettoriale 9
$-5+10=5$ individua lo stesso coeff visto prima

N.B. questo può succedere per N_0 pari
In questo caso $\exists!$ coeff per $f=\frac{f_c}{2}$