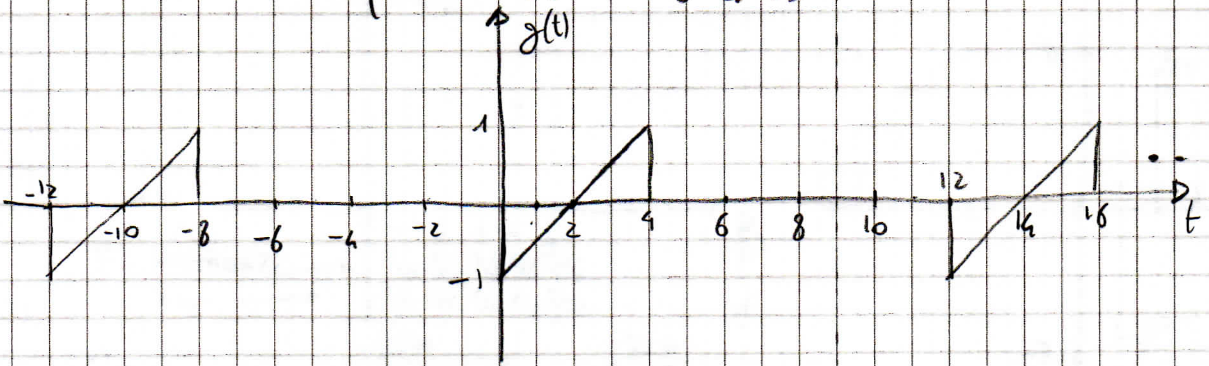
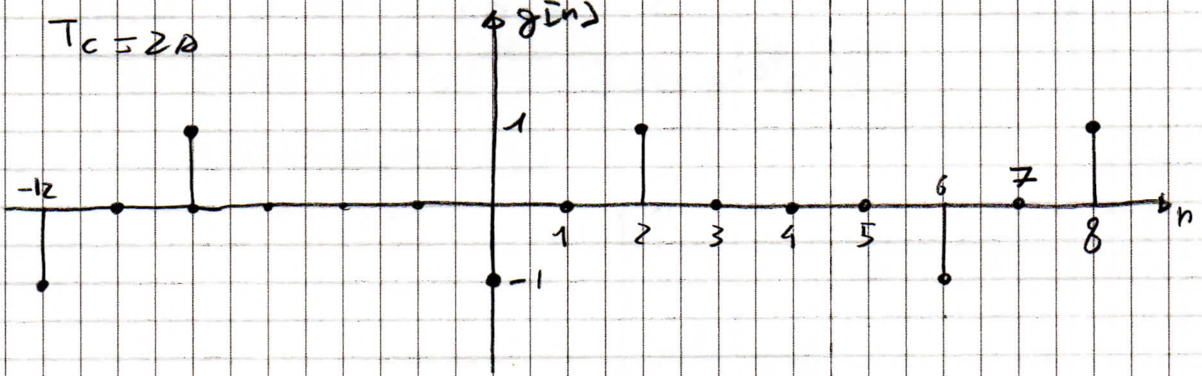
ASB 28/7/14 Test 2 ES. 1.

$$g(t) = rep_{12}\left\{ \left(-1+\frac{t}{2}\right) rect\left(\frac{t-2}{4}\right)\right\}$$



$T_c = 2$



$g[n]$ è una sequenza periodica di periodo $N_0 = 6$

posso
- usare la TDF
- usare la TF sequenza sfruttando le proprietà della $\delta(f)$

scelgo il primo approccio

$$G_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} g[n]\, e^{-j2\pi\frac{nk}{N_0}} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} g[n]\, e^{-j\frac{2\pi nk}{6}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-1 + 1\, e^{-j\frac{4\pi k}{6}}\right) = \frac{1}{6}\left(-1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k}\right) = \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}k}}{6}\left(-e^{j\frac{\pi}{3}k} + e^{-j\frac{\pi}{3}k}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} e^{-j\frac{\pi}{3}k}\left(-2j \sin\frac{\pi}{3}k\right) = -\frac{1}{3} j \sin\frac{\pi}{3}k\, e^{-j\frac{\pi}{3}k}$$

$k = 0, \dots, 5$
oppure
$k = -3, -2, \dots, 2$

$G_0 = 0$

$G_1 = -\frac{j}{3}\sin\frac{\pi}{3} e^{-j\frac{\pi}{3}} \cong 0{,}288\, e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0{,}288\, e^{-j\frac{5}{6}\pi}$

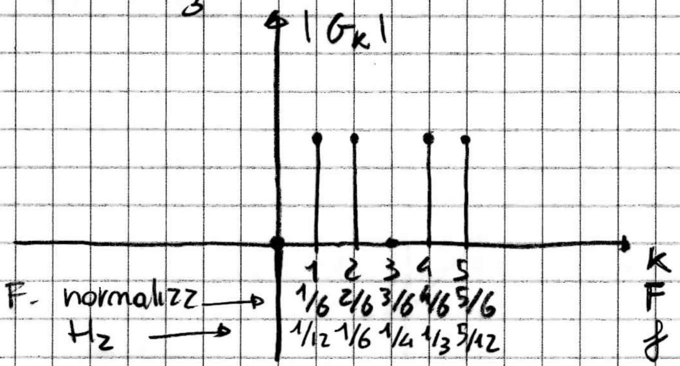
visto che $g[n] \in \mathbb{R}$ e che $G_k = G_{k+hN_0} \quad \forall h, k$

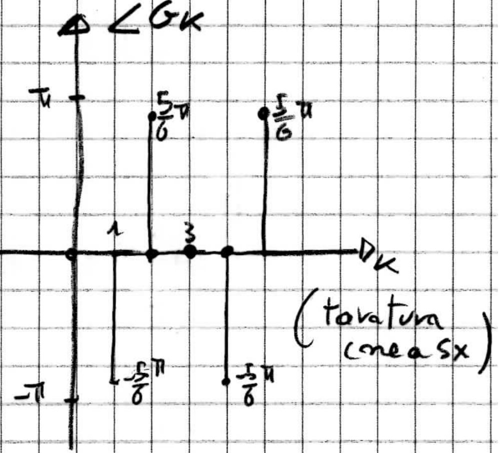
$G_5 = G_{-1} = G_1^* = 0{,}288\, e^{j\frac{5}{6}\pi}$

$G_2 = -\frac{1}{3} j \sin\frac{2}{3}\pi\, e^{-j\frac{2}{3}\pi} \cong 0{,}288\, e^{-j\frac{2}{3}\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0{,}288\, e^{-j\frac{7}{6}\pi}$ = (siccome voglio rappresentare $\angle G_k$ tra $-\pi$ e π) $= 0{,}288\, e^{-j\frac{7}{6}\pi} e^{+j2\pi} = 0{,}288\, e^{+j\frac{5\pi}{6}}$

$G_4 = G_{-2} = G_2^* = 0{,}288\, e^{-j\frac{5\pi}{6}}$

$$G_3 = -\frac{j}{3} \sin(\pi) e^{-j\pi} = 0$$

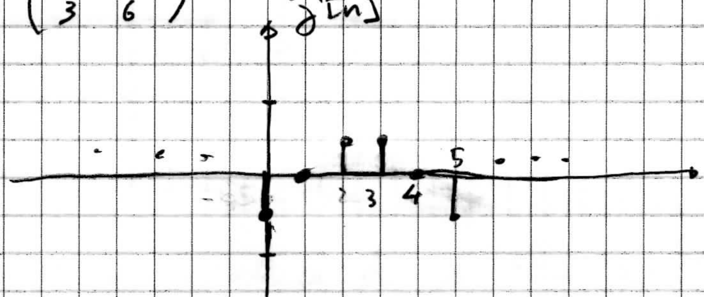




$$\hat{g}[n] = G_1 e^{j\frac{2\pi n}{6}} + G_{-1} e^{-j\frac{2\pi n}{6}}$$

$$= 0{,}288\, e^{-j\frac{5}{6}\pi} e^{j\frac{2\pi n}{6}} + 0{,}288\, e^{j\frac{5}{6}\pi} e^{-j\frac{2\pi n}{6}} =$$

$$= 0{,}5774 \cos\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{5}{6}\pi\right)$$



$h[n] = j\, g[n]$

le TF sono operatori lineari quindi

$$\hat{H}_k = j\, \tilde{G}_k = e^{j\frac{\pi}{2}} \tilde{G}_k$$ ovvero ogni coeff. della TDF

di $g[n]$ viene moltiplicato per un termine che modifica la fase. Essendo poi la sequenza $h[n]$, immaginaria pura, i suoi coeff soddisfano la seguente relazione

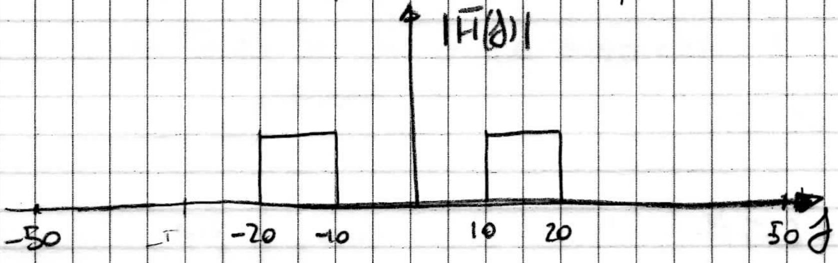
$$|\hat{H}_k| = |\hat{H}_{-k}| \qquad \angle \hat{H}_k = -\angle \hat{H}_{-k} + \pi$$

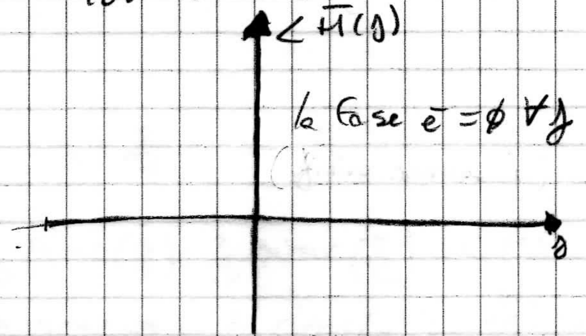
- non è possibile ottenere nuovamente il segnale di partenza a partire dai campioni perché non sono state rispettate le regole per un corretto campionamento. Infatti il segnale $g(t)$ non è limitato in banda, mentre $T_c = 2s$.
Il campionamento sarebbe stato corretto se il segnale $g(t)$ fosse stato limitato a $0{,}25$ Hz. In questo modo dal teorema di interpolazione cardinale sappiamo che è possibile ricavare $g(t)$ da $g[nT_c]$

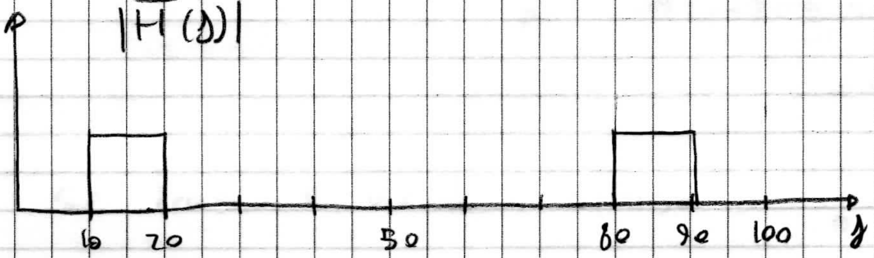
ASB 28/7/14 es. 2

$T_c = 1/f_c = 100\,Hz$ questa è la f_c del segnale quindi possiamo considerare le frequenze $f \leq 50\,Hz$

Inoltre la $\overline{H}(f)$ del sistema sarà univocamente determinata dagli intervalli $-50\,Hz : 50\,Hz$ o $\emptyset\,Hz : 100\,Hz$ che corrispondono ad 1 periodo della $\overline{H}(f)$ stessa







trovo la $h[n]$ corrispondente a $\overline{H}(f)$

$$h[n] = \frac{1}{100}\int_{-50}^{50} \overline{H}(f)\, e^{j2\pi n f T_c}\, df = \frac{1}{100}\left(\int_{-20}^{-10} e^{j2\pi n f/100}\, df + \int_{10}^{20} e^{j\frac{2\pi n f}{100}}\, df\right) =$$

$$= \frac{1}{100}\,\frac{1}{j\frac{2\pi n}{100}}\, e^{j\frac{2\pi n f}{100}}\Big|_{-20}^{-10} + \frac{1}{100}\,\frac{1}{j\frac{2\pi n}{100}}\, e^{j\frac{2\pi n f}{100}}\Big|_{10}^{20} =$$

$$= \frac{1}{j2\pi n}\left(e^{-j\frac{20\pi n}{100}} - e^{-j\frac{40\pi n}{100}}\right) + \frac{1}{j2\pi n}\left(e^{j\frac{40\pi n}{100}} - e^{j\frac{20\pi n}{100}}\right) =$$

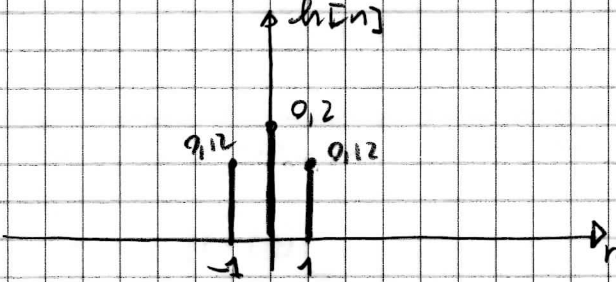
$$= \frac{1}{\cancel{j}2\pi n}\,\cancel{2j}\sin\left(\frac{4}{10}\pi n\right) - \frac{1}{\cancel{j}2\pi n}\,\cancel{2j}\sin\left(\frac{2\pi n}{10}\right) = \frac{4}{10}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{4}{10}n\right) - \frac{2}{10}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2}{10}n\right)$$

Questo filtro è non causale e ha risposta infinita

Per avere un filtro FIR causale e a fase lineare devo utilizzare il metodo delle finestre prendendo una finestra simmetrica rispetto a $n=0$ e poi traslandola per renderne il filtro causale

Per avere ordine 3 (3 poli) posso prendere

- 4 campioni: non avrei in questo caso simmetria di $h[n]$ visto che la $h[n]$ è definita per $n=0$
- 3 campioni traslati in modo opportuno (si vedrà in seguito)
- prendo 3 campioni centrati in $n=0$. Questa operazione equivale a moltiplicare $h[n]$ per una finestra rettangolare centrata in $n=0$ e ampiezza 3

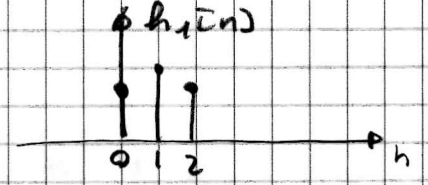


$$h[0] = \frac{4}{10} - \frac{2}{10} = \frac{2}{10}$$

$$h[1] = \frac{4}{10} \operatorname{sinc}\left(\frac{4}{10}\right) - \frac{2}{10} \operatorname{sinc}\left(\frac{2}{10}\right) = 0{,}1156$$

$$h[-1] = \frac{4}{10} \operatorname{sinc}\left(-\frac{4}{10}\right) - \frac{2}{10} \operatorname{sinc}\left(-\frac{2}{10}\right) = h[1]$$

se traslo a dx di 1 ottengo

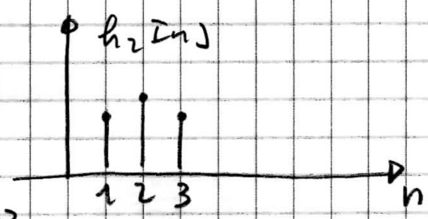


e $h_1[n] = 0{,}1156\ \delta[n] + 0{,}2\ \delta[n-1] + 0{,}1156\ \delta[n-2]$

$$H_1(z) = 0{,}1156 + 0{,}2\, z^{-1} + 0{,}1156\, z^{-2}$$

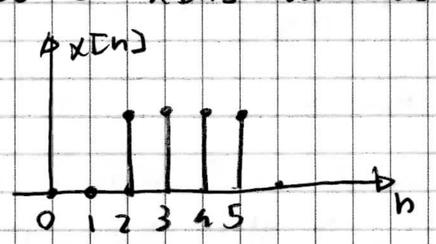
$H_1(z)$ presenta due poli

quindi traslo ulteriormente di 1 passo

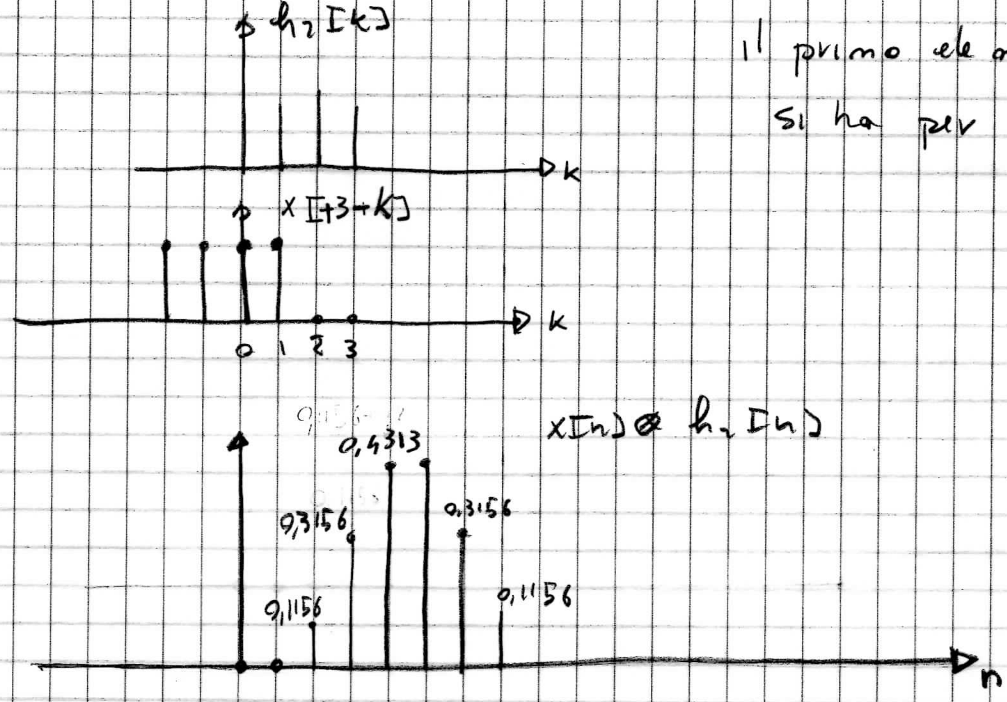


$$H_2(z) = 0{,}1156\, z^{-1} + 0{,}2\, z^{-2} + 0{,}1156\, z^{-3}$$

l'ingresso è $x[n] = u[n-2] - u[n-6]$



l'uscita è la convoluzione tra $h_1[n]$ e $x[n]$



il primo elemento $\neq 0$ dell'uscita si ha per $n = 3$