ASB 16/01/13 Esercizio 1 Descrivere il modello di regressione lineare indicando le ipotesi per una corretta applicazione a dati sperimentali. Indicare le finalità dell'utilizzo di tale modello e discutere un esempio di applicazione.

Specificare i criteri per la determinazione dei parametri del modello e indicare il legame esistente tra i parametri del modello e altre statistiche di una o più variabili aleatorie (i.e. coefficiente di correlazione, deviazione standard, valore medio di una variabile).

Esplicitare il legame tra coefficiente di correlazione e pendenza della retta di regressione. Discutere se e come varia il coefficiente di correlazione in funzione della retta di regressione.

Fare un esempio grafico dell'andamento dell'istogramma dell'errore del modello di regressione, nei casi di:

- Modello di regressione non valido
- Modello di regressione su due variabili che presentano un alto coefficiente di correlazione
- Modello di regressione su due variabili che presentano un basso coefficient di correlazione

Esercizio 2.
Dare la definizione di processo stocastico mostrando, indicando il significato delle funzioni campione.
Indicare cosa si intende per variabile aleatoria estratta da un processo, sia utilizzando definizioni teoriche sia utilizzando un metodo grafico.
Indicare cosa di intende di statistica di ordine 2, mostrandone il significato sia dal punto di vista teorico che tramite esempi (sfruttando una rappresentazione grafica del processo).

- Discutere anche tramite esempi il significato della funzione di autocorrelazione di un processo e come questa sia legata all'andamento delle funzioni campione
- Fornire l'esempio di un esperimento in ambito biomedico che possa essere rappresentato tramite un processo stocastico indicando il significato delle funzioni campione nel caso in oggetto.

Esercizio 3. Si consideri il significato e l'uso della distribuzione binomiale.

I. Scegliere tra le seguenti la frase che descrive meglio i valori forniti dalla suddetta distribuzione.

A. ☐ probabilità che il k-esimo evento di n prove fornisca come risultato un successo
B. ☐ il numero di successi ottenuti in n prove
C. ☐ probabilità di avere k successi in n prove successive
D. ☐ probabilità di avere successo in n prove successive

II. Indicati con n il numero di prove e q la probabilità di insuccesso. Indicare qual è il valore atteso della distribuzione

A. ☐ $\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{n}$ B. ☐ $n/2$ C. ☐ $n(1-q)$ D. ☐ $\frac{n(1-q)}{2}$

III. Se inoltre con p si indica la probabilità di successo, indicare qual è la deviazione standard dei valori assunti dalla distribuzione

A. ☐ npq B. ☐ $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{n-1}}$ C. ☐ $\sqrt{npq}$ D. ☐ $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(p_i - \sum_{i}^{n} p_i / n\right)^2}{n-1}}$

In un esperimento la probabilità di successo su una singola prova sia pari a 0.8. Si consideri un esperimento composto da 13 prove. Si calcoli:

IV. la probabilità di ottenere 8 successi

A. ☐6.91% B. ☐ 0.055% C. ☐ 70.75% D. ☐ 0.11% E.☐0.028%

Esercizio 4 Si consideri il segnale a tempo continuo dato da

$$s(t) = 1 + \sin\frac{2\pi t}{T_0}$$

Farne il grafico in funzione del tempo, calcolare la Trasformata Continua di Fourier e farne il grafico modulo e fase

Si consideri adesso il segnale

$$s_p(t) = s(t) \cdot rep_{\frac{T_0}{8}}(\delta(t))$$

Se ne faccia il grafico nel tempo.

Elencare tutti i modi tramite i quali è possibile studiare il segnale $s_p(t)$ in frequenza, fornendo indicazioni precise sui passi necessari per eseguire tale studio.
Scegliere quindi un approccio e utilizzarlo per stimare la descrizione in frequenza. Eseguire il grafico del modulo della risposta in frequenza.

Esercizio 5 Si considerino i seguenti sistemi descritti dalla trasformazione ingresso/uscita

1) $y(t) = e^{-\alpha t}u(t) \otimes x(t)$ con $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

2) $y(t) = sin(20\pi t)x(t)$

Discutere linearità e tempo in varianza dei due sistemi.
Discutere il comportamento in frequenza dei due sistemi.

Si calcoli l'uscita dei sistemi quando in ingresso è presente il segnale

$x(t) = sin(4\pi t)$

e rappresentare tale uscita in frequenza (solo modulo).

Esercizio 6 Si consideri il segnale $s(t) = e^{j\pi t} + \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$. Si dica qual è la minima frequenza di campionamento utilizzabile.

A. ☐ 0.04 Hz B. ☐ 24 Hz C. ☐ 1.17 Hz D. ☐ 1 Hz

Sia dato un segnale con banda compresa tra 8 e 11 Hz. Si indichi la minima frequenza di campionamento utilizzabile

A. ☐ 6 Hz B. ☐ 7.333 Hz C. ☐ 11 Hz D. ☐ 22 Hz

Si consideri un segnale formato da due componenti sinusoidali a 10 e 10.2 Hz rispettivamente. Si supponga di poter campionare il segnale ad una frequenza di 25 Hz. Quali delle seguenti operazioni garantisce che si possano distinguere le due componenti tramite un'analisi in frequenza di un segmento del segnale campionato?

A. ☐ indipendentemente dal numero di campioni considerati applico uno zero padding di almeno 125 campioni
B. ☐ eseguo la TDF di un segmento del segnale lungo 10 secondi
C. ☐ eseguo la TDF di un segmento di lunghezza pari a 2 secondi al quale applico uno zero padding

ASB 0809 e prec 5/02/13.

Esercizio 1 (6 punti)
Si fornisca la definizione di segnale biomedico spontaneo, fornendo alcuni esempi di segnali di interesse biomedico.
In particolare si fornisca una classificazione dei segnali in funzione della forma di energia con la quale essi si manifestano.
Fornire lo schema a blocchi di un sistema per l'acquisizione dei segnali biomedici spontanei, descrivendo brevemente l'utilizzo di ogni blocco.
Scegliere un segnale biomedico a piacere, fornire una descrizione in termini di significato fisiologico, di caratteristiche in termini di ampiezza e frequenza e di utilizzo in ambito clinico.

Esercizio 2 (6 punti)
Formulare il teorema di Bayes, discutendo il significato di probabilità a priori e condizionata. Spiegare come sia possibile determinare il valore predittivo di un test diagnostico, basandosi sulle formule derivate dal teorema di Bayes e avendo a disposizione un test di riferimento (Gold standard, non si conoscono a priori parametri quali Falsi positivi, Falsi negativi etc).
Supponendo che un test abbia sensibilità pari a 0.99 e specificità pari a 0.98 e venga applicato ad un soggetto estratto casualmente da una popolazione per la quale la probabilità di malattia sia pari allo 4% si calcoli la probabilità che il test dia un risultato positivo.

Esercizio 3 (3 punti)

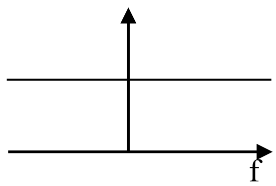
Si consideri la definizione di processo stocastico. Si scelga quale tra le seguenti definizioni è corretta

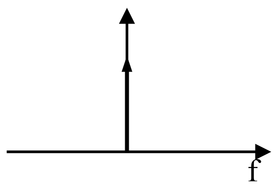
A. ☐ se fissiamo un istante di tempo t, l'insieme dei valori del processo per tale istante è una funzione deterministica
B. ☐ ogni realizzazione è una funzione deterministica
C. ☐ se fissiamo tempo ed evento otteniamo una variabile aleatoria

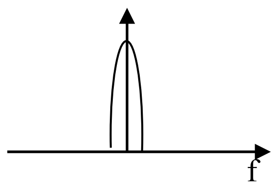
Detta $R_X(t_1,t_2)$ la funzione di autocorrelazione di un processo stazionario in senso stretto, dire quali tra le seguenti affermazioni è vera

A. ☐ $R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1+T_A, t_2+T_A)$ per ogni T_A
B. ☐ $R_X(t_1,t_2)$= costante
C. ☐ $R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1+\varepsilon, t_2)$ per ogni ε

Quale tra le seguenti ***trasformate*** di funzioni di autocorrelazione è caratteristica di un processo di rumore bianco:







A. ☐ B. ☐ C. ☐

La deviazione standard di un processo è :

A. ☐ una statistica di ordine 2
B. ☐ una statistica di ordine 1
C. ☐ un momento di ordine 1

Esercizio 4 (6 punti)

Si consideri il segnale a tempo continuo dato da

$$s(t) = g(t) \otimes \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-T) \qquad \text{dove} \qquad g(t) = \begin{cases} t & per\ |t| < T/2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

con T=2 s. Fare il grafico di *s(t)* nel dominio del tempo per t compreso tra -8 e 8.

Si consideri il segnale $s_2(t) = |s(t)|$. Se ne faccia il grafico nel tempo per lo stesso intervallo temporale utilizzato nel punto precedente.

Discutere comparativamente il contenuto frequenziale dei due segnali.

Rispondere ai seguenti quesiti:
- quante componenti frequenziali sono necessarie per descrivere i segnali?
- quali sono le componenti frequenziali necessarie per descrivere i segnali?
- è possibile discutere eventuali differenze nel contenuto frequenziale dei due segnali, a partire dall'analisi dell'andamento termporale?
- in quali modi è possibile determinare il contenuto frequenziale dei due segnali? In particolare si dica se e come potrebbe essere sfruttato il legame tra TCF e Serie di Fourier per determinare il contenuto frequenziale di *s(t)*.

Sovrapporre al grafico del segnale del tempo $s(t)$ il segnale ottenuto dall'equazione di sintesi considerando solo le possibili componenti corrispondenti a n=0, n=+1 e n=-1. Per la risoluzione di questo punto è richiesto un approccio quantitativo.

Esercizio 5 (6 punti) Si consideri un sistema la cui risposta impulsiva vale

$$h(t) = sinc^2(10t)$$

Dire se il sistema è ideale o fisicamente realizzabile, giustificando la risposta data.

Fare il grafico della risposta in frequenza in modulo e fase di tale sistema.

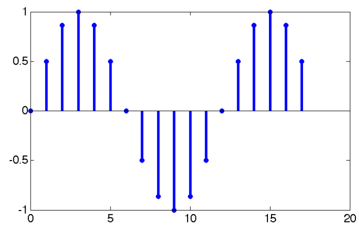
Calcolare l'andamento nel tempo dell'uscita quando in ingresso è presente il segnale

$$x(t) = sin(5\pi t) + cos(20\pi t)$$

Esercizio 6 (3 punti)
Si consideri una sequenza del tipo $x[n] = [u[n] - u[n-6]] \otimes \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-k12]$.
Si indichi quale delle seguenti sequenze può essere una componente della sequenza x[n].
Con *A* si indica una costante

A. ☐ $x[n] = A\cos\left(\frac{\pi n}{12}\right)$ B. ☐ $x[n] = Ae^{j\frac{5\pi n}{6}}$ C. ☐ $x[n] = Ae^{j\frac{5\pi n}{12}}$

Si consideri la seguente sequenza. Si ipotizzi di renderla periodica con periodo 17 e di farne la TDF.



Quante componenti diverse da zero sono presenti nella TDF?

A. ☐3 B. ☐2 C. ☐>3

Si consideri il segnale a tempo continuo $s(t) = rect(t/8)$. Supponendo di voler campionare il segnale con passo di campionamento pari a T_c, si dica quali tra le seguenti affermazioni è corretta

A. ☐ per evitare l'aliasing è possibile utilizzare un tempo di campionamento inferiore o uguale a 1/8 s
B. ☐ non esiste alcun valore di T_c che permetta di evitare il fenomeno dell'aliasing
C. ☐ per evitare l'aliasing è necessario utilizzare un tempo di campionamento inferiore o uguale a 1/16 s

Esercizio 1 (6 punti)
Si fornisca la definizione di segnale biomedico spontaneo e si descriva accuratamente lo schema a blocchi di un sistema per la loro acquisizione.
Scegliere un segnale biomedico a piacere, fornire una descrizione in termini di significato fisiologico, di caratteristiche in termini di ampiezza e frequenza e di utilizzo in ambito clinico.
Sottolineare inoltre il tipo di fenomeno fisico (meccanico, elettrico, chimico) attraverso il quale il segnale scelto si manifesta.
Fornire l'esempio di un segnale spontaneo che si manifesta attraverso un fenomeno di altra natura sottolineando l'utilizzo clinico.

Esercizio 2 (6 punti)
• Dare la definizione di processo stocastico mostrando, indicando il significato delle funzioni campione.
• Indicare cosa si intende per variabile aleatoria estratta da un processo, sia utilizzando definizioni teoriche sia utilizzando un metodo grafico.
• Indicare cosa di intende di statistica di ordine 1, mostrandone il significato sia dal punto di vista teorico che tramite esempi (sfruttando una rappresentazione grafica del processo).
• Fornire più esempi di diverse statistiche di ordine 1.
• Discutere anche tramite esempi il significato del valore medio di un processo. Dire in quali condizioni può essere dipendente dal tempo, e che cosa questo significhi, e quando invece non è dipendente dal tempo.
• Fornire l'esempio di un esperimento in ambito biomedico che possa essere rappresentato tramite un processo stocastico indicando il significato delle funzioni campione nel caso in oggetto.

Esercizio 3 (3 punti)

I. Dato un vettore che contiene 8 numeri ottenuti dalla una distribuzione è di tipo binomiale caratterizzata da numero prove pari a 8, e probabilità di successo pari a 0.5. si consideri quale tra questi vettore è compatibile con tale descrizione
   A. ☐ [0 1 0 1 0 1 0 2]
   B. ☐ [0 0.1 0.2 0 0.9 1 0.3 0.2]
   C. ☐ [0.05 0.15 0.15 0.1 0.05 0.3 0.15 0.05]
   D. ☐ [1 3 7 3 5 4 8 9]

II. Dato un esperimento composto da 11 prove descrivibile tramite una distribuzione di tipo binomiale. Avendo ottenuto in modo empirico 100 numeri di tale distribuzione, quante prove sono state eseguite per ottenere tali numeri?
   A. ☐ 1100
   B. ☐ 100
   C. ☐ tutti quelli che sono serviti per ottenere 100 successi

III. A parità di numero di prove, per quale valore di p, probabilità di successo, la distribuzione binomiale si avvicina di più alla distribuzione gaussiana. Nel seguito si indica con q la probabilità di insuccesso

   A. ☐ $p >> 1$ B. ☐ $p = q$ C. ☐ $pq >> 1$ D. ☐ $p = 1$

IV. Scegliere tra le seguenti la frase che descrive meglio i valori forniti dalla distribuzione binomiale
   D. ☐ probabilità che il k-esimo evento di n prove fornisca come risultato un successo
   E. ☐ il numero di successi ottenuti in n prove
   F. ☐ probabilità di avere k successi in n prove successive
   G. ☐ probabilità di avere successo in n prove successive

Esercizio 4 (6 punti)

Si consideri il segnale a tempo continuo dato da

$$s(t) = cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right) \otimes \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect\left(\frac{t - 4kT_0}{2T_0}\right)$$

Fare il grafico di *s(t)* nel dominio del tempo per t compreso tra $-6T_0$ e $+6T_0$.

Si calcolino i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier e se ne faccia il grafico per n compreso tra -4 e 4.

Sovrapporre al grafico del segnale del tempo $s(t)$ il segnale ottenuto dall'equazione di sintesi considerando solo le componenti corrispondenti a n=0, n=+1 e n=-1.

In un secondo grafico, sovrapporre al grafico del segnale del tempo $s(t)$ il segnale ottenuto dall'equazione di sintesi considerando solo le componenti corrispondenti a n=+4 e n=-4.

Esercizio 5 (6 punti) Si consideri un sistema la cui trasformazione ingresso uscita vale

$$y(t) = x(t) + \sqrt{2}x(t - t_0) + x(t - 2t_0)$$

Dimostrare che il sistema è lineare e tempo invariante, giustificando la risposta data.

Stimare la risposta in frequenza e farne il grafico del modulo.

Calcolare l'andamento nel tempo dell'uscita quando in ingresso è presente il segnale

$$x(t) = sin\left(\frac{3\pi t}{4t_0}\right) + cos\left(\frac{\pi t}{t_0}\right)$$

Esercizio 6 (3 punti) Si consideri il segnale $s(t) = 5 + \sum_{k\neq 0, k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2} e^{j\pi \frac{kt}{3}} + \sum_{k\neq 0, k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} e^{j\pi \frac{kt}{2}}$. Si dica qual è il periodo del segnale.

A. ☐ 6s B. ☐ 12 s C. ☐ 24 s

Si consideri il seguente segnale periodico $s(t) = 4 + \sin(2\pi 10t) + \sin(2\pi 10.1t)$. Se volessimo campionare il segnale utilizzando il criterio per segnali passa basso, qual é il tempo di campionamento massimo necessario?

A. ☐ 0.0495 B. ☐ 5 C. ☐ 0.099

Si consideri *dt* il tempo di campionamento ottenuto applicando il campionamento per segnali passa banda. Si consideri quale tra le seguenti affermazioni è falsa

A. ☐ è comunque possibile applicare il campionamento per segnali passa basso con frequenze superiori a $1/dt$
B. ☐ è possibile usare tutte le frequenze di campionamento superiori a $1/dt$
C. ☐ non è possibile applicare usare tutte le frequenze di campionamento inferiori a $1/dt$

Si consideri un segnale formato da due componenti sinusoidali a 1 e 1.1 Hz rispettivamente. Si supponga di poter campionare il segnale ad una frequenza di 25 Hz. Quali delle seguenti operazioni garantisce che si possano distinguere le due componenti tramite un'analisi in frequenza di un segmento del segnale campionato?

A. ☐ indipendentemente dal tempo di osservazione applico uno zero padding per ottenere almeno 250 campioni
B. ☐ eseguo la TDF di un segmento del segnale lungo 20 secondi
C. ☐ eseguo la TDF di un segmento di lunghezza pari a 2 secondi al quale applico uno zero padding