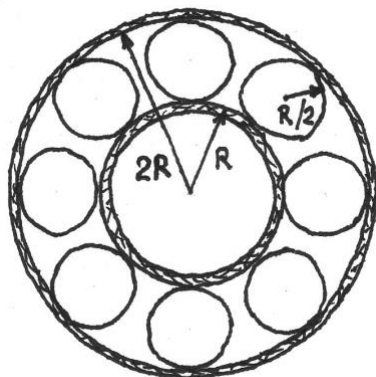


### Esercizio 1

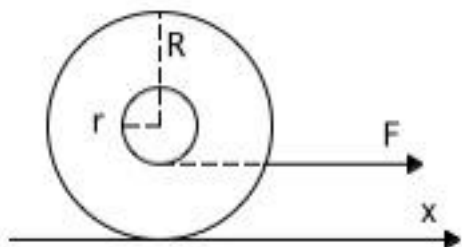
Il momento angolare di un sistema S, rispetto ad un polo O, varia col tempo con la legge  $\mathbf{L} = \mathbf{a} + \mathbf{b}t^2$ , dove  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono vettori costanti, tra loro perpendicolari. Trovare il momento meccanico  $\boldsymbol{\tau}$  che agisce sul sistema nell'istante in cui l'angolo tra  $\mathbf{L}$  e  $\boldsymbol{\tau}$  vale  $45^\circ$ .

### Esercizio 2



Si abbia un cuscinetto a sfere. Esso è composto da due anelli, detti *ralle*, tra i quali sono interposte delle sfere che rotolano tra gli anelli stessi senza nessuno strisciamento. L'anello esterno, di raggio  $2R$ , è fisso. L'anello interno, di raggio  $R$  e massa  $M$ , è libero di ruotare. Le sfere sono 8 ed hanno massa  $m$  e raggio  $R/2$  ognuna. Se l'anello interno viene fatto ruotare con velocità angolare  $\omega$  quanto vale il momento angolare del cuscinetto?

### Esercizio 3

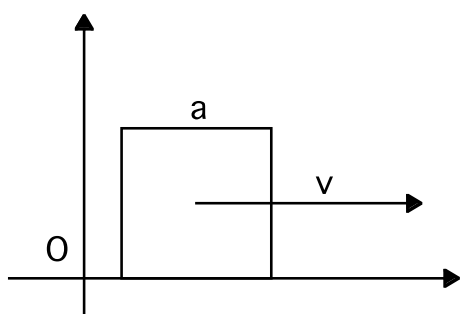


Uno yo-yo di massa  $m$ , con un filo arrotolato sulla sua parte centrale, si trova appoggiato su una superficie orizzontale scabra. Il suo momento d'inerzia vale  $KmR^2$ , dove  $K$  è un fattore numerico e  $R$  è il raggio esterno dello yo-yo. Il raggio della parte centrale vale  $r$ . Lo yo-yo viene tirato applicando al filo una forza  $F$ , senza che si verifichi nessuno slittamento rispetto alla

superficie orizzontale. Si chiede di trovare:

- In quale verso si muove lo yo-yo.
- Con quale accelerazione si muove lo yo-yo.
- Il lavoro svolto dalla forza  $F$  in un tempo  $t$ , misurato a partire dall'istante in cui lo yo-yo è fermo.

### Esercizio 4



Un cubo uniforme, di spigolo  $a$ , giace su di un piano orizzontale il cui coefficiente di attrito dinamico vale  $\mu_d$ . Il cubo viene posto in moto con una qualsiasi velocità iniziale orizzontale, percorre dello spazio sul piano ed arriva a fermarsi. Si spieghi quantitativamente, e con cura, la sparizione dell'iniziale momento angolare del cubo rispetto all'origine O.

### Esercizio 5

Una particella si muove su una traiettoria chiusa in un campo di forza centrale dove la sua energia potenziale vale  $U = kr^2$  ( $k$  è una costante positiva,  $r$  è la distanza dal centro  $O$  del campo). Trovare la massa della particella se la sua distanza minima da  $O$  vale  $R_1$  e la sua velocità nel punto della traiettoria più distante da  $O$  vale  $V_2$ .

### Esercizio 6

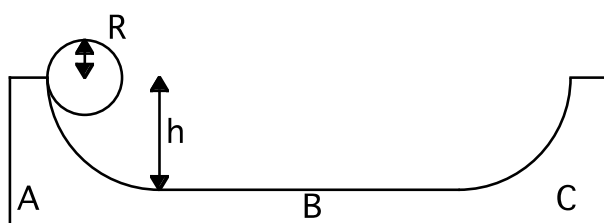
Si abbiano 3 corpi assimilabili a punti materiali, il corpo  $A$  di massa  $m$  ed i corpi  $B$  e  $C$  di massa  $m/2$  ognuno.

Per  $t=0$  la situazione è la seguente:  $A$  è fermo,  $B$  è fermo a distanza  $D$  da  $A$ ,  $C$  ha una velocità  $V_0$  la quale forma un angolo  $\alpha$  con la congiungente  $AB$ ,  $C$  urta  $B$  in modo totalmente anelastico, non c'è forza di gravità.

Per  $t \geq 0$  tra il corpo  $A$  ed i corpi  $B+C$  c'è una forza attrattiva direttamente proporzionale alla distanza relativa  $x$  tale che  $F = -Kx$  con  $K$  costante positiva.

Si chiede di trovare la distanza massima e minima tra  $A$  e  $B+C$  per  $t \geq 0$ .

### Esercizio 7



Una sfera (piena) di raggio  $R$  viene fatta partire da ferma nella posizione indicata in figura, ad altezza  $h$  rispetto alla parte più bassa di un profilato rigido. Le tre sezioni del profilato differiscono tra loro per le caratteristiche superficiali: la sezione  $A$ , circolare e di raggio  $h$ , è

perfettamente liscia e priva di attrito; la sezione  $B$  presenta un certo (ignoto) coefficiente di attrito ed è orizzontale e molto lunga; la sezione  $C$ , circolare e di raggio  $h$ , presenta un attrito così elevato da consentire solo il rotolamento della sfera. Calcolare a quale altezza massima  $h'$  arriva la sfera nella sezione  $C$  del profilato, la prima volta che vi giunge.

### Esercizio 8

Si abbia un tubo lungo e sottile, di massa  $M$  e lunghezza  $L$ . Esso è libero di ruotare senza attrito intorno ad un asse verticale perpendicolare all'asse del tubo e passante per il centro del tubo stesso. Inizialmente il tubo ruota con velocità angolare  $\omega_0$  ed al suo centro si trova una massa puntiforme  $m$  che può scivolare senza attrito al suo interno. Si trovi la velocità della massa  $m$  quando questa esce dal tubo.

### Esercizio 9

Un volano cilindrico, di massa  $M$  e raggio  $R$ , viene messo in rotazione libera sull'asse con velocità angolare iniziale  $\omega_0$ . Una lumaca di massa  $m$  si trova sul bordo del volano. La lumaca comincia a muoversi dal bordo verso il centro, e raggiunge l'asse di rotazione. Qual è la velocità angolare finale del volano? Quanto lavoro ha fatto la lumaca per muoversi?

### Esercizio 10

Una piccola sfera è sospesa ad un punto O tramite una corda di lunghezza L e massa trascurabile. Successivamente la sfera viene spostata lateralmente, in modo che la corda formi un angolo  $\theta$  con la verticale, e posta in moto in una direzione perpendicolare al piano verticale in cui giace la corda. Quale velocità iniziale si deve impartire alla sfera perché nel moto successivo essa formi un angolo massimo di  $\pi/2$  rispetto alla verticale?

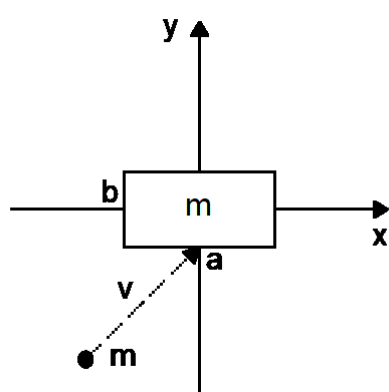
### Esercizio 11

Una piattaforma orizzontale rotante, costituita da un disco uniforme di massa  $2M$ , è montata su un asse verticale senza attrito passante per il suo centro. Due uomini, ognuno di massa  $M$ , sono in piedi sulle estremità opposte di un diametro. Gli uomini e la piattaforma sono inizialmente fermi. Successivamente gli uomini si mettono in moto camminando lungo la circonferenza nello stesso verso e con la stessa velocità. Calcolare l'angolo (rispetto al centro) che ognuno dei due ha percorso quando essi abbiano completato un giro della piattaforma.

### Esercizio 12

Due piccoli dischi identici, ognuno di massa  $m$ , giacciono su un piano orizzontale liscio. I dischi sono collegati da una molla leggera, a riposo, di lunghezza propria  $L_0$  e rigidezza  $k$ . Ad un certo momento uno dei dischi viene messo in moto in una direzione orizzontale, perpendicolare alla molla, con velocità  $V_0$ . Si definisca la elongazione della molla  $E$  come il rapporto tra il suo allungamento e la lunghezza a riposo ( $E = \Delta L / L_0$ ). Si trovi la massima elongazione della molla durante il moto nel problema dato, sapendo che  $E \ll 1$ .

### Esercizio 13



Una lastra rettangolare di lati  $a$  e  $b$  (vedi figura) e massa  $m$  giace ferma su un piano orizzontale senza attrito. Essa viene colpita al centro del lato lungo  $a$  da un proiettile di massa  $m$  che viaggia a velocità  $v$ , con un angolo di  $45^\circ$  rispetto al lato stesso. L'urto è completamente anelastico. Si descriva il moto del sistema dopo l'urto.

### Esercizio 14

Una sbarra uniforme di massa  $m = 5$  kg e lunghezza  $L = 90$  cm è in quiete, appoggiata su una superficie orizzontale liscia. Una delle sue estremità viene colpita con impulso  $J = 3$  N·s in direzione perpendicolare alla sbarra. Trovare la forza con cui ognuna delle due metà della sbarra (lunghezza  $L/2$ ) agisce sull'altra metà durante il moto successivo all'applicazione dell'impulso.

### Esercizio 15

Una sbarra orizzontale uniforme AB di massa  $m$  e lunghezza  $L$  può ruotare liberamente attorno ad un asse verticale  $OO'$  in presenza di gravità. L'estremità A si trova alla mezzzeria dell'asse  $OO'$ , il quale è alto  $H$ , ed orientato in modo che O sia l'estremità inferiore ed  $O'$  quella superiore. Mentre la sbarra è ferma, un proiettile, avente quantità di moto  $\mathbf{P}$  orizzontale e massa trascurabile, colpisce la sbarra perpendicolarmente ad essa, conficcandosi nell'estremità B. Si chiede di determinare:

- quanto vale l'impulso della reazione vincolare in O ed in  $O'$  durante l'urto;
- qual è la velocità angolare della sbarra dopo l'urto;
- quanto vale la componente orizzontale della reazione vincolare in O durante la rotazione successiva all'urto;
- per quale valore del modulo di  $\mathbf{P}$  tale componente orizzontale della reazione vincolare è nulla.

### Esercizio 16

Una sbarra uniforme di massa  $M$  e lunghezza  $L$  è sospesa e libera di ruotare attorno alla sua estremità superiore. Una pallottola di massa  $m$ , seguendo una traiettoria orizzontale, si conficca nella estremità inferiore della sbarra. Di conseguenza la sbarra si sposta dalla posizione verticale di un angolo  $\alpha$ . Sapendo che  $m \ll M$ , trovare:

- la velocità della pallottola;
  - la quantità di moto del sistema sbarra-pallottola prima dell'urto;
  - la quantità di moto del sistema sbarra-pallottola dopo l'urto;
- Se le risposte alle domande b) e c) sono diverse, allora:
- dire se la quantità di moto è diminuita o aumentata durante l'urto;
  - identificare la forza responsabile del cambiamento;
  - trovare a che distanza  $x$  dall'estremità superiore la pallottola dovrebbe colpire la sbarra perché la quantità di moto del sistema rimanga costante durante l'urto.

### Esercizio 17

Due masse identiche  $M$  sono collegate da un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza  $a$ ; il centro di massa di questo sistema a manubrio è fermo, rispetto ad uno spazio in cui non agisce la gravità, ed il sistema ruota con velocità angolare  $\omega$ .

Una delle masse rotanti colpisce una terza massa  $M$ , inizialmente ferma, che dopo l'urto le rimane attaccata.

- Localizzare la posizione del centro di massa del sistema dei tre corpi, nell'istante prima dell'urto, e determinare la sua velocità.
- Qual è il momento della quantità di moto del sistema dei tre corpi, rispetto al loro centro di massa, un istante prima dell'urto? Quanto vale un istante dopo?
- Qual è la velocità angolare del sistema attorno al centro di massa dopo l'urto?
- Quanto valgono le energie cinetiche iniziale e finale?

### Esercizio 18

Si immagina una pista da bowling, che è un piano orizzontale con attrito, in fondo alla quale invece dei birilli ci sia un piano verticale perfettamente liscio e perfettamente elastico. Se lanciate una palla da bowling sulla pista in modo che impatti contro il piano verticale a velocità  $V_0$ , a quale velocità vi arriva la palla tornando indietro?

### Esercizio 19

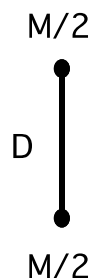
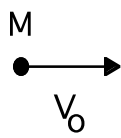
Una particella di massa  $m$  viene lanciata orizzontalmente con velocità  $V_0$  verso l'estremità inferiore di una asta verticale sottile e rigida, della stessa massa e lunghezza  $L$ . Tale asta è libera di ruotare intorno alla sua estremità superiore. Essa è stata ottenuta giungendo insieme due semiaste di lunghezza  $L/2$  di due materiali diversi, e la densità del materiale di cui è composta la semiasta superiore è  $1/4$  di quella della semiasta inferiore. L'urto tra particella e l'asta è totalmente anelastico. Trovare l'angolo massimo di deflessione dell'asta rispetto alla verticale.

### Esercizio 20

Una sottile lastra quadrata di lato  $L$  e massa  $M$  è libera di ruotare intorno ad un asse verticale coincidente con uno dei suoi lati. Un proiettile di massa  $m$  che ha velocità  $v$ , perpendicolare alla lastra, la colpisce elasticamente nel suo centro. Trovare:

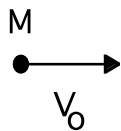
- la velocità  $v'$  del proiettile dopo l'urto;
- la componente orizzontale della forza che l'asse esercita sulla lastra dopo l'urto.

### Esercizio 21



Una pallina di massa  $M$  si muove con velocità  $V_0$ . Essa colpisce centralmente con un urto elastico una delle due sferette che compongono un manubrio (vedi figura). La massa di ognuna delle sferette del manubrio vale  $M/2$  ed il manubrio, di lunghezza  $D$ , è inizialmente fermo e perpendicolare rispetto a  $V_0$ . Si chiede di trovare il momento angolare  $L$  del manubrio dopo l'urto, assumendo come polo il centro di massa del manubrio stesso.

### Esercizio 22

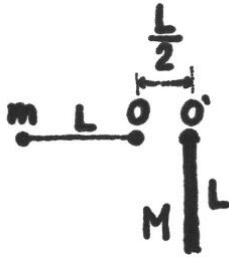


Una pallina di massa  $M$  si muove con velocità  $V_0$ . Essa colpisce centralmente una delle due sferette che compongono un manubrio, la massa di ognuna delle quali vale  $M/2$ . Il manubrio, completato da un'asta di massa trascurabile e lunghezza  $D$ , è inizialmente fermo e perpendicolare rispetto a  $V_0$ . L'urto è parzialmente anelastico, infatti viene perso solo il 50% dell'energia meccanica dissipabile nell'urto. Si chiede di trovare la velocità angolare del manubrio dopo l'urto

### Esercizio 23

Una sbarra uniforme, di massa  $M$  e lunghezza  $L$ , è incernierata alla sua estremità superiore ad un punto fisso  $O$ , rispetto al quale può ruotare liberamente. All'inizio la sbarra pende ferma, in posizione verticale. Ad essa viene poi applicato un impulso orizzontale  $P$  ad una distanza  $y$  dal punto di sospensione. Trovare il corrispondente impulso della reazione vincolare nel punto  $O$ , e discuterlo in funzione di  $y$ .

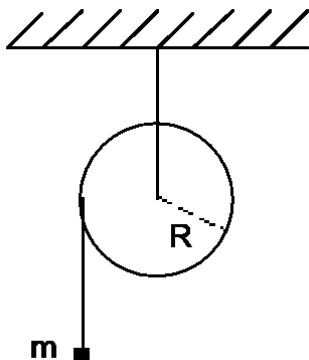
### Esercizio 24



Due perni  $O$  ed  $O'$  sono posti a distanza  $L/2$  sulla stessa retta orizzontale. Al perno  $O$  è legata una corda leggera ed inestensibile che porta una massa  $m$  alla sua estremità. Inizialmente la corda è tesa sulla stessa retta orizzontale di  $O$  ed  $O'$  tenendo ferma la massa  $m$ . Al polo  $O'$  è imperniata senza attrito un'asta omogenea di massa  $M$  e lunghezza  $L$ . Inizialmente l'asta è nella sua posizione di equilibrio stabile.

Si lascia libera di muoversi la massa  $m$  ed essa finisce per colpire l'asta urtandola in modo elastico. Si vuole sapere la velocità angolare dell'asta immediatamente dopo l'urto tra le due masse.

### Esercizio 25



Una corda sottile, leggera ed inestensibile è avvolta intorno ad una carrucola di raggio  $R$  e massa NON trascurabile. Un piccolo corpo di massa  $m$  è appeso all'estremità libera della corda. Il sistema è fermo, ed all'istante  $t=0$  viene lasciato libero di muoversi. Non c'è attrito sull'asse della carrucola. Trovare il momento angolare complessivo del sistema rispetto al centro della carrucola in funzione del tempo  $t$ .

### Esercizio 26

Un uomo di massa  $m_1$  si trova sul bordo di un disco orizzontale uniforme di massa  $m_2$  e raggio  $R$  che può ruotare liberamente intorno ad un asse verticale che passa per il suo centro. In un certo istante l'uomo inizia a muoversi lungo il bordo del disco. Egli percorre un angolo  $\varphi'$  relativamente al disco e poi si ferma. Durante il moto la velocità dell'uomo relativamente al disco varia con la legge  $v'(t)$ . Trovare:

- l'angolo di cui ha ruotato il disco quando l'uomo si ferma;
- il momento meccanico col quale l'uomo agisce sul disco durante il moto.

### Esercizio 27

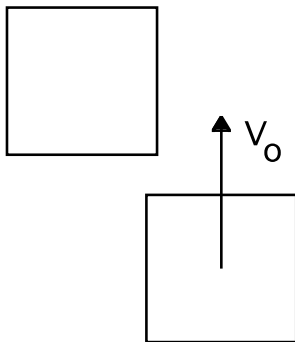
Un piccolo disco ed una sbarra sottile ed uniforme di lunghezza  $L$ , la cui massa è  $\eta$  volte maggiore di quella del disco, giacciono su un piano orizzontale. Il disco viene messo in moto, in direzione orizzontale e perpendicolare alla sbarra, con velocità  $v$ , dopodiché esso collide elasticamente con una estremità della sbarra. Trovare la velocità del disco e la velocità angolare della sbarra dopo l'urto. Per quale valore di  $\eta$  la velocità del disco dopo la collisione sarà zero? Per quali valori di  $\eta$  essa invertirà il verso iniziale?

### Esercizio 28

Il centro  $C$  di una sbarra sottile ed uniforme, di massa  $M$  e lunghezza  $D$ , è rigidamente fissato ad un asse verticale  $OO'$  in modo che l'angolo tra la sbarra e l'asse sia  $\theta$ . Le estremità dell'asse  $OO'$  sono provviste di cuscinetti. Il sistema ruota senza attrito intorno all'asse con velocità angolare  $\omega$ .

- Si calcolino modulo, direzione e verso del momento angolare del sistema, assumendo come polo il punto  $C$ .
- Si dica se esiste (ed in tal caso lo si trovi) almeno un altro polo rispetto al quale il momento angolare del sistema sia nullo.
- Si calcoli di quanto varia il momento angolare del sistema in mezzo giro.
- Si calcoli il momento meccanico totale delle forze vincolari che agiscono su  $OO'$ .

### Esercizio 29



Si abbiano due lastre quadrate di lato  $L$  e massa uguale su un piano orizzontale senza attrito. Una delle due è ferma. L'altra collide con la prima avendo una velocità iniziale  $V_0$  diretta come i lati, tra loro paralleli, delle due lastre (vedi figura). Il parametro d'impatto tra i due centri sia appena inferiore al lato di ognuna. L'urto tra le due lastre sia perfettamente elastico. Si vogliono conoscere, dopo l'urto, le velocità e le velocità angolari di ognuna delle due lastre. Quante volte si urtano le lastre, una o due volte?

### Esercizio 30

Un battitore di baseball colpisce con la mazza la palla tirata dal lanciatore. Sia la palla che la mazza si muovono nel piano orizzontale. La mazza, schematizzabile come una sbarra sottile ed uniforme di massa  $M$  e lunghezza  $L$ , viene tenuta dal battitore per una estremità. Durante la battuta le mani del battitore hanno velocità trascurabile. La palla ha massa  $m$  ed arriva con velocità  $V_0$ . L'urto tra mazza e palla è elastico ed avviene quando la mazza è perpendicolare alla traiettoria della palla.

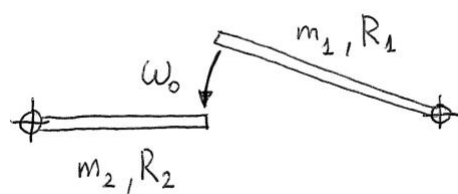
Il battitore vuole colpire la palla di modo che questa dopo l'urto abbia ancora velocità  $V_0$  (in modulo) e che le sue mani non subiscano nessun contraccolpo durante l'urto.

- quale velocità angolare deve dare il battitore alla mazza prima dell'urto?
- in quale posizione lungo la mazza deve avvenire l'urto?

### Esercizio 31

Un materasso (schematizzabile come parallelepipedo omogeneo) lungo 2 metri è appoggiato sulla sua rete. La distanza fra le gambe anteriori (ai piedi) e quelle posteriori (alla testa) della rete vale anch'essa 2 metri. Si solleva il lato anteriore del materasso, lasciando appoggiato alla rete il lato posteriore, dopodiché si lascia ricadere il materasso sulla rete e quello atterra in modo completamente anelastico. Nell'impatto (un istante molto breve) il contraccolpo sul pavimento delle gambe anteriori della rete vale 2.06 volte il contraccolpo delle gambe posteriori. Quanto è spesso il materasso?

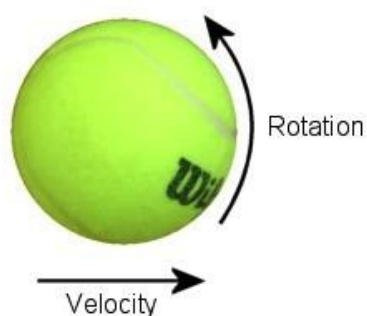
### Esercizio 32



Un'asta rigida, sottile ed uniforme, di massa  $m_1$  e lunghezza  $R_1$  è incernierata perpendicolarmente ad un asse verticale passante per una sua estremità. Inizialmente questa asta ruota intorno all'asse con velocità angolare  $\omega_0$ . Durante il moto la sua estremità urta contro l'estremità di un'altra sbarra simile alla prima. Questa è inizialmente ferma, ha massa  $m_2$ , lunghezza  $R_2$  ed anch'essa può ruotare sul piano orizzontale, intorno ad un asse verticale

passante per una sua estremità. L'urto tra le due sbarre è perfettamente elastico, ed avviene quando le due aste sono praticamente allineate. Si trovi la velocità angolare della seconda sbarra dopo l'urto.

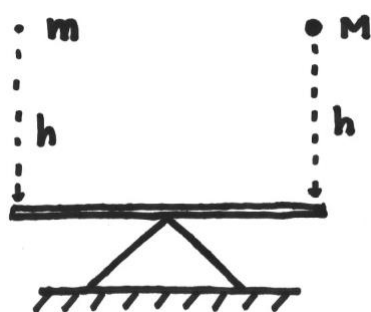
### Esercizio 33



Un giocatore di tennis colpisce la palla molto vicino a terra, mandandola verso il campo dell'avversario e dandole una traiettoria la quale direzione iniziale forma un angolo di  $45^\circ$  con l'orizzontale. Egli la colpisce inoltre con un effetto di backspin [rotazione all'indietro, vedi figura (da Wikipedia)] impartendole una velocità angolare  $\omega=5v/R$  (in modulo), dove  $v$  è la velocità ed  $R$  il raggio della palla. Il coefficiente di attrito, sia statico che dinamico, tra palla e terreno di gioco vale  $\mu=1$ . L'attrito dell'aria è trascurabile. Si assuma

che una palla da tennis sia un guscio sottile, vuoto al suo interno. Si vuole sapere quale sarà la direzione della traiettoria seguita dalla palla immediatamente dopo il rimbalzo nel campo dell'avversario.

### Esercizio 34



Si abbia una tavola molto leggera, rigida ed uniforme appoggiata orizzontalmente in equilibrio su un cuneo. Da una altezza  $h$  vengono fatte cadere 2 masse puntiformi  $m$  ed  $M$  sulla tavola, vicino alle sue estremità. Si supponga  $m < M$ . Gli urti tra le masse e la tavola sono perfettamente elastici.

Si discuta, sia per  $m$  che per  $M$ , se le masse puntiformi rimbalzano verso l'alto oppure no ed eventualmente si calcoli l'altezza massima raggiunta durante il rimbalzo.



### Esercizio 35

Un ventilatore è appoggiato su un piano. La sua parte immobile è un supporto verticale di massa  $M$  che sostiene il motore (supposto senza massa), chiamiamo  $P$  la posizione dell'asse del motore e sia  $H$  l'altezza di  $P$  rispetto al piano. C'è stato un incidente, attaccata all'asse del motore è rimasta solo una pala, di massa  $m$ . detto  $C$  il centro di massa della pala, si sa che la distanza tra  $P$  e  $C$  vale  $d$ .

Il motore fa girare l'unica pala a velocità angolare costante  $\omega$ . Si trascurino le forze dovute al moto dell'aria. Sia  $\theta$  l'angolo tra il segmento  $PC$  e la verticale.

- a) Si scriva il modulo della forza  $F$  applicata dal piano al ventilatore in funzione di  $\theta$
- b) Si trovino i valori di  $\theta$  per cui  $F$  è minima o massima
- c) Si trovino  $F_{\text{MIN}}$  e  $F_{\text{MAX}}$
- d) Si trovi il valore di  $\theta$  per cui  $F$  è uguale alla forza peso del ventilatore
- e) Detto  $z$  l'asse perpendicolare al piano del moto, si trovi la componente  $M_z$  del momento meccanico applicato dal piano alla base del ventilatore in funzione di  $\theta$
- f) Si trovino i valori di  $\theta$  per cui  $M_z$  ha valore massimo e minimo.