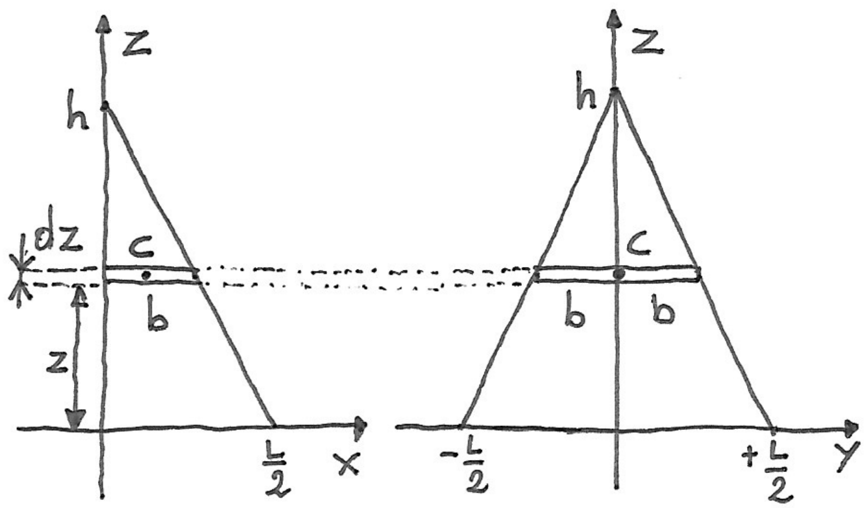

PRIMA DI TUTTO NOTIAMO CHE LA SIMMETRIA DELLA SEMI-PIRAMIDE NEL PIANO Y-Z IMPLICA CHE

$$Y_{CM} = 0$$

DOPODICHÈ SUDDIVIDIAMO IL SOLIDO IN QUESTIONE IN "FETTE" ORIZZONTALI DI SPESSORE INFINITESIMO dz E QUOTA z

OGNUNA DI QUESTE SEZIONI È UN PARALLELEPIPEDO AVENTE LATI b, $2b$ E dz E QUINDI MASSA (INFINITESIMA)

$dm = \rho\, dV = 2\rho b^2 dz$ DOVE b SI TROVA PER SIMILITUDINE FRA TRIANGOLI $b : \frac{L}{2} = (h-z) : h \Rightarrow b = \frac{L}{2h}(h-z)$

IL CENTRO DI MASSA DI OGNI SEZIONE È IL PUNTO C DI COORDINATE $x_c = b/2$, $z_c = z$ SI HA QUINDI

$$z_{CM} = \frac{\int z_c\, dm}{\int dm} = \frac{\cancel{2\rho}\int b^2 z\, dz}{\cancel{2\rho}\int b^2 dz} = \frac{\cancel{L^2/4h^2}\int_0^h (h^2 z + z^3 - 2hz^2)\, dz}{\cancel{L^2/4h^2}\int_0^h (h^2 + z^2 - 2hz)\, dz} =$$

$$= \frac{h^{\cancel{4}}}{\cancel{h^3}} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{\cancel{1} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{2}{2}}} = h\,\frac{\frac{1}{\cancel{12}}}{\frac{4}{\cancel{12}}} = \frac{h}{4}$$

$$x_{CM} = \frac{\int x_c\, dm}{\int dm} = \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{2\rho}}{\cancel{2\rho}}\,\frac{\int_0^h b^3 dz}{\int_0^h b^2 dz}$$

SI PUÒ SOSTITUIRE b COME PRIMA OPPURE CAMBIARE VARIABILE:

$db = -\frac{L}{2h} dz \Rightarrow dz = -\frac{2h}{L} db$

INOLTRE $z = 0 \Rightarrow b = L/2$

$z = h \Rightarrow b = 0$

QUINDI

$$x_{CM} = \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{\frac{2h}{L}}\int_0^{L/2} b^3 db}{\cancel{\frac{2h}{L}}\int_0^{L/2} b^2 db} = \frac{1}{2}\,\frac{\left[\frac{b^4}{4}\right]_0^{L/2}}{\left[\frac{b^3}{3}\right]_0^{L/2}} =$$

$$= x_{CM} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \frac{L^{\cancel{4}}}{16} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{L^3}} = \frac{3L}{16}$$

QUINDI $CM = \left(\frac{3L}{16}, 0, \frac{h}{4}\right)$