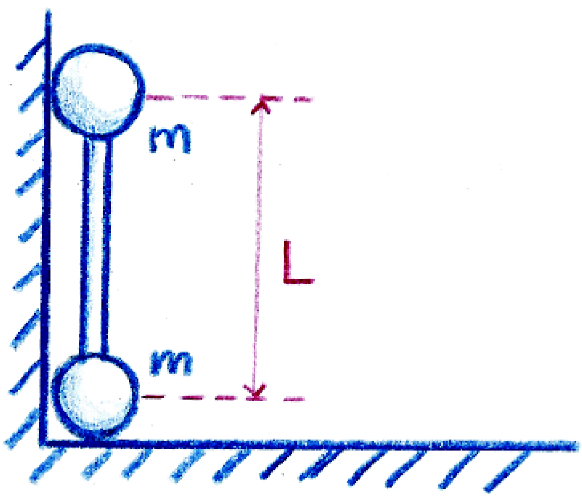
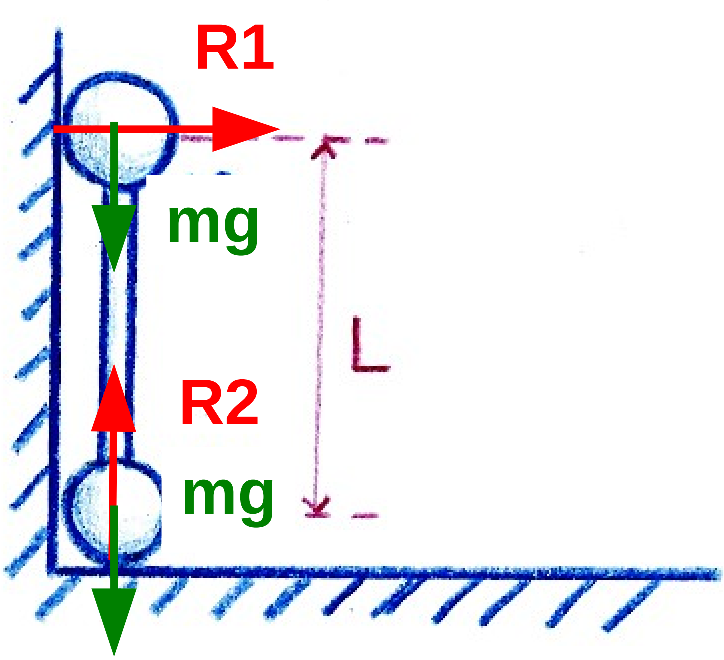
Esercizio 11



Un bilanciere è composto da due sfere di raggio trascurabile, ognuna di massa m, i cui centri sono mantenuti a distanza L da un'asta rigida, sottile e di massa trascurabile. Il bilanciere viene appoggiato da fermo in posizione verticale, su un pavimento orizzontale e a ridosso di una parete. Non c'è attrito tra le sfere ed il pavimento o la parete.

La sfera inferiore inizia a scivolare verso destra mentre quella superiore scivola verso il basso, mantenendo inizialmente il contatto con la parete. Si vuole sapere la velocità di ognuna delle due sfere nel momento in cui quella superiore si distacca dalla parete.

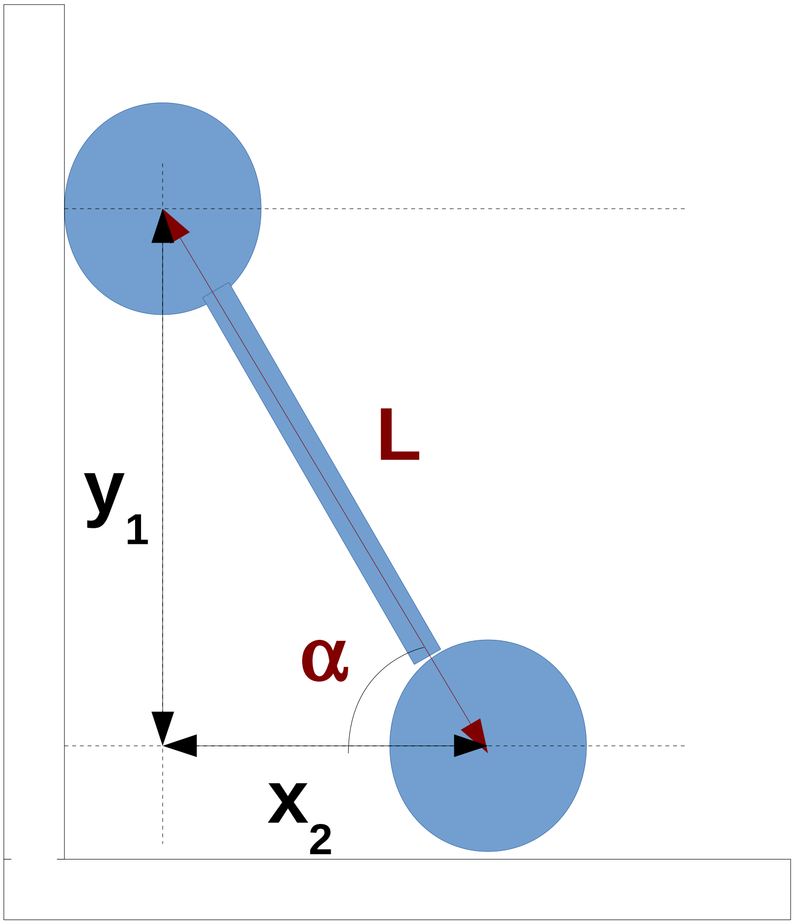
Suggerimento



Le uniche forze esterne sono la reazione R1 e R2 e la forza peso.

Dal momento in cui la sfera superiore si stacca dalla parete R1, che è l'unica forza orizzontale, si annulla e quindi il centro di massa ha accelerazione orizzontale nulla.

Relazioni geometriche



Coordinate:
(x_1,y_1) sfera superiore
(x_2,y_2) sfera inferiore

Relazioni geometriche:

$$y_1 = L sin\alpha$$

$$x_2 = L cos\alpha$$

Derivata prima delle relazioni geometriche:

$$\dot{y}_1 = L cos\alpha\dot{\alpha}$$

$$\dot{x}_2 = -L sin\alpha\dot{\alpha}$$

Derivata seconda delle relazioni geometriche:

$$\ddot{y}_1 = -L sin\alpha\dot{\alpha}^2 + L cos\alpha\ddot{\alpha}$$

$$\ddot{x}_2 = -L cos\alpha\dot{\alpha}^2 - L sin\alpha\ddot{\alpha}$$

Condizione per il distacco

L'accelerazione del centro di massa è data da:

$$\ddot{x}_{CM} = \frac{m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2}{m + m} = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2}$$

Fino al distacco la sfera 1 non si muove orizzontalmente: la sua velocità e la sua accelerazione lungo x sono nulle. Per cui:

$$\ddot{x}_{CM} = \frac{\ddot{x}_2}{2}$$

Al momento del distacco l'accelerazione orizzontale del centro di massa diventa nulla (perché non ci sono più forze esterne orizzontali) per cui anche:

$$\boxed{\ddot{x}_2 = -Lcos\alpha\dot{\alpha}^2 - Lsin\alpha\ddot{\alpha} = 0}$$

CONDIZIONE PER IL DISTACCO

Conservazione dell'energia meccanica

Siccome non ci sono forze dissipative si conserva l'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + mgy_1 = mgL$$

Avendo usato il fatto che la sfera 1 non ha velocità orizzontale e la sfera 2 non ha velocità verticale. Usando le espressioni trovate per le derivate delle relazioni geometriche si ha:

$$\dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 = L^2\dot{\alpha}^2$$

Sostituendo, insieme all'espressione per y_1, si trova:

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\alpha}^2 + mgLsin\alpha = mgL$$

$$\boxed{L\dot{\alpha}^2 = 2g(1 - sin\alpha)}$$

RELAZIONE TRA VELOCITA' ANGOLARE ED ANGOLO

Derivando:

$$2L\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -2gcos\alpha\dot{\alpha}$$

Da cui:

$$\boxed{\ddot{\alpha} = -\frac{g}{L}cos\alpha}$$

ACCELERAZIONE ANGOLARE

Angolo e velocità angolare al distacco

Sostituendo l'espressione della velocità angolare e dell'accelerazione angolare nella condizione trovata per il distacco si ha:

$$-2g(1 - sin\alpha)cos\alpha + gsin\alpha cos\alpha = 0$$

La soluzione cosα=0 è quella banale per cui il corpo non ha ancora cominciato a cadere.

Quella non banale si ottiene dividendo per cosα:

$$-2g(1 - sin\alpha) + gsin\alpha = g(3sin\alpha - 2) = 0$$

Da cui:

$$\boxed{sin\alpha = \frac{2}{3}}$$

SENO DELL'ANGOLO DI DISTACCO

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Dalla relazione tra velocità angolare e angolo, si trova:

$$\boxed{\dot{\alpha} = -\sqrt{\frac{2g}{L}(1 - sin\alpha)} = -\sqrt{\frac{2g}{3L}}}$$

VELOCITA' ANGOLARE AL DISTACCO

(e' negativa perché α diminuisce)

Velocità delle due sfere al distacco

Ricordando le derivate delle relazioni geometriche:

$$\dot{y}_1 = L cos\alpha\dot{\alpha}$$

$$\dot{x}_2 = -L sin\alpha\dot{\alpha}$$

Si ottiene in conclusione:

$$\boxed{\dot{x}_1 = 0 \ ; \ \dot{y}_1 = -\sqrt{\frac{10}{27}gL}}$$

SFERA SUPERIORE

$$\boxed{\dot{x}_2 = \sqrt{\frac{8}{27}gL} \ ; \ \dot{y}_2 = 0}$$

SFERA INFERIORE