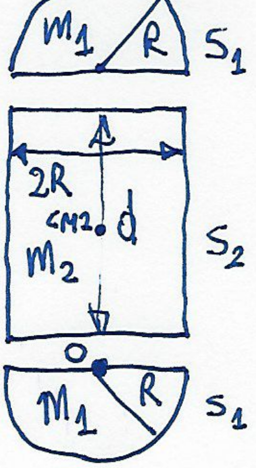


SUPERFICIE TOTALE $S = 2S_1 + S_2 = \pi R^2 + 2dR$

$S = R(\pi R + 2d)$

TROVIAMO LE MASSE, CHE SONO PROPORZIONALI ALLE SUPERFICI

$m_1 : S_1 = M : S \Rightarrow \quad m_1 = \dfrac{M \pi R^{\cancel{2}}}{2\cancel{R}(\pi R + 2d)}$

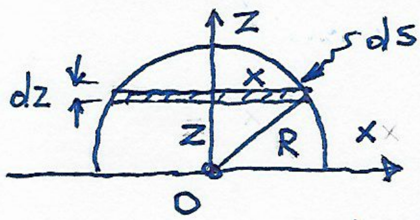
E ANALOGAMENTE

$$m_2 = \frac{M \cdot 2d\cancel{R}}{\cancel{R}(\pi R + 2d)}$$

→ LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA CM2 DELLA PARTE RETTANGOLARE È OVVIA, IL MOMENTO DI INERZIA DI UNA LASTRA RETTANGOLARE SI TROVA TABULATO:

$$I_{2_{CM}} = \frac{1}{12} m_2 \left((2R)^2 + d^2\right) = \frac{Md(4R^2 + d^2)}{6(\pi R + 2d)}$$

→ LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA DI UN SEMICERCHIO VA CALCOLATA TRAMITE INTEGRAZIONE:



SI HA $x = \sqrt{R^2 - z^2}$ E PRENDENDO LA SUPERFICIE INFINITESIMA dS, DI SPESSORE dz, A DISTANZA z DALL'ASSE x, CALCOLIAMO

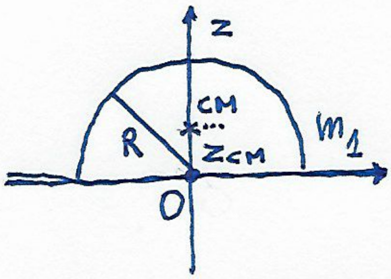
$$dS = 2x\, dz = 2\sqrt{R^2 - z^2}\, dz$$

PER LA DENSITÀ DI MASSA SUPERFICIALE DEL SEMICERCHIO SI HA

$\sigma = \dfrac{dm}{dS} = \dfrac{2m_1}{\pi R^2}$ E QUINDI $dm = \sigma\, dS = \dfrac{4m_1}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - z^2}\, dz$

$$z_{CM} = \frac{\int z\, dm}{m_1} = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R z\sqrt{R^2 - z^2}\, dz = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R \sqrt{R^2 - z^2} \cdot \frac{1}{2}\, d(z^2) =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{R^2} \sqrt{R^2 - t}\, dt \overset{u = R^2 - t}{=} \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{R^2} \sqrt{u}\, du = \frac{4R}{3\pi}$$



RICAVIAMO $I_{1_{CM}}$ COL TEOREMA DI STEINER

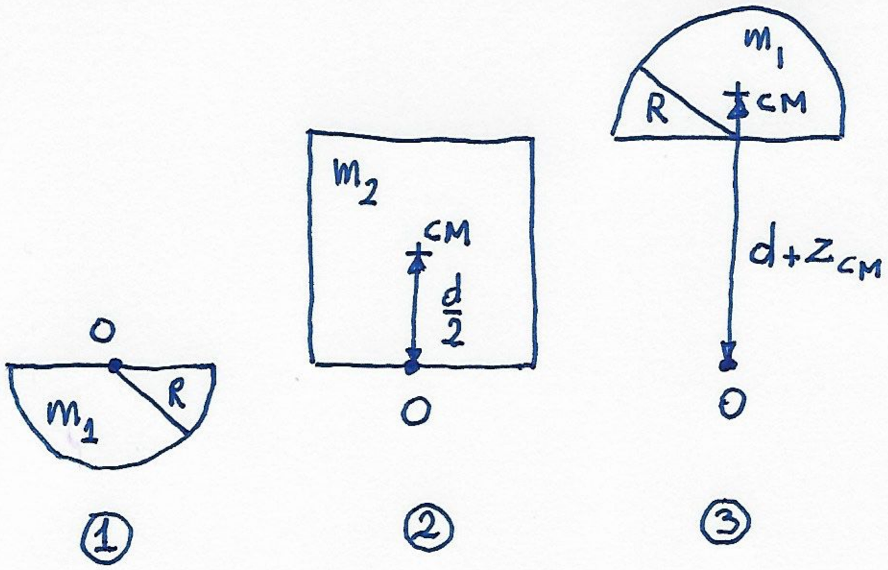
$$I_{1_O} = I_{1_{CM}} + m_1 z_{CM}^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 R^2 = I_{1_{CM}} + m_1 \cdot \frac{16R^2}{9\pi^2} \; ; \; I_{1_{CM}} = m_1 R^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)$$

METTIAMO ORA INSIEME TUTTE LE QUANTITÀ GIÀ RICAVATE PER CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DELLA LASTRA.

SI RICAVA IL TOTALE SOMMANDO IL CONTRIBUTO DI TRE PARTI

CONTINUA →



① $\quad I_{①} = I_{1_O} = \frac{1}{2} m_1 R^2 = \frac{M}{(\pi R + 2d)} \frac{\pi R^3}{4}$

② $\quad I_{②} = I_{2_{CM}} + m_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{Md(4R^2+d^2)}{6(\pi R + 2d)} + \frac{Md^3}{2(\pi R + 2d)} =$

$$= \frac{Md(4R^2 + d^2 + 3d^2)}{6(\pi R + 2d)} = \frac{M}{(\pi R + 2d)} \left[\frac{2dR^2}{3} + \frac{2d^3}{3} \right]$$

③ $\quad I_{③} = I_{1_{CM}} + (d + z_{CM})^2 m_1 = m_1 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{16R^2}{9\pi^2} \right) + m_1 \left(d + \frac{4R}{3\pi} \right)^2 =$

$$= \frac{M}{(\pi R + 2d)} \frac{\pi R}{2} \left[\frac{R^2}{2} - \cancel{\frac{16R^2}{9\pi^2}} + d^2 + \cancel{\frac{16R^2}{9\pi^2}} + \frac{8dR}{3\pi} \right] =$$

$$= \frac{M}{(\pi R + 2d)} \left[\frac{\pi R^3}{4} + \frac{\pi R d^2}{2} + \frac{4dR^2}{3} \right]$$

IL MOMENTO D'INERZIA TOTALE VALE $I_O = I_{①} + I_{②} + I_{③}$

$$I_O = \frac{M}{(\pi R + 2d)} \left[\frac{\pi R^3}{4} + \frac{2dR^2}{3} + \frac{2d^3}{3} + \frac{\pi R^3}{4} + \frac{\pi R d^2}{2} + \frac{4R^2 d}{3} \right] =$$

$$= \frac{M}{(\pi R + 2d)} \left[\frac{6\pi R^3 + 24R^2 d + 6\pi R d^2 + 8d^3}{12} \right] =$$

$$= \frac{M}{6(\pi R + 2d)} (3\pi R^3 + 12R^2 d + 3\pi R d^2 + 4d^3)$$