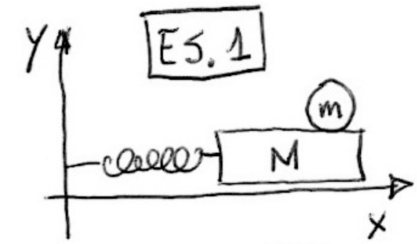
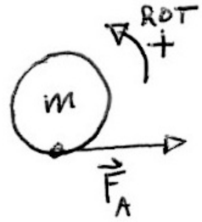
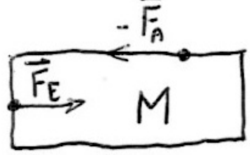
ES. 1



SI DISEGNI IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO PER I DUE CORPI. IN QUESTO CASO CI SI PUÒ LIMITARE ALLE SOLE FORZE ORIZZONTALI





DOVE $\vec{F}_E$ = FORZA ELASTICA (MOLLA)

$\pm\vec{F}_A$ = FORZA DI ATTRITO (STATICO)

$\underset{+}{ROT}$ = SENSO POSITIVO ROTAZIONE m

SIA X LA POSIZIONE DI M (RISPETTO POS. DI RIPOSO DELLA MOLLA)

" x " " " m

" θ L'ANGOLO DI ROTAZIONE DI m

PER LA CONDIZIONE DI ROTOLAMENTO SI PUÒ SCRIVERE:

$$x = X - R\theta \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{X} - R\ddot{\theta}$$

SI PUÒ ORA SCRIVERE IL SISTEMA DI EQUAZIONI RICHIESTO IMPOSTANDO LA 1ª EQ CARDINALE PER M E LA 1ª+2ª EQ. CARD. PER m

$$\boxed{a) \quad \begin{cases} (1) & -KX - F_A = M\ddot{X} \\ (2) & F_A = m\ddot{x} \\ (3) & F_A R = \frac{2}{5} m R^2 \ddot{\theta} \\ (4) & \ddot{x} = \ddot{X} - R\ddot{\theta} \end{cases}}$$

DALLA (2)+(3) $\Rightarrow R\ddot{\theta} = \frac{5}{2}\ddot{x}$

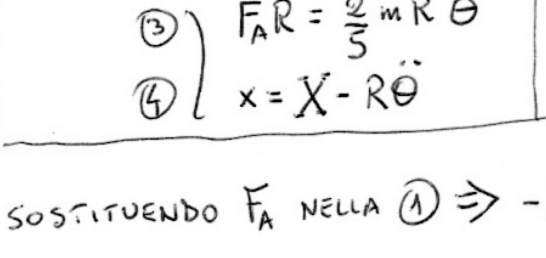
CHE INSERITA NELLA (4) $\Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{7}\ddot{X}$ (★)

CHE INSERITA NELLA (2) $\Rightarrow F_A = \frac{2}{7} m \ddot{X}$

SOSTITUENDO F_A NELLA (1) $\Rightarrow -KX - \frac{2m}{7}\ddot{X} = M\ddot{X} \Rightarrow$ $\boxed{b)\ \ddot{X} + \frac{7K}{2m+7M} X = 0}$

SI HA QUINDI UN MOTO ARMONICO DI PULSAZIONE $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{7K}{2m+7M}}}$

INTEGRANDO 2 VOLTE L'EQ. (★) SI HA $x = \frac{2}{7}X \Rightarrow$ QUINDI ANCHE LA SFERA COMPIE OSCILLAZIONI CON LA STESSA ω DELLA SLITTA. SFRUTTANDO QUESTA RELAZIONE, LA SIMMETRIA DEL MOTO ARMONICO E IMPONENDO CHE LA SFERA POSSA ARRIVARE AL BORDO DELLA SLITTA



POSIZIONE CENTRALE DELLE OSCILLAZIONI

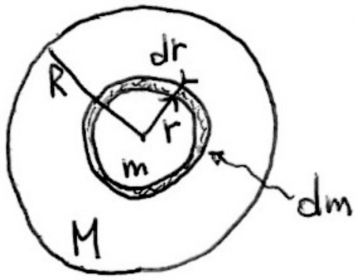
" ESTREMA " "

X_{MAX} = AMPIEZZA OSCILLAZIONI SLITTA

x_{MAX} = " " SFERA

SI HA $\begin{cases} x_{MAX} + \frac{L}{2} = X_{MAX} \\ x_{MAX} = \frac{2}{7} X_{MAX} \end{cases} \Rightarrow \boxed{c)\ X_{MAX} = \frac{7}{10} L}$

ES. 2



SIA $r<R$ IL RAGGIO DELLA TERRA IN UN ISTANTE GENERICO DURANTE LA SUA FORMAZIONE, ESSENDO $m<M$ LA SUA MASSA IN QUELL'ISTANTE

SI HA $m = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3M}{4\pi R^3}\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{M}{R^3} r^3$

E QUINDI $dm = \frac{dm}{dr} dr = \frac{3M}{R^3} r^2 dr$

LA PERDITA DI ENERGIA POTENZIALE DI UNA MASSA dm CHE PRECIPITA DALL'INFINITO FINO AL RAGGIO r NEL CAMPO GRAVITAZIONALE DI UNA MASSA m VALE ALLORA

$$-dU = \frac{G\,m\,dm}{r} = \frac{G}{r}\cdot\frac{M}{R^3}r^3\cdot\frac{3M}{R^3}r^2 dr = \frac{3GM^2}{R^6}r^4 dr$$

ED INTEGRANDO

$$-\Delta U = \frac{3GM^2}{R^6}\int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = \boxed{2.24\ 10^{32}\ \text{JOULE}}$$

L'ATTUALE ENERGIA DI ROTAZIONE DELLA TERRA VALE

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}MR^2\left(\frac{2\pi}{1\ \text{GIORNO}}\right)^2 = \boxed{2.56\ 10^{29}\ \text{JOULE}}$$

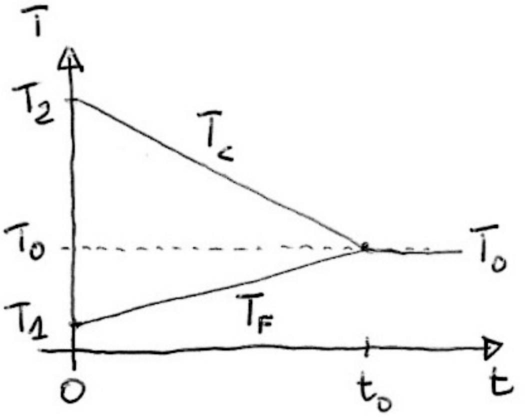
MENTRE LA SUA ENERGIA TERMICA

$$E = cMT = \boxed{1.2\ 10^{31}}$$

CONCLUSIONE: L'ENERGIA INIZIALE DI FORMAZIONE DELLA TERRA È STATA QUASI TUTTA DISSIPATA, EVIDENTEMENTE IRRAGGIATA VERSO LO SPAZIO FREDDO. NE RIMANE $\sim 1/20$ COME CALORE INTERNO E QUASI NIENTE COME ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE

ES. 3

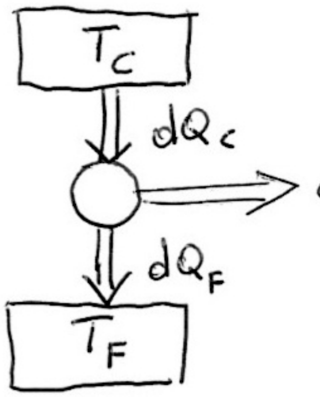
SIA $T_2 > T_1$



IL CORPO CALDO AVRÀ TEMPERATURA T_C CHE DIMINUIRÀ DA T_2 FINO A T_0 (TEMP. DI EQUILIBRIO)

IL CORPO FREDDO AVRÀ TEMPERATURA T_F CHE CRESCERÀ DA T_1 A T_0

IN OGNI ISTANTE (FINO A t_0) SI PUÒ SFRUTTARE LA DIFFERENZA DI TEMPERATURA TRA T_C E T_F PER COMPIERE UN LAVORO. SE NE CONSIDERI L'EFFETTO IN UN TEMPO INFINITESIMO dt



IL LAVORO MASSIMO SI AVRÀ CON UNA MACCHINA DI CARNOT, PER LA QUALE

$$1-\frac{|dQ_F|}{|dQ_C|} = 1-\frac{T_F}{T_C} \Rightarrow \frac{|dQ_F|}{|dQ_C|} = \frac{T_F}{T_C} \Rightarrow \frac{|dQ_F|}{T_F} = \frac{|dQ_C|}{T_C} \Rightarrow -\cancel{C}\frac{dT_F}{T_F} = \cancel{C}\frac{dT_C}{T_C}$$

INTEGRANDO
$$-\int_{T_1}^{T_0}\frac{dT_F}{T_F} = \int_{T_2}^{T_0}\frac{dT_C}{T_C} \Rightarrow \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{T_0}{T_2}\right) \Rightarrow T_0^2 = T_1 T_2$$

$$\Downarrow$$

$$T_0 = \sqrt{T_1 T_2}$$

IL LAVORO SVOLTO VALE ALLORA

$$W = |Q_C| - |Q_F| = C(T_2 - T_0) - C(T_0 - T_1) = C\left[T_2 + T_1 - 2T_0\right] =$$

$$W = C\left(T_2 + T_1 - 2\sqrt{T_1 T_2}\right)$$