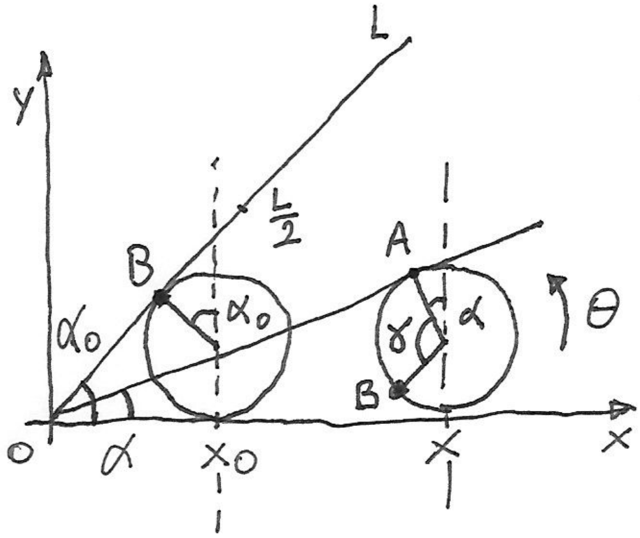
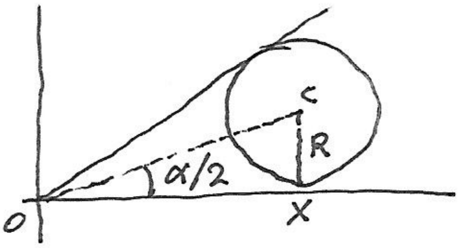


DETTA x LA COORDINATA DELLA SFERA, α L'INCLINAZIONE DELLA TAVOLA E θ L'ANGOLO DI ROTAZIONE DELLA SFERA INTORNO AL SUO CENTRO, SI PUÒ SCRIVERE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA IN QUANTO NON SONO PRESENTI FORZE DISSIPATIVE

$$Mg\frac{L}{2}\sin\alpha_0 = Mg\frac{L}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\dot{\theta}^2 \quad (1)$$

PER QUANTO RIGUARDA L'ANGOLO α SI TROVA CHE $\quad tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R}{x}$



QUINDI

$$\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{R}{x}\right), \quad \dot{\alpha} = -\frac{2R\dot{x}}{(x^2+R^2)} \quad (2)$$

PER θ, DALLA FIGURA SI DEDUCE CHE $\overline{OB} = x_0$ E $\overline{OA} = x$ QUINDI LA DISTANZA ROTOLATA LUNGO LA TAVOLA VALE $x - x_0$ DETTO γ L'ANGOLO DI ROTOLAMENTO SI HA $R\gamma = x - x_0$ L'ANGOLO θ È INVECE LA ROTAZIONE ASSOLUTA DI OGNI PUNTO DELLA SFERA, PER ESEMPIO B. SI HA CIOÈ

$$\theta = (\alpha + \gamma) - \alpha_0 \quad \text{QUINDI} \quad R\dot{\theta} = R\dot{\alpha} + R\dot{\gamma} = R\dot{\alpha} + \dot{x}$$

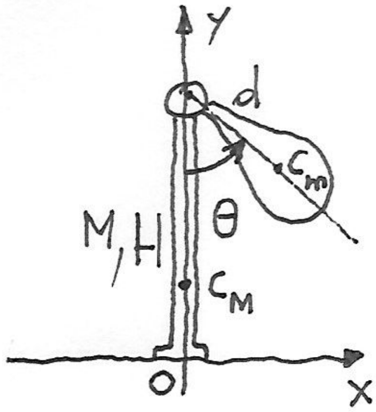
SOSTITUENDO $\dot{\alpha}$

$$R\dot{\theta} = -\frac{2R^2\dot{x}}{(x^2+R^2)} + \dot{x}, \quad R\dot{\theta} = \frac{(x^2-R^2)}{(x^2+R^2)}\dot{x} \quad (3)$$

LA (1), (2) E (3) COSTITUISCONO UN SISTEMA COMPLETO DI EQ PER RISOLVERE IL PROBLEMA

OPZIONALE_
SOSTITUENDO E CON UN PO' DI TRIGONOMETRIA SI PUÒ ARRIVARE ALLA FORMA INTEGRABILE:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{30MgLR\left(\frac{x_0}{x_0^2+R^2} - \frac{x}{x^2+R^2}\right)(x^2+R^2)^2}{20ML^2R^2 + 15m(x^2+R^2)^2 + 6m(x^2-R^2)^2}}$$



SIA C_{TOT} IL CENTRO DI MASSA DI TUTTO IL SISTEMA $M+m$, $\vec{r}_{C_{TOT}} \equiv (X_{C_{TOT}}, Y_{C_{TOT}})$

SIA C_M IL CENTRO DI MASSA DEL SUPPORTO, $\vec{r}_{C_M} \equiv (X_{C_M}, Y_{C_M}) \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{C_M} = 0 \quad \ddot{\vec{r}}_{C_M} = 0$

SIA C_m IL CENTRO DI MASSA DELLA PALA

$\vec{r}_{C_m} \equiv (X_{C_m}, Y_{C_m})$

$$\begin{cases} X_{C_m} = d\sin\theta \\ Y_{C_m} = H - d\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X}_{C_m} = d\omega\cos\theta \\ \dot{Y}_{C_m} = d\omega\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{X}_{C_m} = -d\omega^2\sin\theta \\ \ddot{Y}_{C_m} = d\omega^2\cos\theta \end{cases}$$

- APPLICHIAMO LA 1ª EQ CARDINALE A TUTTO IL SISTEMA. LE FORZE ESTERNE SONO $\vec{F}$ (L'INCOGNITA) E $(M+m)\vec{g}$

$\vec{F} + (M+m)\vec{g} = (M+m)\ddot{\vec{r}}_{C_{TOT}} = \cancel{M\ddot{\vec{r}}_{C_M}} + m\ddot{\vec{r}}_{C_m}$ CHE PROIETTATA SUI DUE ASSI DIVENTA

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{X}_{C_m} = -md\omega^2\sin\theta \\ F_y - (M+m)g = m\ddot{Y}_{C_m} \Rightarrow F_y = (M+m)g + md\omega^2\cos\theta \end{cases}$$

a) $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(M+m)^2 g^2 + m^2 d^2 \omega^4 + 2(M+m)md\omega^2\cos\theta\, g}$

c+b) $\theta = 0 \quad F_{MAX} = (M+m)g + md\omega^2 \quad \theta = \pi \quad F_{MIN} = (M+m)g - md\omega^2$

d) $2(M+m)md\omega^2\cos\theta = -m^2 d^2\omega^4 \Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{md\omega^2}{2(M+m)g}$

SCRIVIAMO IL MOMENTO ANGOLARE DEL SISTEMA RISPETO AD O

$L_z = (\cancel{\vec{r}_{C_M} \times M\dot{\vec{r}}_{C_M}})_z + (\vec{r}_{C_m} \times m\dot{\vec{r}}_{C_m})_z = m(X_{C_m}\dot{Y}_{C_m} - Y_{C_m}\dot{X}_{C_m})$

$L_z = m(d\sin\theta \cdot d\omega\sin\theta - (H - d\cos\theta)d\omega\cos\theta) = m(d^2 - Hd\cos\theta)\omega$

- APPLICHIAMO LA 2ª EQ CARDINALE A TUTTO IL SISTEMA. I MOMENTI MECCANICI ESTERNI SONO M_z (L'INCOGNITÀ) E LA GRAVITÀ SULLA PALA.

$M_z - mgd\sin\theta = \dfrac{dL_z}{dt} \qquad M_z = mgd\sin\theta + m\omega^2 dH\sin\theta$ QUINDI

e) $M_z = md\sin\theta(g + \omega^2 H)$ f) MAX E MIN PER $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

SIANO L_f CALORE LATENTE ACQUA/GHIACCIO

c_G CALORE SPECIFICO DEL GHIACCIO

c_A CALORE SPECIFICO DELL' ACQUA

ρ_G DENSITÀ DEL GHIACCIO

ρ_A DENSITÀ DELL'ACQUA

L'ACQUA CALDA CEDE CALORE PER RISCALDARE E SCIOGLIERE IL GHIACCIO. TANTO CALORE VIENE CEDUTO DALL' ACQUA QUANTO NE VIENE RICEVUTO DAL GHIACCIO. SE Δm_A E Δm_G SONO LE MASSE COINVOLTE

$$\Delta m_A c_A T_A = \Delta m_G c_G (-T_G) + \Delta m_G L_f$$

RICORDIAMO CHE $T_G < 0$

DIVIDIAMO PER Δt

$$\frac{\Delta m_A}{\Delta t} c_A T_A = \frac{\Delta m_G}{\Delta t} (L_f - c_G T_G)$$

ORA $\frac{\Delta m_A}{\Delta t} = I_m = \rho_A I_V$ $\qquad \frac{\Delta m_G}{\Delta t} = \rho_G \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho_G \pi R^2 \frac{dh}{dt} = \rho_G \pi R^2 v$

QUINDI

$$I_V = \frac{\rho_G \pi R^2 v (L_f - c_G T_G)}{\rho_A c_A T_A}$$