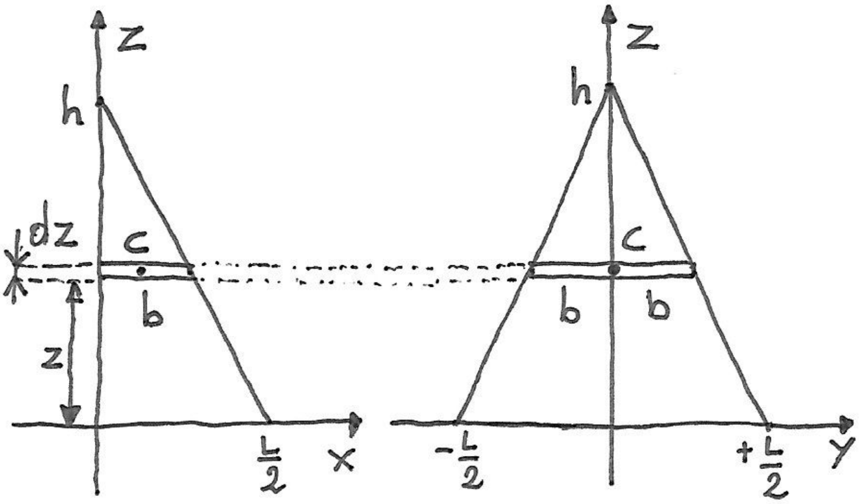


PRIMA DI TUTTO NOTIAMO CHE LA SIMMETRIA DELLA SEMI-PIRAMIDE NEL PIANO Y-Z IMPLICA CHE

$$y_{CM} = 0$$

DOPODICHÈ SUDDIVIDIAMO IL SOLIDO IN QUESTIONE IN "FETTE" ORIZZONTALI DI SPESSORE INFINITESIMO dZ E QUOTA Z

OGNUNA DI QUESTE SEZIONI È UN PARALLELEPIPEDO AVENTE LATI b, 2b E dz E QUINDI MASSA (INFINITESIMA)

$dm = \rho\, dV = 2\rho b^2 dz$ DOVE b SI TROVA PER SIMILITUDINE FRA TRIANGOLI $b : \frac{L}{2} = (h-z) : h \Rightarrow b = \frac{L}{2h}(h-z)$

IL CENTRO DI MASSA DI OGNI SEZIONE È IL PUNTO C DI COORDINATE $x_c = b/2$, $z_c = z$ SI HA QUINDI

$$z_{CM} = \frac{\int z_c\, dm}{\int dm} = \frac{\cancel{2\rho} \int b^2 z\, dz}{\cancel{2\rho} \int b^2 dz} = \frac{\cancel{L^2/4h^2} \int_0^h (h^2 z + z^3 - 2hz^2)\, dz}{\cancel{L^2/4h^2} \int_0^h (h^2 + z^2 - 2hz)\, dz} =$$

$$= \frac{h^{\cancel{4}}}{\cancel{h^3}} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{\cancel{1} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{2}{2}}} = h \frac{\frac{1}{\cancel{12}}}{\frac{4}{\cancel{12}}} = \frac{h}{4}$$

$$x_{CM} = \frac{\int x_c\, dm}{\int dm} = \frac{1}{2} \frac{\cancel{2\rho}}{\cancel{2\rho}} \frac{\int_0^h b^3 dz}{\int_0^h b^2 dz}$$

SI PUÒ SOSTITUIRE b COME PRIMA OPPURE CAMBIARE VARIABILE:

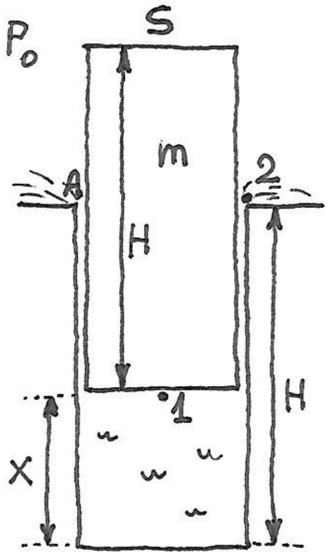
$db = -\frac{L}{2h} dz \Rightarrow dz = -\frac{2h}{L} db$

INOLTRE $z=0 \Rightarrow b = L/2$
$z = h \Rightarrow b = 0$
QUINDI

$$x_{CM} = \frac{1}{2} \frac{\cancel{\frac{2h}{L}} \int_0^{L/2} b^3 db}{\cancel{\frac{2h}{L}} \int_0^{L/2} b^2 db} = \frac{1}{2} \frac{\left[\frac{b^4}{4}\right]_0^{L/2}}{\left[\frac{b^3}{3}\right]_0^{L/2}} =$$

$$= x_{CM} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \frac{L^{\cancel{4}}}{16} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{L^3}} = \frac{3L}{16}$$

QUINDI $CM = \left(\frac{3L}{16}, 0, \frac{h}{4}\right)$



CHIAMIAMO S LA SUPERFICIE DI BASE DEL CILINDRO $S = \pi R^2$. CHIAMIAMO A LA SUPERFICIE DELLA CORONA CIRCOLARE DI FUORIUSCITA DEL LIQUIDO $A = \pi (R+\Delta R)^2 - \pi R^2 \approx 2\pi R \Delta R$ (IL TERMINE IN ΔR^2 È TRASCURABILE)

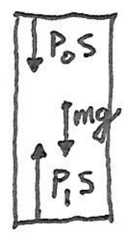
SIA 1 UN PUNTO DEL LIQUIDO DIRETTAMENTE A CONTATTO COL CILINDRO, SIA 2 UN PUNTO DEL LIQUIDO ALL'USCITA DEL FORO.

PER CONSERVAZIONE DELLA PORTATA

$$S \cdot V_1 = A \cdot V_2 \Rightarrow V_1 = V_2 \frac{A}{S} \simeq V_2 \cdot 2\frac{\Delta R}{R} << V_2$$

CIOÈ V_1 È MOLTO PICCOLA

ESAMINIAMO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO PER IL CILINDRO. SI HA $[m = \rho_S H S]$



$$mg + P_0 S - P_1 S = ma \Rightarrow P_1 = P_0 + \rho_S H (g - a)$$

MA $a = \dfrac{dV_1}{dt}$ E SE V_1 È MOLTO PICCOLA ANCHE a SARÀ MOLTO PICCOLA E QUINDI TRASCURABILE RISPETTO A g QUINDI $P_1 \approx P_0 + \rho_S g H$. PRENDIAMO QUOTA=0 IN FONDO AL FORO E APPLICHIAMO BERNOULLI TRA 1 E 2

$$P_0 + \rho_S g H + \rho_L g X + \cancel{\frac{1}{2}\rho_L V_1^2} = P_0 + \rho_L g H + \frac{1}{2}\rho_L V_2^2 \quad \text{CIOÈ}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g}{\rho_L}\left[H(\rho_S - \rho_L) + \rho_L X\right]} \Rightarrow V_1 = 2\frac{\Delta R}{R} V_2 = \frac{2\Delta R}{R}\sqrt{\frac{2g}{\rho_L}\left[H(\rho_S - \rho_L) + \rho_L X\right]}$$

$$\text{MA } V_1 = -\frac{dX}{dt} \Rightarrow dt = -\frac{dX}{V_1} \Rightarrow \int_0^T dt = \frac{R}{2\Delta R}\sqrt{\frac{\rho_L}{2g}} \int_0^H \frac{dx}{\sqrt{H(\rho_S - \rho_L) + \rho_L X}}$$

CAMBIAMO VARIABILE $u = H(\rho_S - \rho_L) + \rho_L X \Rightarrow du = \rho_L dx$ E SOSTITUENDO ANCHE GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE SI OTTIENE

$$T = \frac{R}{2\Delta R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\rho_L g}} \int_{H(\rho_S - \rho_L)}^{H\rho_S} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{R}{\cancel{2}\Delta R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\rho_L g}} \cancel{2} \left[\sqrt{u}\right]_{H(\rho_S - \rho_L)}^{H\rho_S} =$$

$$= T = \frac{R}{\Delta R \sqrt{2\rho_L g}} \left(\sqrt{H\rho_S} - \sqrt{H(\rho_S - \rho_L)}\right) \Rightarrow T = \frac{R}{\Delta R}\sqrt{\frac{H}{2g}}\left(\sqrt{\frac{\rho_S}{\rho_L}} - \sqrt{\frac{\rho_S}{\rho_L} - 1}\right)$$

E RISOLVENDO IN ΔR SI OTTIENE IL RISULTATO VOLUTO

$$\Delta R = \frac{R}{T}\sqrt{\frac{H}{2g}}\left(\sqrt{\frac{\rho_S}{\rho_L}} - \sqrt{\frac{\rho_S}{\rho_L} - 1}\right)$$

1ª DOMANDA

PER LA SECONDA ARMONICA SU UNA CORDA LUNGA L TESA FRA ESTREMITÀ FISSE SI HA

$$f = 2\frac{v}{2L} \quad \text{CON} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

COMBINANDO QUESTE DUE EQUAZIONI SI OTTIENE

$$\mu = \frac{T}{f^2 L^2} = 2.8\ 10^{-3}\ \frac{Kg}{m} = 2.8\ 10^{-2}\ \frac{g}{cm}$$

2ª DOMANDA - METODO 1

UN'ONDA STAZIONARIA PUÒ ESSERE SCOMPOSTA IN UN'ONDA PROGRESSIVA ED UNA REGRESSIVA INDIPENDENTI E DI AMPIEZZA PARI A METÀ DI QUELLA INIZIALE

$$A\sin(Kx)\cos(\omega t) = \frac{A}{2}\sin(Kx-\omega t) + \frac{A}{2}\sin(Kx+\omega t)$$

TENENDO PRESENTE CHE PER OGNUNA DELLE DUE SI HA $\Delta E = 1/2\ \mu\omega^2 A^2 \Delta x$ SCRIVIAMO L'ENERGIA DELL'ONDA STAZIONARIA COME SOMMA DELL'ENERGIA DELLE DUE COMPONENTI

$$E = 2\cdot\frac{1}{2}\mu\omega^2\left(\frac{A}{2}\right)^2 L = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 L = 1.4\ 10^{-3}\ J$$

DOVE SI È USATO $\omega = 2\pi f$

2ª DOMANDA - METODO 2

IN OGNI OSCILLAZIONE MECCANICA L'ENERGIA TOTALE È ANCHE UGUALE AL VALORE MASSIMO DELL'ENERGIA CINETICA

$y = A\sin(Kx)\cos(\omega t)$ DERIVIAMO RISPETTO AL TEMPO

$\dot{y} = -\omega A\sin(Kx)\sin(\omega t)$ SCRIVIAMO L'ENERGIA CINETICA

$$K = \int\frac{1}{2}v^2 dm = \frac{1}{2}\mu\int_0^L \dot{y}^2 dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2(\omega t)\int_0^L \sin^2(Kx)\,dx$$

IL VALORE MASSIMO SI HA OVVIAMENTE NEGLI ISTANTI IN CUI $\sin^2(\omega t) = 1$, PER CUI

$$E = K_{MAX} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\int_0^L \sin^2(kx)\,dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\frac{1}{K}\int_0^{KL}\sin^2(u)\,du$$

RICORDIAMO CHE $K = 2\pi/\lambda$ CON $\lambda = 2L/n$ DOVE n È IL NUMERO DI ARMONICA (IN QUESTO CASO $n=2$). QUINDI $K = \pi n/L$

$$E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\frac{L}{\pi n}\int_0^{\pi n}\sin^2(u)\,du$$

L'INTEGRALE NELLA FORMULA È UN INTEGRALE NOTEVOLE. SI RISOLVE CON LA SOSTITUZIONE TRIGONOMETRICA $\sin^2(u) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(u)}{2}$ E VALE $\int_0^{n\pi}\sin^2(u)\,du = \frac{n\pi}{2}$

E QUINDI $E = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 L = 1.4\ 10^{-3}\ J$