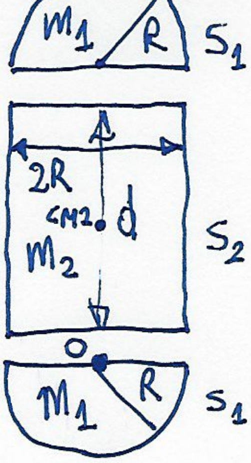


SUPERFICIE TOTALE $S = 2S_1 + S_2 = \pi R^2 + 2dR$

$S = R(\pi R + 2d)$

TROVIAMO LE MASSE, CHE SONO PROPORZIONALI ALLE SUPERFICI

$m_1 : S_1 = M : S \Rightarrow \quad m_1 = \dfrac{M \pi R^{\cancel{2}}}{2 \cancel{R} (\pi R + 2d)}$

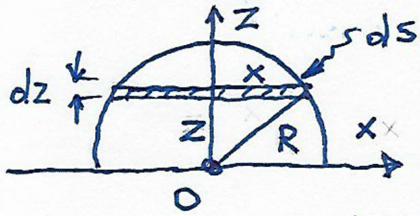
E ANALOGAMENTE

$m_2 = \dfrac{M \cdot 2d\cancel{R}}{\cancel{R}(\pi R + 2d)}$

→ LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA CM2 DELLA PARTE RETTANGOLARE È OVVIA, IL MOMENTO DI INERZIA DI UNA LASTRA RETTANGOLARE SI TROVA TABULATO:

$$I_{2_{CM}} = \frac{1}{12} m_2 \left((2R)^2 + d^2\right) = \frac{Md(4R^2 + d^2)}{6(\pi R + 2d)}$$

→ LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA DI UN SEMICERCHIO VA CALCOLATA TRAMITE INTEGRAZIONE:



SI HA $x = \sqrt{R^2 - z^2}$ E PRENDENDO LA SUPERFICIE INFINITESIMA dS, DI SPESSORE dz, A DISTANZA z DALL'ASSE x, CALCOLIAMO

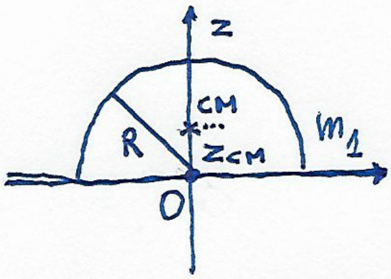
$dS = 2x\,dz = 2\sqrt{R^2 - z^2}\,dz$

PER LA DENSITÀ DI MASSA SUPERFICIALE DEL SEMICERCHIO SI HA

$\sigma = \dfrac{dm}{dS} = \dfrac{2m_1}{\pi R^2}$ E QUINDI $dm = \sigma\,dS = \dfrac{4m_1}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - z^2}\,dz$

$$z_{CM} = \frac{\int z\,dm}{m_1} = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R z\sqrt{R^2 - z^2}\,dz = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R \sqrt{R^2 - z^2} \cdot \frac{1}{2}\,d(z^2) =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{R^2} \sqrt{R^2 - t}\,dt \overset{u = R^2 - t}{=} \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{R^2} \sqrt{u}\,du = \frac{4R}{3\pi}$$



RICAVIAMO $I_{1_{CM}}$ COL TEOREMA DI STEINER

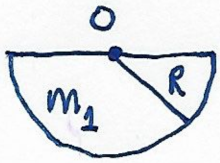
$I_{1_O} = I_{1_{CM}} + m_1 z_{CM}^2$

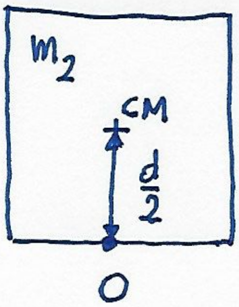
$\frac{1}{2} m_1 R^2 = I_{1_{CM}} + m_1 \cdot \dfrac{16R^2}{9\pi^2}$; $I_{1_{CM}} = m_1 R^2 \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{16}{9\pi^2}\right)$

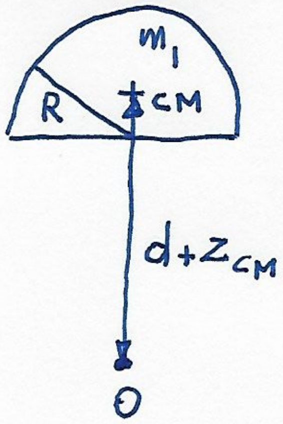
METTIAMO ORA INSIEME TUTTE LE QUANTITÀ GIÀ RICAVATE PER CALCOLARE IL MOMENTO D'INERZIA DELLA LASTRA.

SI RICAVA IL TOTALE SOMMANDO IL CONTRIBUTO DI TRE PARTI

CONTINUA →







① ② ③

①) $$I_{①} = I_{1_O} = \frac{1}{2} m_1 R^2 = \frac{M}{(\pi R + 2d)} \frac{\pi R^3}{4}$$

②) $$I_{②} = I_{2_{CM}} + m_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{Md(4R^2+d^2)}{6(\pi R+2d)} + \frac{Md^3}{2(\pi R+2d)} =$$

$$= \frac{Md(4R^2+d^2+3d^2)}{6(\pi R+2d)} = \frac{M}{(\pi R+2d)} \left[\frac{2dR^2}{3} + \frac{2d^3}{3} \right]$$

③) $$I_{③} = I_{1_{CM}} + (d+z_{CM})^2 m_1 = m_1 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{16R^2}{9\pi^2} \right) + m_1 \left(d + \frac{4R}{3\pi} \right)^2 =$$

$$= \frac{M}{(\pi R+2d)} \frac{\pi R}{2} \left[\frac{R^2}{2} - \cancel{\frac{16R^2}{9\pi^2}} + d^2 + \cancel{\frac{16R^2}{9\pi^2}} + \frac{8dR}{3\pi} \right] =$$

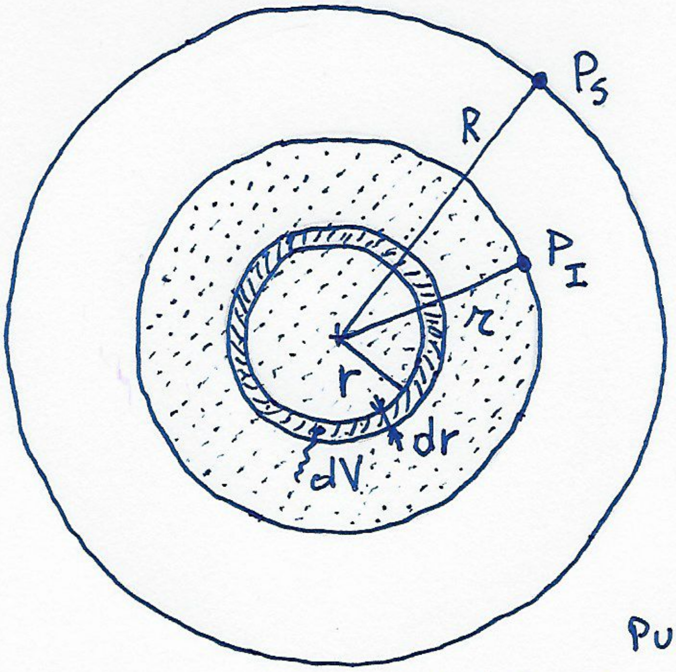
$$= \frac{M}{(\pi R+2d)} \left[\frac{\pi R^3}{4} + \frac{\pi R d^2}{2} + \frac{4dR^2}{3} \right]$$

IL MOMENTO D'INERZIA TOTALE VALE $I_O = I_{①} + I_{②} + I_{③}$

$$I_o = \frac{M}{(\pi R+2d)} \left[\frac{\pi R^3}{4} + \frac{2dR^2}{3} + \frac{2d^3}{3} + \frac{\pi R^3}{4} + \frac{\pi R d^2}{2} + \frac{4R^2 d}{3} \right] =$$

$$= \frac{M}{(\pi R+2d)} \left[\frac{6\pi R^3 + 24R^2 d + 6\pi R d^2 + 8d^3}{12} \right] =$$

$$= \frac{M}{6(\pi R+2d)} (3\pi R^3 + 12R^2 d + 3\pi R d^2 + 4d^3)$$



LA FORZA DI GRAVITÀ ALLA SUPERFICIE È FACILE DA CALCOLARE:

$\rightarrow$ IN $P_S \rightarrow$ $F = \dfrac{GmM}{R^2}$

IN QUALUNQUE PUNTO INTERNO P_I DISTANTE z DAL CENTRO DEVE ANCHE VALERE (VEDI TESTO)

$\rightarrow$ IN $P_I \rightarrow$ $F = \dfrac{GmM}{R^2}$ (1)

MA LA FORZA DI GRAVITÀ IN P_I PUÒ ESSERE CALCOLATA CONOSCENDO LA MASSA M_1 DELLA SFERA DI RAGGIO z (A VOLUME PUNTINATO IN FIGURA). DETTA $\rho(r)$ LA DENSITÀ:

$$M_1 = \int_0^z \rho(r)\,dV = 4\pi \int_0^z r^2 \rho(r)\,dr$$

$dV = 4\pi r^2 dr$ È LA "BUCCIA SFERICA" INFINITESIMA DI VOLUME

$\rightarrow$ IN $P_I \rightarrow$ $F = \dfrac{GmM_1}{z^2}$ (2)

UGUAGLIAMO LA (1) E LA (2)

$$\frac{\cancel{Gm}M}{R^2} = \frac{\cancel{Gm}M_1}{z^2} - \qquad \frac{M}{R^2} = \frac{4\pi \int_0^z r^2 \rho(r)\,dr}{z^2} \quad (3)$$

IL TERMINE A SINISTRA NON DIPENDE DA z. L'UNICO MODO IN CUI QUESTO SIA POSSIBILE ANCHE A DESTRA DELL'UGUALE È CHE L'INTEGRALE SIA PROPORZIONALE A z^2. QUESTO IMPLICA CHE L'INTEGRANDO SIA PROPORZIONALE A r. QUESTO IMPLICA CHE ρ SIA INVERSAMENTE PROPORZIONALE A r

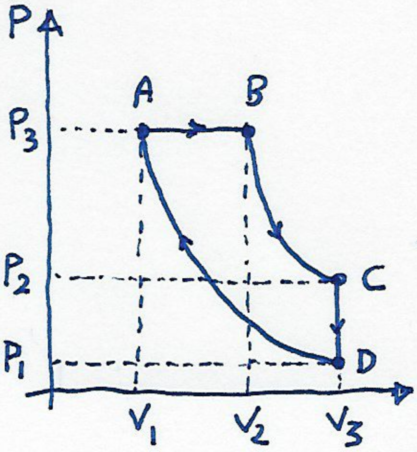
$$\rho(r) = \frac{K}{r} \Rightarrow \int_0^z r^{\cancel{2}} \frac{K}{\cancel{r}}\,dr = \frac{Kz^2}{2}$$

E SOSTITUENDO NELLA (3)

$$\frac{M}{R^2} = \frac{2\pi K \cancel{z^2}}{\cancel{z^2}} \Rightarrow K = \frac{M}{2\pi R^2}$$

QUINDI LA DENSITÀ DEL PIANETA VALE:

$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi R^2 r}$$



$$Q_C = Q_{AB} = n c_p (T_B - T_A)$$

$$Q_F = |Q_{CD}| = -Q_{CD} = n c_v (T_C - T_D)$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{(T_C - T_D)}{(T_B - T_A)} \quad (1)$$

ESPANDIAMO IL RAPPORTO DELLE DIFFERENZE DI TEMPERATURA. USIAMO $PV = nRT$

$$x \equiv \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} = \frac{P_2 V_3 - P_1 V_3}{P_3 V_2 - P_3 V_1} = \frac{V_3 (P_2 - P_1)}{P_3 (V_2 - V_1)} \quad (2)$$

I PUNTI B E C STANNO SULLA STESSA ADIABATICA PER CUI

$$P_3 V_2^\gamma = P_2 V_3^\gamma \quad (3) \quad \rightarrow$$

E LA STESSA COSA PER A E D

$$P_3 V_1^\gamma = P_1 V_3^\gamma \quad (4) \quad \rightarrow \quad P_3 = P_1 \frac{V_3^\gamma}{V_1^\gamma} \quad (5)$$

NONCHÈ, DIVIDENDO MEMBRO A MEMBRO LA (3) E LA (4) SI HA

$$\frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} = \frac{P_2}{P_1} \quad (6)$$

RIPRENDIAMO LA (2) SOSTITUENDO PRIMA LA (5) POI LA (6)

$$x = \frac{V_3 V_1^\gamma}{P_1 V_3^\gamma}\frac{(P_2 - P_1)}{(V_2 - V_1)} = \frac{V_1^\gamma}{V_3^{\gamma-1}}\frac{\left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right)}{(V_2 - V_1)} = \frac{V_1^\gamma\left(\frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} - 1\right)}{V_3^{\gamma-1}(V_2 - V_1)} = \frac{V_2^\gamma - V_1^\gamma}{V_3^{\gamma-1}(V_2 - V_1)}$$

IL PUNTO PIÙ CALDO DEL CICLO È B, QUINDI SI HA

$V_2 = \alpha V_1$ MENTRE IL VOLUME MASSIMO È V_3, QUINDI $V_3 = \beta V_1$

$$x = \frac{\alpha^\gamma V_1^\gamma - V_1^\gamma}{\beta^{\gamma-1} V_1^{\gamma-1} (\alpha V_1 - V_1)} = \frac{(\alpha^\gamma - 1)\cancel{V_1^\gamma}}{\beta^{\gamma-1}(\alpha - 1)\cancel{V_1^\gamma}}$$

PER CUI, RI-SOSTITUENDO NELLA (1)

$$\eta = 1 - \frac{(\alpha^\gamma - 1)}{\gamma \beta^{\gamma-1}(\alpha - 1)}$$