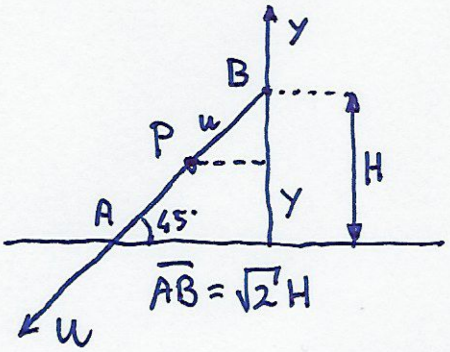


SCEGLIAMO UN ASSE u CHE VA DA B VERSO A. UN PUNTO P DI COORDINATA u SI TROVA AD UNA $y = H - \frac{u}{\sqrt{2}}$

E DI CONSEGUENZA L'ARIA IN P HA UNA TEMPERATURA

$$T = T_0 - Gy = T_0 - G\left(H - \frac{u}{\sqrt{2}}\right) = (T_0 - GH) + \frac{Gu}{\sqrt{2}}$$

E DEFINENDO $T_1 \equiv T_0 - GH = -10°C$ [TEMPERATURA DI B]

SI HA $T = T_1 + \frac{Gu}{\sqrt{2}}$

PER LA VELOCITÀ DELL'ONDA SONORA IN P SI HA:

$$V = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}\sqrt{\frac{T}{T_0}} = \frac{V_S}{\sqrt{T_0}}\sqrt{T_1 + \frac{Gu}{\sqrt{2}}} \quad \text{DOVE } V_S = 343\ m/s$$

PER LA PROGAZIONE DELL'ONDA SONORA IN P ABBIAMO QUINDI

$$V = \frac{du}{dt} \qquad \frac{V_S}{\sqrt{T_0}}\sqrt{T_1 + \frac{Gu}{\sqrt{2}}} = \frac{du}{dt} \qquad V_S\int_0^{t^*} dt = \sqrt{T_0}\int_0^{\sqrt{2}H} \frac{du}{\sqrt{T_1 + \frac{Gu}{\sqrt{2}}}}$$

DOVE t^* È LA NOSTRA INCOGNITA.
PER L'INTEGRALE CAMBIAMO VARIABILE. SIA $z = T_1 + \frac{Gu}{\sqrt{2}}$ (CHE POI È LA TEMPERATURA IN P). SI HA:

$$dz = \frac{G}{\sqrt{2}}du \longrightarrow du = \frac{\sqrt{2}}{G}dz \qquad z(u=0) = T_1 \quad z(u=\sqrt{2}H) = T_1 + GH = T_0$$

ALLORA

$$V_S t^* = \sqrt{T_0}\,\frac{\sqrt{2}}{G}\int_{T_1}^{T_0} z^{-\frac{1}{2}}dz$$

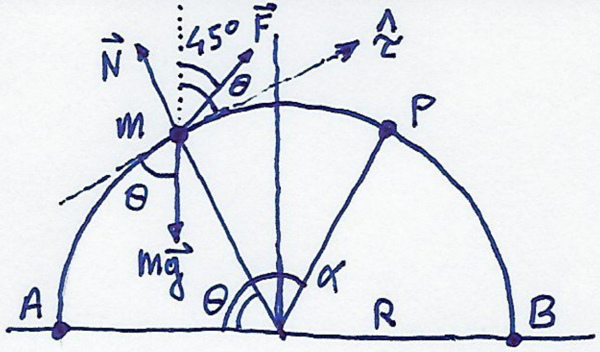
$$t^* = \frac{\sqrt{2}\sqrt{T_0}}{V_S G}\left[2z^{\frac{1}{2}}\right]_{T_1}^{T_0} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{T_0}}{V_S G}\left(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1}\right)$$

$$t^* = \frac{2\sqrt{2}\,T_0}{V_S G}\left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_0}}\right) = \frac{2\sqrt{2}\,T_0}{V_S G}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{GH}{T_0}}\right)$$

INSERENDO I DATI NUMERICI SI OTTIENE

$$t^* \approx 12{,}70\ s$$

È INTERESSANTE NOTARE CHE SE LA VELOCITÀ DEL SUONO FOSSE COSTANTE ED UGUALE A V_S PER TUTTO IL PERCORSO IL TEMPO DI PROPAGAZIONE SAREBBE $t^{**} = \sqrt{2}H/V_S \approx 12{,}37\ s$



ES. 2 SOLUZIONE "STANDARD"

PERCHÉ LA MASSA m RAGGIUNGA B PARTENDO DA A ESSA DEVE PASSARE PER OGNI PUNTO INTERMEDIO P CON UNA VELOCITÀ > 0, QUINDI SI DEVE AVERE (TH. DELL'ENERGIA CINETICA)

$$W_{TOT}(A \to P) = \frac{1}{2} m V_P^2 > 0 \quad \forall P$$

LA FORZA NORMALE $\vec{N}$ NON FA LAVORO PERCHÈ È PERPENDICOLARE ALLO SPOSTAMENTO, QUINDI

$$W_{TOT}(A \to P) = \int_A^P dW_{TOT} = \int_A^P (m\vec{g}) \cdot d\vec{l} + \int_A^P \vec{F} \cdot d\vec{l} \qquad \text{MA } d\vec{l} = R\, d\theta\, \hat{\tau}$$

$$W_{TOT}(A \to P) = \int_0^\alpha - mg \cos\theta\, R\, d\theta + \int_0^\alpha F \cos(\theta - 45°) R\, d\theta =$$

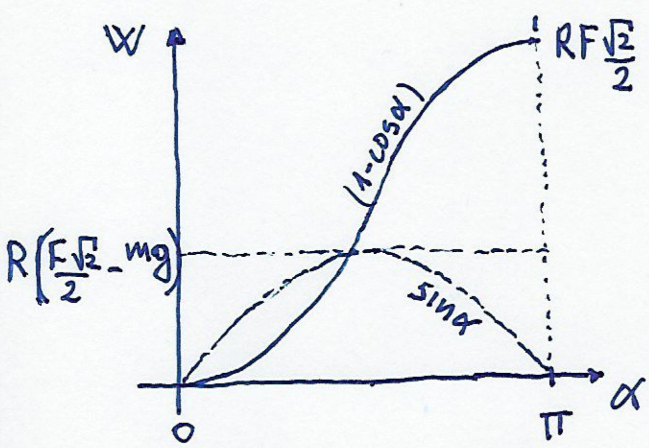
$$= R\left[-mg \int_0^\alpha \cos\theta\, d\theta + F\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\alpha \cos\theta\, d\theta + F\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\alpha \sin\theta\, d\theta \right] =$$

$$= R\left[\left(F\frac{\sqrt{2}}{2} - mg\right) \left[\sin\theta\right]_0^\alpha + F\frac{\sqrt{2}}{2} \left[-\cos\theta\right]_0^\alpha \right] =$$

$$= R\left[\left(F\frac{\sqrt{2}}{2} - mg\right) \sin\alpha + F\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \cos\alpha) \right]$$

ADESSO DOBBIAMO ACCERTARCI CHE $W_{TOT} > 0 \quad \forall \alpha \in (0, \pi)$

È FACILE FARE IL GRAFICO DEL TERMINE IN $\sin\alpha$ E QUELLO DEL TERMINE IN $(1-\cos\alpha)$. W_{TOT} È LA SOMMA DEI DUE TERMINI.



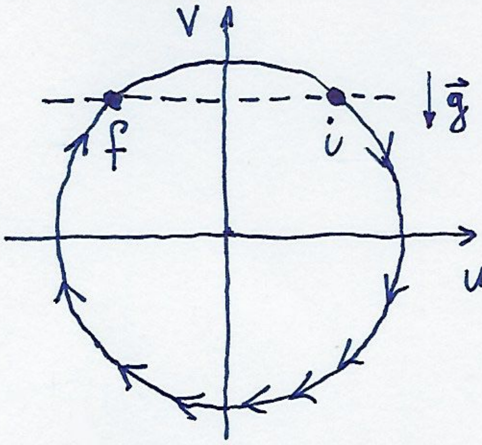
IL TERMINE IN $(1-\cos\alpha)$ NON DÀ PROBLEMI, È SEMPRE POSITIVO.

PER $\alpha \ll 1$ PERÒ IL TERMINE DOMINANTE È QUELLO IN $\sin\alpha$ [INFINITESIMO DEL 1° ORDINE CONTRO INFINITESIMO DEL 2° ORDINE] IL CUI SEGNO È QUELLO DI $F\frac{\sqrt{2}}{2} - mg$.

PERCHÈ LA SOMMA DEI DUE TERMINI SIA > 0 PER OGNI α IN (0, π) SI DEVE AVERE ALLORA:

$$F\frac{\sqrt{2}}{2} - mg > 0 \quad \longrightarrow \quad F > \sqrt{2}\, mg$$

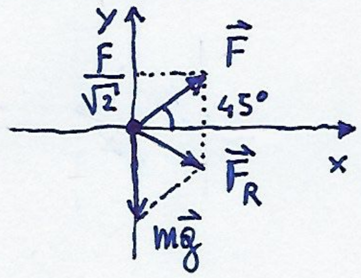
ES. 2 SOLUZIONE "TRIGGIANI"



FACCIAMO UNA PREMESSA. IN PRESENZA DELLA FORZA DI GRAVITA', CHE E' UNA FORZA COSTANTE ED UNIFORME, SE IO LASCIO LIBERO DI MUOVERSI UN CORPO DI MASSA m LUNGO UNA GUIDA CIRCOLARE SENZA ATTRITO PARTENDO DA FERMO IN UN PUNTO i IL CORPO PERCORRERA' TUTTA LA GUIDA FINO AL PUNTO f CHE SI TROVA ALLA STESSA ALTEZZA.

VENIAMO ORA AL NOSTRO PROBLEMA. LA MASSA m E' SOTTOPOSTA AD UNA FORZA COSTANTE ED UNIFORME CHE E' LA RISULTANTE DI $\vec{F}$ ED $m\vec{g}$ $\quad \vec{F}_R = m\vec{g} + \vec{F}$. CI SONO SOLO DUE CASI POSSIBILI: $\vec{F}_R$ SARA' SEMPRE ORIENTATA VERSO DESTRA, MA PUO' ESSERE ORIENTATA 1) VERSO IL BASSO 2) VERSO L'ALTO

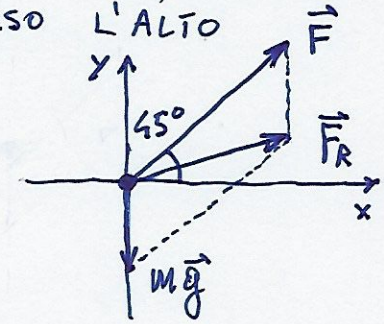
1)



$mg > \frac{F}{\sqrt{2}}$

$\boxed{F < \sqrt{2}\, mg}$

2)

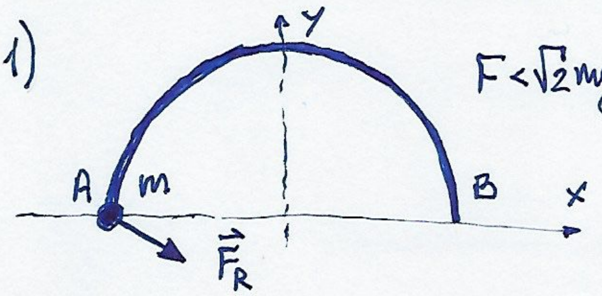


$mg < \frac{F}{\sqrt{2}}$

$\boxed{F > \sqrt{2}\, mg}$

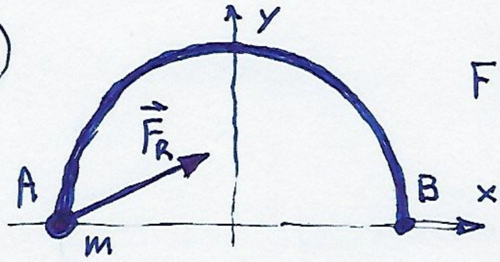
QUINDI LA SITUAZIONE, CON $\vec{F}_R$ UNICA FORZA ESTERNA AL SISTEMA m + GUIDA $\widehat{AB}$ E' LA SEGUENTE

1)



$F < \sqrt{2}\, mg$

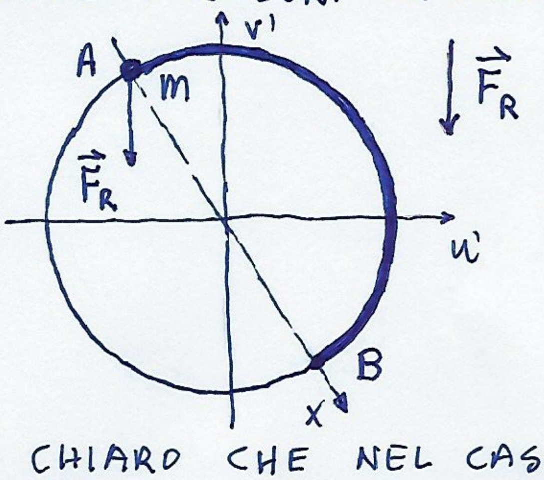
2)



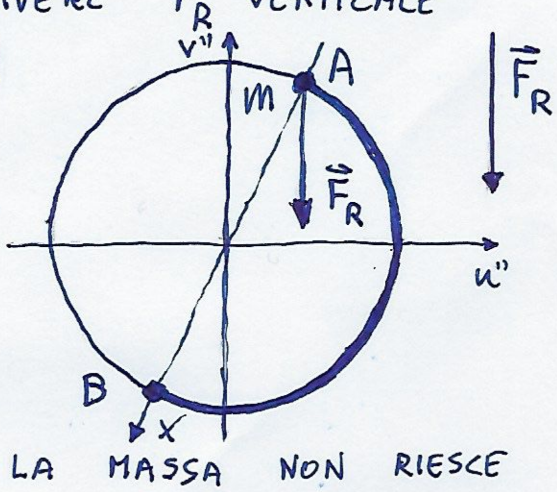
$F > \sqrt{2}\, mg$

GIRIAMO I DISEGNI IN MODO DA AVERE $\vec{F}_R$ VERTICALE

1)



2)



E' CHIARO CHE NEL CASO 1) LA MASSA NON RIESCE A SPOSTARSI DA A MENTRE NEL CASO 2), VEDI LA PREMESSA, NON C'E' NESSUN PROBLEMA NEL RAGGIUNGERE B (ED ANDARE "OLTRE") CON VELOCITA' FACILMENTE CALCOLABILE

LA CONDIZIONE CERCATA E' QUINDI $\boxed{F > \sqrt{2}\, mg}$

QUANDO IL PISTONE VIENE RILASCIATO L'ARIA SI ESPANDE METTENDOLO IN MOTO. L'ESPANSIONE È ADIABATICA E REVERSIBILE [VEDI ANCHE RISPOSTA AL PUNTO C]. DETTI T_f E $V_f = 2V_0$ TEMPERATURA E VOLUME DELL'ARIA QUANDO IL PISTONE ARRIVA A FINE CORSA SI HA

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \qquad T_f = T_0 \left(\frac{V_0}{V_f}\right)^{\gamma-1} \qquad T_f = T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1} \qquad V_0 \equiv S L_0$$

PER IL LAVORO SVOLTO SUL GAS, DAL 1° PRINCIPIO

$$W_{GAS} = \Delta U = n c_V \Delta T = \frac{P_0 V_0}{\cancel{R T_0}} \frac{\cancel{R}}{(\gamma-1)} \cancel{T_0} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1} - 1\right)$$

IL LAVORO SVOLTO DAL GAS SUL PISTONE HA SEGNO OPPOSTO

$$W_{PISTONE} = - W_{GAS} = \frac{P_0 S L_0}{(\gamma-1)} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1}\right)$$

ED APPLICANDO AL PISTONE IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$$W_{PISTONE} = \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 \quad \text{DA CUI}$$

a) $$v_f = \sqrt{\frac{2}{m} \frac{P_0 S L_0}{(\gamma-1)} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1}\right)}$$

b)
- SE L'URTO È ANELASTICO IL PISTONE RIMANE ATTACCATO ALLA BASE DEL CILINDRO.
- SE L'URTO È PARZIALMENTE ELASTICO IL PISTONE RIMBALZA UN NUMERO FINITO DI VOLTE POI SI FERMA COL GAS NELLE CONDIZIONI CALCOLATE IN PRECEDENZA
- SE L'URTO È ELASTICO IL PISTONE RIMBALZA NELLA POSIZIONE INIZIALE POI IL MOTO SI RIPETE ALL'INFINITO

c) SE $m \to 0$ L'ESPANSIONE DEL GAS TENDE AD UNA ESPANSIONE LIBERA, L'ADIABATICA NON È PIÙ REVERSIBILE, $T_f \to T_0$, $v_f \to \infty$ ED I CALCOLI PRECEDENTI NON SONO VALIDI. L'ESPANSIONE NON È REVERSIBILE, IN QUANTO NON QUASI-STATICA, SE LA PRESSIONE NON HA IL TEMPO DI ESSERE UNIFORME NEL VOLUME DEL GAS. QUESTO SUCCEDE SE LA VELOCITÀ DI ESPANSIONE È MAGGIORE DELLA VELOCITÀ DEL SUONO DEL GAS ($V_S = 343\ m/s$). CIÒ SUCCEDE SE

$$V_f > V_S \quad \text{CIOÈ SE} \quad m < \frac{2 P_0 S L_0}{V_S^2 (\gamma-1)} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1}\right) \approx 1\,g$$