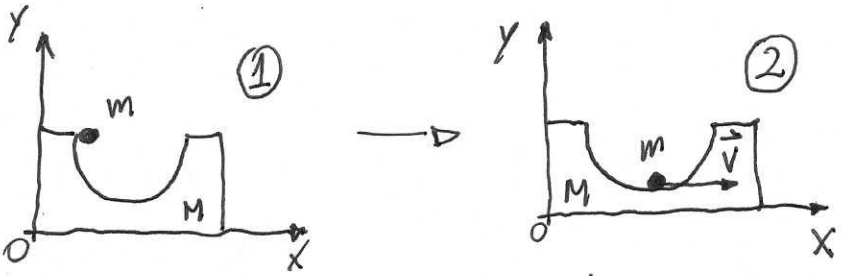
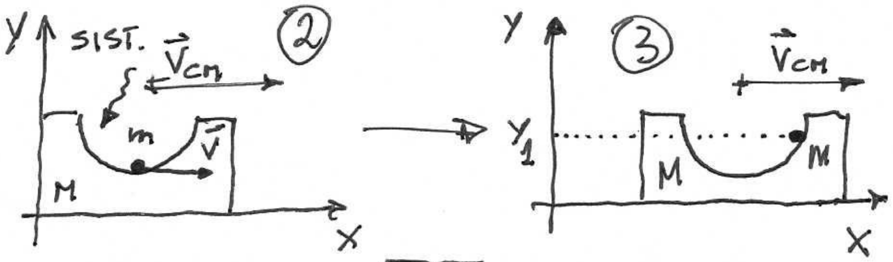


DALL'ISTANTE INIZIALE FINO AL PUNTO PIÙ BASSO DELLA TRAIETTORIA DI m (VEDI FIGURA), LA MASSA M RIMANE FERMA ED ANZI "SPINTA" VERSO L'ORIGINE DA m. LA VELOCITÀ $\vec{V}$ RAGGIUNTA DA m VALE IN MODULO $V = \sqrt{2gR}$ ED È DIRETTA LUNGO X.



NELLO STESSO ISTANTE CONSIDERIAMO ORA IL SISTEMA $m+M$.
LA VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA È $\vec{V}_{CM}$, CHE VALE IN MODULO

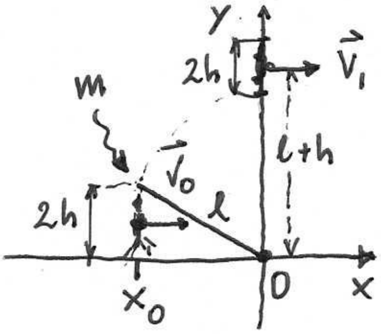
$$V_{CM} = \frac{mV}{m+M} = \frac{m\sqrt{2gR}}{(m+M)}$$ ED È DIRETTA LUNGO X.

NEI MOMENTI SUCCESSIVI IN CUI m RAGGIUNGE UNA ALTEZZA MASSIMA LA SUA VELOCITÀ RELATIVA AD M VALE ZERO.
DI CONSEGUENZA IN QUEGLI ISTANTI LE DUE VELOCITÀ $\vec{V}_m$ E $\vec{V}_M$ SONO UGUALI ED ENTRAMBE UGUALI A $\vec{V}_{CM}$
VISTO CHE IL SISTEMA È CONSERVATIVO UGUAGLIAMO LA ENERGIA MECCANICA TRA GLI ISTANTI 1 E 3

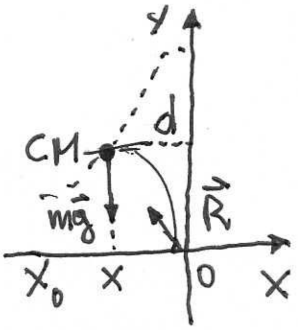
$$mgY_0 = mgY_1 + \frac{1}{2}mV_{CM}^2 + \frac{1}{2}MV_{CM}^2$$

$$\cancel{m}\cancel{g}Y_0 = \cancel{m}\cancel{g}Y_1 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{(m+M)}\frac{m^{\cancel{2}}\,\cancel{2}\cancel{g}R}{(m+M)^{\cancel{2}}}$$

$$Y_1 = Y_0 - \frac{m}{(m+M)}R$$



ANALIZZATO IL PROBLEMA, COMINCIAMO A CALCOLARE IL MOMENTO ANGOLARE DEL SISTEMA ATLETA + ASTA (IL C.M. COINCIDE CON L'ATLETA) NELL' ISTANTE INIZIALE E NELL' ISTANTE IN CUI L'ASTA È VERTICALE. SCEGLIAMO COME POSITIVO IL VERSO ORARIO (+). ALL' INIZIO SI HA FACILMENTE $L_0 = m v_0 h$. ALLA SOMMITÀ IL MOTO È UNA ROTAZIONE DEL SISTEMA INTORNO AD O. APPLICANDO IL TEOREMA DI STEINER $I = m(\ell+h)^2 + I_{CM}$. PER I_{CM} NON ABBIAMO DATI SICURI, MA PRENDENDO PER ESEMPIO UNA SBARRA UNIFORME $I_{CM} = \frac{1}{12} m (2m)^2 = m \cdot \frac{1}{3} m^2$, MENTRE SE L'ASTA FOSSE LUNGA 4m $m(\ell+h)^2 = m \cdot 25 m^2$. CIOÈ TRASCURIAMO I_{CM} E SI OTTIENE $L_1 = m(\ell+h)^2 \frac{v_1}{(\ell+h)} = m(\ell+h) v_1$



IL MOMENTO ANGOLARE VARIA SE C'È UN MOMENTO MECCANICO ESTERNO. LA REAZIONE $\vec{R}$ DELLA BUCA SULL' ASTA NON FA MOMENTO MECCANICO SUL SISTEMA. LA GRAVITÀ SÌ.

$M_{EXT} = M_g = -mgd = +mgx$ SI TRATTA ALLORA DI TROVARE $x(t)$, SAPENDO CHE SI TRATTA DI MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO. INTANTO TROVIAMO x_0 COL TEOREMA DI PITAGORA $x_0 = -\sqrt{\ell^2 - (2h)^2}$

QUINDI LO SPOSTAMENTO $\Delta x = 0 - x_0 = -x_0 = \sqrt{\ell^2 - (2h)^2}$ ①

TROVIAMO L'ACCELERAZIONE, SEMPRE DALLE FORMULE NOTE

$v_1^2 = v_0^2 + 2 a_x \Delta x$ $\qquad a_x = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2\Delta x}$ E DA $\Delta v = a_x \Delta T$ ② SI RICAVA PER L'INTERVALLO DI TEMPO TRA POS. INIZIALE E FINALE $\Delta T = \frac{v_1 - v_0}{a_x}$

E $\quad \Delta T = \frac{2\Delta x}{(v_1 + v_0)}$ ③ SAPPIAMO QUINDI CHE $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2$ PER $0 < t < \Delta T$

QUINDI IL MOMENTO MECCANICO ISTANTANEO VALE:

$$M_{EXT} = mg\left(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2\right)$$

CALCOLIAMO L'IMPULSO ANGOLARE DURANTE IL MOTO

$$\mathcal{J}_{EXT} = \int_0^{\Delta T} M_{EXT}\, dt = mg \int_0^{\Delta T} \left(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2\right) dt = mg \left[x_0 t + \frac{1}{2} v_0 t^2 + \frac{1}{6} a_x t^3\right]_0^{\Delta T} =$$

$$= mg\left(x_0 \Delta T + \frac{1}{2} v_0 \Delta T^2 + \frac{1}{6} a_x \Delta T^3\right) \overset{①+②}{=} mg\left(-\Delta x \Delta T + \frac{1}{2} v_0 \Delta T^2 + \frac{1}{6} \Delta v \Delta T^2\right) =$$

$$\overset{③}{=} mg\left(-\frac{2\Delta x^2}{(v_1+v_0)} + \frac{1}{\cancel{2}} v_0 \frac{\cancel{4}^{2} \Delta x^2}{(v_1+v_0)^2} + \frac{1}{\cancel{6}_3} \frac{(v_1 - v_0) \cancel{4}^{2} \Delta x^2}{(v_1+v_0)^2}\right) =$$

SEGUE

→ SEGUE

$$J_{EXT} = \frac{mg\,\Delta x^2}{3(V_1+V_0)^2}\left(-6V_1 - \cancel{6V_0} + \cancel{6V_0} + 2V_1 - 2V_0\right) =$$

$$= -\frac{mg\,\Delta x^2}{3(V_1+V_0)^2}(4V_1+2V_0) = -\frac{2}{3}mg\frac{(2V_1+V_0)}{(V_1+V_0)^2}\Delta x^2$$

USIAMO IL TEOREMA DELL'IMPULSO ANGOLARE (SULL'ASSE Z $\circlearrowright +$)

$$\Delta L = J_{EXT} \qquad \cancel{m}v_1(l+h) - \cancel{m}v_0 h \overset{①}{=} -\frac{2}{3}\cancel{m}g\frac{(2V_1+V_0)}{(V_1+V_0)^2}(l^2-4h^2)$$

ABBIAMO UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO IN l. CONVIENE DEFINIRE

$$k \equiv \frac{2}{3}g\frac{(2V_1+V_0)}{(V_1+V_0)^2} \simeq 0{,}6486\ s^{-1}$$

$$v_1 l + v_1 h - v_0 h = -kl^2 + 4kh^2 \qquad kl^2 + v_1 l - [h(v_0 - v_1) + 4kh^2] = 0$$

SCEGLIAMO A PRIORI L'UNICA RADICE POSITIVA

$$l = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 4k[h(v_0-v_1)+4kh^2]}}{2k}$$

ED INSERENDO I VALORI $V_0 = 10\,m/s$, $V_1 = 1\,m/s$, $h = 1\,m$ SI OTTIENE

$$l \approx 3{,}53\ m$$

PRIMA DELL'URTO LA PRESSIONE DEL GAS VALE $P_0 = P_A$. SIA T_0 LA TEMP.

SUBITO DOPO L'URTO ANELASTICO LA VELOCITÀ DI $m+M$ È $V_{CM} = \frac{mv}{m+M}$

QUANDO IL GAS RAGGIUNGE IL VOLUME V_1 AVRÀ TEMPERATURA T_1 .

SUPPONIAMO LA COMPRESSIONE ADIABATICA REVERSIBILE. SI HA

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1} \qquad T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

E IL LAVORO FATTO SUL GAS VALE

$$W_{GAS} = \Delta U = n c_v \Delta T = \frac{nR}{(\gamma-1)}(T_1 - T_0) = \frac{nRT_0}{(\gamma-1)}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) = \frac{P_A V_0}{(\gamma-1)}\left(\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right)$$

SUL PISTONE IL GAS FA UN LAVORO $-W_{GAS}$ MENTRE L'ARIA ESTERNA FA UN LAVORO $P_A \Delta V_A$. QUINDI

$$W_{PISTONE_{TOT}} = -W_{GAS} + P_A \Delta V_A = -\frac{P_A V_0}{(\gamma-1)}\left(\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right) + P_A (V_0 - V_1) =$$

$$= P_A V_0 \left(-\frac{5}{2}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\frac{2}{5}} - 1\right] + \left(1 - \frac{V_1}{V_0}\right)\right)$$

LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA DEL PISTONE VALE

$$\Delta K = K_{fin} - K_{in} = 0 - \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\frac{m^2 v^2}{(m+M)^{\cancel{2}}}$$

APPLICHIAMO AL PISTONE IL TEOREMA DELLE FORZE VIVE

$$W_{TOT} = \Delta K \Rightarrow P_A V_0 \left(-\frac{5}{2}\left(\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\frac{2}{5}} - 1\right) + \left(1 - \frac{V_1}{V_0}\right)\right) = -\frac{1}{2}\frac{m^2}{(m+M)} v^2$$

E QUINDI

$$v = \sqrt{\frac{2(m+M)}{m^2} P_A V_0 \left(\frac{5}{2}\left(\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\frac{2}{5}} - 1\right) - \left(1 - \frac{V_1}{V_0}\right)\right)}$$