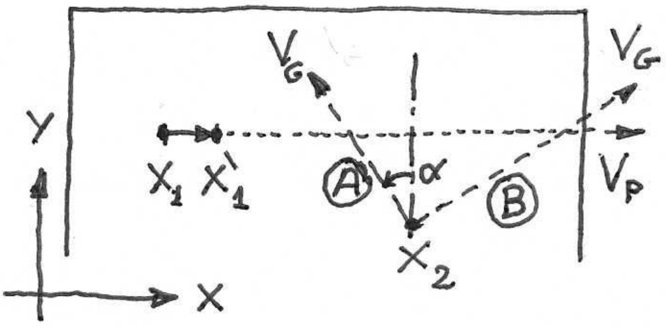



APPENA PARTE LA PALLA, QUESTA VIAGGIA PER $\Delta T$ SENZA CHE IL GIOCATORE 2 SI MUOVA, QUINDI ESSA SI PORTA IN $X_1' = X_1 + V_P \Delta T$

PRENDIAMO $t=0$ IN QUELL'ISTANTE, DETTO $\alpha$ L'ANGOLO IN FIGURA

SI HA PER LE EQUAZIONI DEL MOTO DELLA PALLA E DI 2:

$$\begin{cases} X_P = X_1' + V_P t \\ Y_P = Y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_G = X_2 - V_G \sin\alpha\, t \\ Y_G = Y_2 + V_G \cos\alpha\, t \end{cases}$$

DOVRÀ ESISTERE UN $t^*$ PER CUI COINCIDONO LE COORDINATE DI PALLA E GIOCATORE

$$\begin{cases} X_1' + V_P t^* = X_2 - V_G \sin\alpha\, t^* \\ Y_1 = Y_2 + V_G \cos\alpha\, t^* \end{cases}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} V_G \sin\alpha\, t^* = X_2 - X_1' - V_P t^* \\ V_G \cos\alpha\, t^* = Y_1 - Y_2 \end{cases}$$

CONVIENE DEFINIRE:

1 $\Delta X \equiv X_2 - X_1' = X_2 - X_1 - V_P \Delta T$

$\Delta Y \equiv Y_1 - Y_2$

$$\begin{cases} V_G \sin\alpha\, t^* = \Delta X - V_P t^* \\ V_G \cos\alpha\, t^* = \Delta Y \quad (2) \end{cases}$$

ELEVIAMO AL QUADRATO E SOMMIAMO LE DUE EQ.

$$V_G^2 t^{*2} = \Delta X^2 + V_P^2 t^{*2} - 2\Delta X V_P t^* + \Delta Y^2$$

$$t^{*2}(V_P^2 - V_G^2) - 2\Delta X V_P t^* + (\Delta X^2 + \Delta Y^2) = 0$$

[SUPPONIAMO $V_P > V_G$!]

SE ESISTONO DUE RADICI REALI DI QUESTA EQUAZIONE ESSE SONO ENTRAMBE POSITIVE, E CORRISPONDONO ALLE TRAIETTORIE A E B SUL DISEGNO. SCEGLIAMO A CHE CORRISPONDE AL TEMPO MINIMO

$$t^* = \frac{\Delta X V_P - \sqrt{\Delta X^2 V_P^2 - (V_P^2 - V_G^2)(\Delta X^2 + \Delta Y^2)}}{(V_P^2 - V_G^2)} =$$

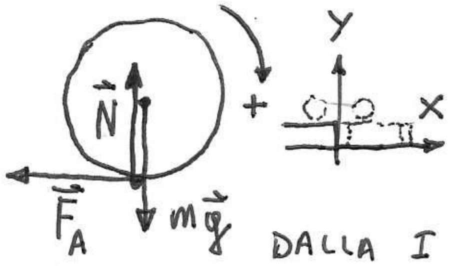
$$= \frac{\Delta X V_P - \sqrt{V_G^2(\Delta X^2 + \Delta Y^2) - V_P^2 \Delta Y^2}}{(V_P^2 - V_G^2)}$$

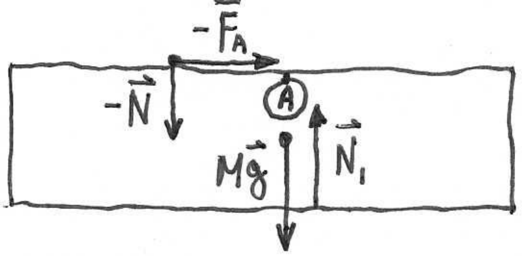
VEDI DEFINIZIONI 1

PER LA DIREZIONE, DALLA 2 SI HA $\cos\alpha = \dfrac{\Delta Y}{V_G t^*}$

PERCHÈ SIA POSSIBILE L'INCROCIO, $t^*$ DEVE ESSERE UN NUMERO REALE, QUINDI IL DISCRIMINANTE DEVE ESSERE POSITIVO

$$V_G^2(\Delta X^2 + \Delta Y^2) - V_P^2 \Delta Y^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad V_G > \frac{V_P \Delta Y}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}}$$




EFFETTUIAMO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO PER m E PER M

DALLA I EQ. CARDINALE LUNGO Y PER m $|\vec{N}| = |m\vec{g}|$ E QUINDI $|\vec{F}_A| = \mu_D |\vec{N}| = \mu_D m g$ FINCHÉ DURA LO SLITTAMENTO. DETTA $x$ L'ASCISSA DI m E $X$ L'ASCISSA DI M, E $\alpha$ L'ACCELERAZIONE ANGOLARE DELLA SFERA, APPLICHIAMO LA I EQ CARDINALE SU X E LA II CARDINALE PER m

$$\begin{cases} -F_A = m\ddot{x} \\ +F_A = M\ddot{X} \\ F_A R = I\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} -\mu_D \cancel{m} g = \cancel{m}\ddot{x} \\ \mu_D m g = M\ddot{X} \\ \mu_D \cancel{m} g \cancel{R} = \frac{2}{5}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = -\mu_D g \\ \ddot{X} = \frac{m}{M}\mu_D g \\ \alpha = \frac{5}{2}\mu_D \frac{g}{R} \end{cases}$$

LE ACCELERAZIONI SONO COSTANTI, QUINDI SI TRATTA DI MOTI UNIFORMEMENTE ACCELERATI. SI HA QUINDI PER LE VELOCITÀ (LINEARI E ANGOLARI)

$$\begin{cases} \dot{x} = V_0 - \mu_D g t \\ \dot{X} = \frac{m}{M}\mu_D g t \\ \omega = \frac{5}{2}\mu_D \frac{g}{R} t \end{cases}$$

LA VELOCITÀ RELATIVA LUNGO X VALE $V_R = \dot{x} - \dot{X}$ E LO SLITTAMENTO FINISCE AL TEMPO $t = t^*$ QUANDO $V_R = \omega R$. DA QUEL MOMENTO IN POI IL MOTO DIVENTA UN ROTOLAMENTO RETTILINEO UNIFORME

$$V_R = \omega R \Rightarrow V_0 - \mu_D g t^* - \frac{m}{M}\mu_D g t^* = \frac{5}{2}\mu_D \frac{g}{\cancel{R}}\cancel{R} t^*$$

$$V_0 = \mu_D g t^* \left(1 + \frac{m}{M} + \frac{5}{2}\right) = \mu_D g t^* \left(\frac{7M + 2m}{2M}\right) \qquad t^* = \frac{V_0}{\mu_D g}\frac{2M}{(7M+2m)}$$

PERCHÉ LO SLITTAMENTO FINISCA A METÀ SLITTA, CHIAMIAMO $X_A$ LA POSIZIONE DEL PUNTO DI MEZZO A DELLA LASTRA (VEDI DISEGNO). SI DEVE AVERE $x(t^*) = X_A(t^*)$

$$x(t^*) = V_0 t^* + \frac{1}{2}\ddot{x}\, t^{*2}$$

$$X_A(t^*) = \frac{L}{2} + \frac{1}{2}\ddot{X}\, t^{*2}$$

QUINDI, UGUAGLIANDO E SOSTITUENDO

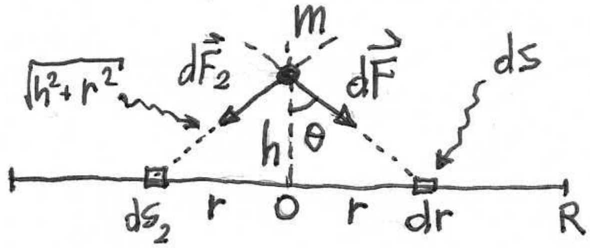
$$V_0 \frac{V_0}{\mu_D g}\frac{2M}{(7M+2m)} + \frac{1}{\cancel{2}}(-\cancel{\mu_D g})\frac{V_0^2}{(\mu_D g)^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{4}^{2}M^2}{(7M+2m)^2} = \frac{L}{2} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{m}{M}\cancel{\mu_D g}\frac{V_0^2}{(\mu_D g)^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{4}^{2}M^{\cancel{2}}}{(7M+2m)^2}$$

$$\frac{L}{2} = \frac{V_0^2}{\mu_D g}\left[\frac{2M(7M+2m) - 2M^2 - 2mM}{(7M+2m)^2}\right] = \frac{V_0^2}{\mu_D g}\frac{(14M^2 + 4Mm - 2M^2 - 2mM)}{(7M+2m)^2} =$$

$$\frac{L}{2} = \frac{V_0^2}{\mu_D g}\frac{2M(6M+m)}{(7M+2m)^2}$$

DA CUI

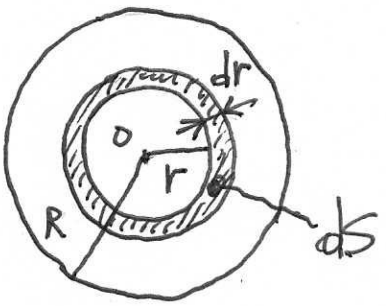
$$\mu_D = \frac{4V_0^2 M}{gL}\frac{(6M+m)}{(7M+2m)^2}$$




SE IL PIANETA È PIATTO, VUOL DIRE CHE HA UNA DISTRIBUZIONE PIANA DI MASSA CON DENSITÀ SUPERFICIALE

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}$$

CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA SI NOTA CHE TUTTI GLI ELEMENTI DI SUPERFICIE A DISTANZA $r$ GENERICA $(0<r<R)$ DAL CENTRO CONTRIBUISCONO CON UN TERMINE $dF\cos\theta$ ALLA GRAVITÀ (VERTICALE) MENTRE TUTTI I CONTRIBUTI ORIZZONTALI SI ELIMINANO PER SIMMETRIA. LA FORZA INFINITESIMA CHE UNA SUPERFICIE $dS$, CHE STA A RAGGIO $r$ RISPETTO AL CENTRO, ESERCITA SU UNA MASSA DI PROVA $m$ POSTA AD ALTEZZA $h$ RISPETTO AD $O$ VALE [MODULO]




$$dF = \frac{G\,\sigma\, ds\, m}{(h^2+r^2)} \quad \text{QUINDI} \quad dF_G = dF\cos\theta$$

MA LA SUPERFICIE $dS$ CHE CI INTERESSA SI PUÒ SCRIVERE

$dS = 2\pi r\, dr$ MENTRE SI PUÒ SCRIVERE $\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}$

PER CUI

$$F_G = \int dF_G = \int dF\cos\theta = \int_0^R G\sigma m \frac{2\pi r}{(h^2+r^2)}\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}\,dr =$$

$$= G\frac{M}{\cancel{\pi} R^2} m\, 2\cancel{\pi}\, h \int_0^R \frac{r\,dr}{(h^2+r^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{GMm}{R^2} h\, \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \int_0^R \frac{d(h^2+r^2)}{(h^2+r^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{GMm}{R^2} h \left[-2\,(h^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R = \frac{GMm\,h}{R^2}\cdot 2\left(-\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} + \frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)$$

MA SICCOME $h \ll R \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} \approx \frac{1}{R} \ll \frac{1}{\sqrt{h^2}} = \frac{1}{h}$ . TRASCURIAMO $\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}$ !

$$F_G = \frac{2GMm}{R^2}$$

È LA FORZA DI GRAVITÀ PER $m$ SUL PIANETA PIATTO

DALTRONDE SULLA TERRA $F_{G,T} = mg = \frac{GMm}{R_T^2}$ . IL TESTO DICE CHE LE DUE FORZE SONO UGUALI

$$\frac{2\cancel{GMm}}{R^2} = \frac{\cancel{GMm}}{R_T^2} \qquad R = \sqrt{2}\,R_T$$