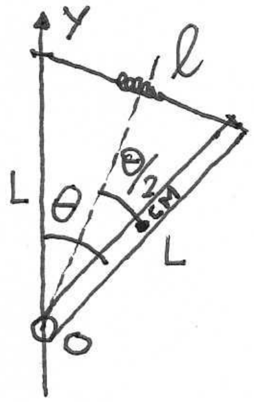


DETTA ℓ LA LUNGHEZZA DELLA MOLLA IN UNA POSIZIONE GENERICA E θ L'ANGOLO D'INCLINAZIONE VERTICALE DELLA SBARRA, SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA POTENZIALE DEL SISTEMA

$$U = \frac{1}{2}K(\ell-\ell_0)^2 + mg\,Y_{CM}$$

MA $\ell = 2L\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ [VEDI FIGURA] E $Y_{CM} = \frac{L}{2}\cos\theta$

PER CUI $U = \frac{1}{2}K\left(2L\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\ell_0\right)^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta$

TROVIAMO L'ANGOLO θ_0 DI EQUILIBRIO IMPONENDO $\frac{dU}{d\theta}=0$

$$\frac{1}{\cancel{2}}K\,\cancel{2}\left(2L\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-\ell_0\right)\cancel{2L}\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - mg\frac{\cancel{L}}{2}\sin\theta_0 = 0$$

USIAMO L'IDENTITÀ $\sin\theta_0 = 2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

$$K\left(2L\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-\ell_0\right)\cancel{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} - mg\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = 0$$

$$\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)(2KL-mg) = K\ell_0$$

QUINDI $\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{K\ell_0}{(2KL-mg)}$

IL RISULTATO VA DISCUSSO. SICCOME $\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\leq 1$ ALLORA LA FORMULA VALE SOLO SE

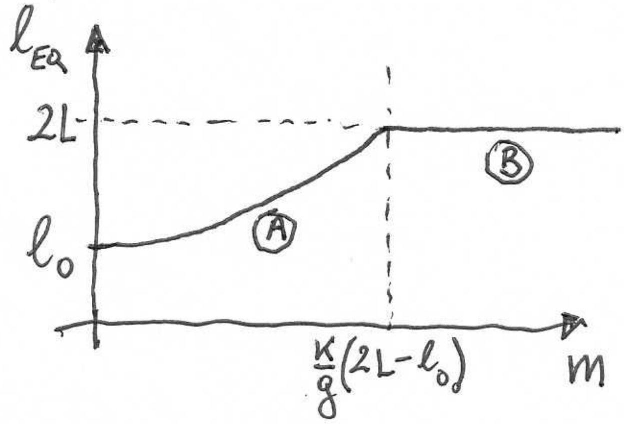
$$K\ell_0 \leq 2KL-mg \Rightarrow mg \leq K(2L-\ell_0) \Rightarrow m\leq\frac{K}{g}(2L-\ell_0)$$

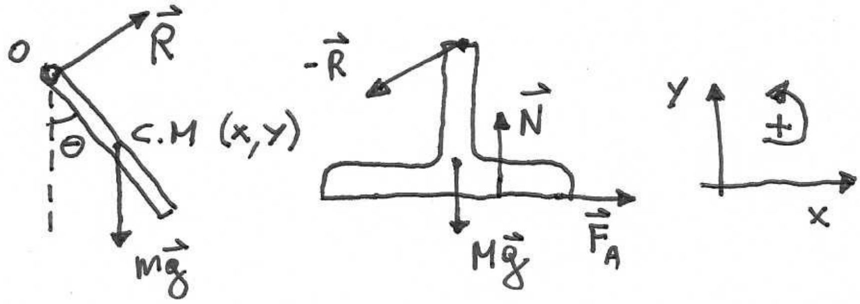
DALLA FORMULA $\ell = 2L\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ [VEDI FIGURA] SI RICAVA FACILMENTE CHE $\sin\frac{\theta}{2}=1$ CORRISPONDE A $\theta=\pi$ ED $\ell=2L$, CIOÈ LA SBARRA È ORMAI VERTICALE (VERSO IL BASSO) E LA MOLLA NON PUÒ ALLUNGARSI ULTERIORMENTE. B

SE $m\leq\frac{K}{g}(2L-\ell_0)$ $\quad \ell_{EQ} = 2L\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{2LK\ell_0}{(2K\ell-mg)} = \ell_0\frac{1}{\left(1-\frac{mg}{2KL}\right)}$

A

PER CUI





ESEGUITI I DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO SUI DUE OGGETTI SCRIVIAMO SUBITO LA II EQ CARDINALE PER LA SBARRA

$-mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}$ QUINDI

$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta = 0$ E PER θ PICCOLI $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$. DETTO $\omega \equiv \sqrt{\frac{3g}{2L}}$

SI HA $\theta = \theta_0\cos(\omega t)$ $\quad \dot{\theta} = -\theta_0\omega\sin(\omega t)$ $\quad \ddot{\theta} = -\theta_0\omega^2\cos(\omega t)$

BISOGNA TROVARE $\vec{R}$. SCRIVIAMO LE COORDINATE DEL C.M. DELLA SBARRA E DERIVIAMOLE SUPPONENDO M <u>FERMO</u>. SIA O L'ORIGINE

$$\begin{cases} x = \frac{L}{2}\sin\theta \\ y = -\frac{L}{2}\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = +\frac{L}{2}\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} = +\frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \frac{L}{2}(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta}) \\ \ddot{y} = \frac{L}{2}(\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}) \end{cases}$$

APPROSSIMIAMO $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$ ED ESCLUDIAMO I TERMINI DI 3° ORDINE

$$\begin{cases} \ddot{x} \simeq \frac{L}{2}(\cancel{-\theta\dot{\theta}^2} + \ddot{\theta}) = -\frac{L}{2}\theta_0\omega^2\cos(\omega t) \\ \ddot{y} \simeq \frac{L}{2}(\dot{\theta}^2 + \theta\ddot{\theta}) = \frac{L}{2}(\theta_0^2\omega^2\sin^2(\omega t) - \theta_0^2\omega^2\cos^2(\omega t)) = \frac{L}{2}\theta_0^2\omega^2(1 - 2\cos^2(\omega t)) \end{cases}$$

APPLICHIAMO LA I EQ CARDINALE ALLA SBARRA SU X E Y

$$\begin{cases} m\ddot{x} = R_x \rightarrow R_x = -m\frac{L}{2}\theta_0\omega^2\cos(\omega t) \\ m\ddot{y} = R_y - mg \rightarrow R_y = m(g + \ddot{y}) = mg + m\frac{L}{2}\theta_0^2\omega^2(1 - 2\cos^2(\omega t)) \end{cases}$$

APPLICHIAMO LA I EQ CARDINALE AL SUPPORTO SU X E Y

$$\begin{cases} F_A - R_x = 0 \rightarrow F_A = R_x = -m\frac{L}{2}\theta_0\omega^2\cos(\omega t) \\ N - Mg - R_y = 0 \rightarrow N = Mg + R_y = (M+m)g + m\frac{L}{2}\theta_0^2\omega^2(1 - 2\cos^2(\omega t)) \end{cases}$$

DA $|\vec{F}_A| \leq \mu_S N$ SI OTTIENE $\mu_S \geq \frac{|F_A|}{N}$ $(\forall t)$, CIOE'

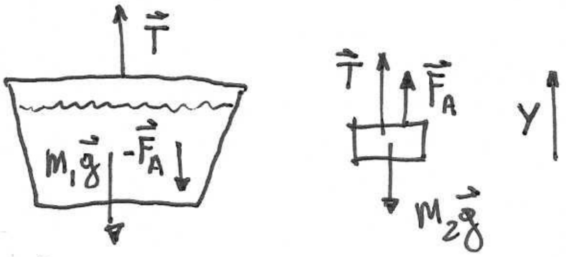
$$\mu_S \geq \frac{|-m\frac{L}{2}\theta_0\omega^2\cos(\omega t)|}{(M+m)g + m\frac{L}{2}\theta_0^2\omega^2(1 - 2\cos^2(\omega t))} \quad \forall t$$

LA RELAZIONE DEVE VALERE PER OGNI t, MA OSSERVIAMO CHE PER $\cos(\omega t) = \pm 1$ IL NUMERATORE DELLA FRAZIONE ASSUME IL VALORE MASSIMO ED IL DENOMINATORE IL VALORE MINIMO. PER TROVARE IL VALORE MINIMO DI μ_S CHE SODDISFI LA DISEQUAZIONE PONIAMO ALLORA $\cos(\omega t) = \pm 1$ E RICORDIAMO CHE $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$

$$\mu_S \geq \frac{m\frac{\cancel{L}}{2}\theta_0\frac{3g}{2\cancel{L}}}{(M+m)g + m\frac{\cancel{L}}{2}\theta_0^2\frac{3g}{2\cancel{L}}(1-2)} = \frac{\frac{3}{4}m\cancel{g}\theta_0}{(M+m)\cancel{g} - \frac{3}{4}m\cancel{g}\theta_0^2}$$

E INFINE TRASCURANDO IL TERMINE IN θ_0^2

$$\mu_S \geq \frac{3m\theta_0}{4(M+m)}$$



a) IL SECCHIO RIMANE DRITTO. LA FORZA D'ARCHIMEDE (NEGATIVA) CHE m_2 ESERCITA SULL'ACQUA È PROPRIO UGUALE ALLA FORZA PESO DEL LIQUIDO SPOSTATO QUINDI NON SI GENERA NESSUN MOMENTO TORCENTE

b) DAL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO È EVIDENTE CHE PER L'EQUILIBRIO SI DEVE AVERE $m_2 > m_1$ LA CONFERMA VIENE DALLA RISPOSTA c)

c) SCRIVIAMO LA I EQ CARDINALE LUNGO y PER I DUE OGGETTI TENENDO PRESENTE CHE $F_A = \rho_A V_2 g$

$$\begin{cases} T + \rho_A V_2 g - m_2 g = 0 \\ T - \rho_A V_2 g - m_1 g = 0 \end{cases}$$

SOTTRAIAMO LE 2 EQ $\quad 2\rho_A V_2 \cancel{g} = (m_2 - m_1)\cancel{g}$

$$V_2 = \frac{(m_2 - m_1)}{2\rho_A}$$

NOTARE CHE È NECESSARIO CHE $m_2 > m_1$

d) RISCRIVIAMO LE EQUAZIONI TENENDO CONTO DEL MOVIMENTO

$$\begin{cases} T + \rho_A V_2 g - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \\ T - \rho_A V_2 g - m_3 g = m_3 \ddot{y}_1 \end{cases}$$

CON $\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$

SOTTRAIAMO LE DUE EQ

$$2\rho_A V_2 g - m_2 g + m_3 g = (m_2 + m_3)\ddot{y}_2$$

$$\cancel{m_2 g} - m_1 g - \cancel{m_2 g} + m_3 g = (m_2 + m_3)\ddot{y}_2$$

$$\ddot{y}_2 = g\frac{(m_3 - m_1)}{(m_2 + m_3)}$$

CHE È UNA QUANTITÀ POSITIVA, QUINDI m_2 SI MUOVE VERSO L'ALTO

e) LA MASSA m_2 SI MUOVE VERSO L'ALTO (E IL SECCHIO VERSO IL BASSO, FINCHÈ m_2 EMERGE* DALL'ACQUA. SE m_3 È POCO MAGGIORE DI m_1, IL MOTO SI ARRESTA QUANDO UNA PARTE (CALCOLABILE) DEL VOLUME V_2 NON È PIÙ IMMERSA. IN QUESTO MODO SI RIDUCE LA FORZA D'ARCHIMEDE F_A E SI TROVA UN NUOVO EQUILIBRIO

* PARZIALMENTE