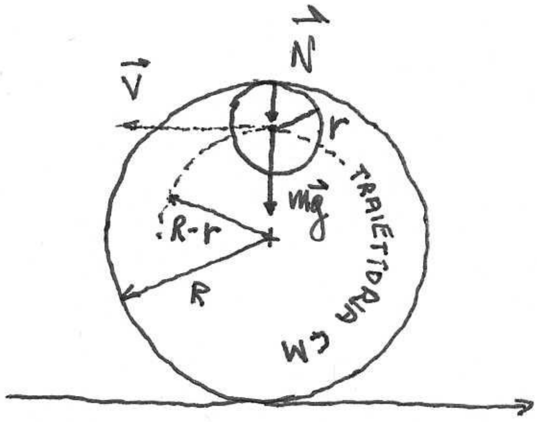


IN QUESTO PROBLEMA SI CONSERVA L'ENERGIA MECCANICA. QUELLA INIZIALE VALE $E_i = mg(h+r)$. [m = MASSA DELLA SFERA]

ESAMINIAMO ORA LA SITUAZIONE IN FIGURA.

→ SE LA SFERA RIESCE A PASSARE IL PUNTO SUPERIORE DEL CERCHIO SENZA PERDERE CONTATTO ALLORA PERCORRE TUTTO IL RESTO DELLA TRAIETTORIA.

CHIAMIAMO V E ω LA VELOCITÀ LINEARE E LA VELOCITÀ ANGOLARE DELLA SFERA NEL PUNTO PIÙ ALTO DEL CERCHIO. PONIAMO $E_i = E_f$

$$mg(h+r) = mg(2R-r) + \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad I = \frac{2}{5}mr^2 \quad \omega = \frac{v}{r}$$

$$\cancel{m}g(h+r-2R+r) = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^{\cancel{2}}\frac{V^2}{\cancel{r^2}} = \frac{7}{10}\cancel{m}V^2 \quad \text{PER CUI}$$

$$V^2 = \frac{10}{7}g(h-2(R-r)) \quad (1)$$

ESAMINIAMO LE FORZE. VISTO CHE IL C.M. FA UN MOTO CIRCOLARE DI RAGGIO $R-r$ LA SOMMA DI $\vec{N}$ ED $m\vec{g}$ DEVE UGUAGLIARSI ALLA FORZA CENTRIPETA

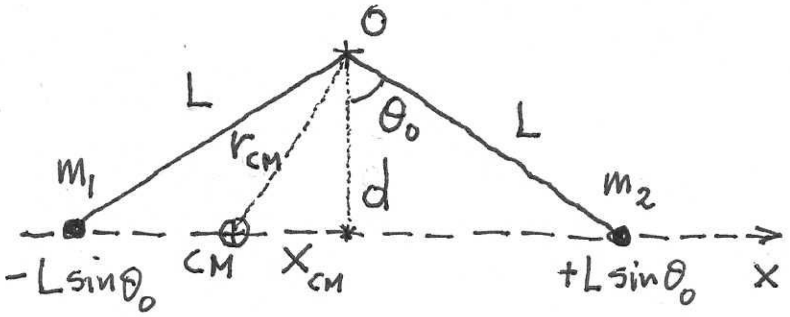
$$mg + N = \frac{mV^2}{(R-r)} \quad \rightarrow \quad N = \frac{mV^2}{(R-r)} - mg$$

PERCHÉ CI SIA CONTATTO SI DEVE AVERE $N > 0$

$$\frac{\cancel{m}V^2}{(R-r)} > \cancel{m}g \quad \xrightarrow{(1)} \quad \frac{10}{7}\cancel{g}\frac{(h-2(R-r))}{(R-r)} > \cancel{g}$$

$$h - 2(R-r) > \frac{7}{10}(R-r)$$

$$h > \left(2+\frac{7}{10}\right)(R-r) = h_{MIN} = \frac{27}{10}(R-r)$$



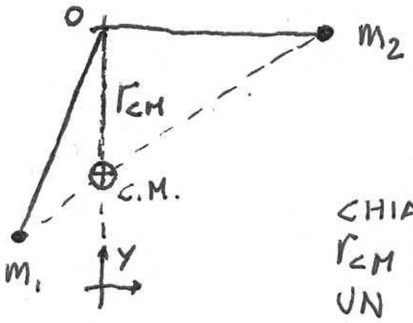
SCEGLIAMO L'ASSE X IN FIGURA CON ORIGINE SULLA VERTICALE DI O, A DISTANZA d DA QUESTO

$d = L\cos\theta_0$

CALCOLIAMO LA X_{CM} PER POI TROVARE r_{CM}, LA DISTANZA DEL C.M. DA O

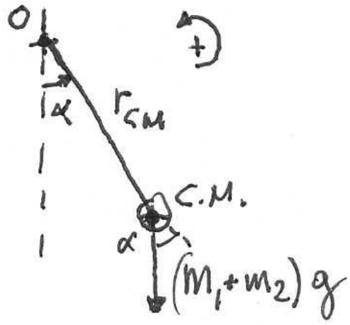
$$x_{CM} = \frac{m_1(-L\sin\theta_0) + m_2(L\sin\theta_0)}{m_1+m_2} = L\sin\theta_0\left(\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right)$$

$$r_{CM} = \sqrt{d^2 + X_{CM}^2} = \sqrt{L^2\cos^2\theta_0 + L^2\sin^2\theta_0\left(\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right)^2} = L\sqrt{\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\left(\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right)^2}$$



CHIARAMENTE LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO SI HA COL C.M. IN VERTICALE SOTTO AL PUNTO DI SOSPENSIONE (SINISTRA)

CHIAMIAMO α L'INCLINAZIONE DI r_{CM} RISPETTO ALLA VERTICALE IN UN MOMENTO QUALSIASI DEL SUO MOTO. (DESTRA)



L'UNICO MOMENTO MECCANICO ESTERNO È DATO DALLA FORZA DI GRAVITÀ TOTALE APPLICATA AL CENTRO DI MASSA $M = -(m_1+m_2)\,g\,r_{CM}\sin\alpha$

IL MOMENTO D'INERZIA DEL SISTEMA È $I = m_1L^2 + m_2L^2 = (m_1+m_2)L^2$

SCRIVIAMO $M = I\ddot{\alpha}$

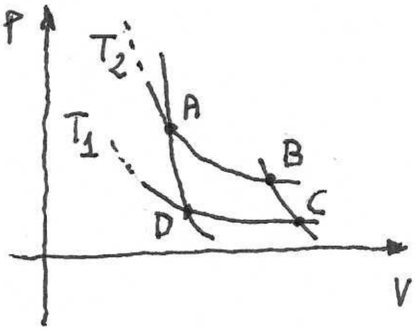
$$-\cancel{(m_1+m_2)}\,g\,r_{CM}\sin\alpha = \cancel{(m_1+m_2)}\,L^2\ddot{\alpha}$$

PER PICCOLE OSCILLAZIONI

$$\ddot{\alpha} + \frac{g\,r_{CM}}{L^2}\,\alpha = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g\cancel{L}}{L^{\cancel{2}}}\sqrt{\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\left(\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right)^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\sqrt{\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\left(\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right)^2}}}$$



CHIAMIAMO T_1 E T_2 LA TEMPERATURA DELLE DUE ISOTERME.

$B \to C$ ADIABATICA $\to P_B V_B^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma}$ (1) $\gamma = \frac{7}{5}$

$D \to A$ $PV^3 = \text{COST} \to PV^3 = P_D V_D^3 = P_A V_A^3$ (2)

CALCOLIAMO I CALORI SCAMBIATI SULLE ISOTERME E SU $D \to A$

$A \to B$ $\quad Q_{AB} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$ CALORE "CALDO"

$B \to C$ $\quad Q_{BC} = 0$

$C \to D$ $\quad Q_{CD} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) <$ CALORE "FREDDO"

$D \to A$ $\quad \Delta U_{DA} = n c_V (T_2 - T_1) = \frac{nR(T_2 - T_1)}{(\gamma - 1)}$

$$W_{DA} = -\int_D^A P\,dV \overset{(2)}{=} -P_A V_A^3 \int_D^A \frac{dV}{V^3} = -P_A V_A^3 \left[-\frac{1}{2} V^{-2}\right]_D^A =$$

$$= \frac{1}{2} P_A V_A^3 \left(\frac{1}{V_A^2} - \frac{1}{V_D^2}\right) = \frac{1}{2} P_A V_A \left(1 - \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^2\right) = \frac{1}{2} nRT_2 \left(1 - \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^2\right)$$

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} - W_{DA} = \frac{nR(T_2 - T_1)}{(\gamma - 1)} - \frac{1}{2} nRT_2 \left(1 - \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^2\right)$$

QUESTO CALORE È SEMPRE > 0 PERCHÉ $PV^3 = \text{COST}$ È PIÙ RIPIDA DI UN'ADIABATICA, TENDE QUINDI AD UNA ISOCORA.

$$\eta = 1 - \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{(-Q_{CD})}{(Q_{AB} + Q_{DA})} = 1 - \frac{\cancel{nR}T_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{\cancel{nR}T_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + \frac{\cancel{nR}(T_2 - T_1)}{(\gamma - 1)} - \frac{1}{2}\cancel{nR}T_2\left(1 - \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^2\right)}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{T_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + \frac{(T_2 - T_1)}{(\gamma - 1)} - \frac{1}{2} T_2 \left(1 - \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^2\right)}$$

RIMANGONO DA TROVARE LE INCOGNITE T_1, T_2, V_D ★

- PER LA LEGGE DEI GAS PERFETTI $T_2 = \frac{P_A V_A}{nR}$ ★
- DALLA (1) $P_B V_B^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma}$ $\quad P_B V_B V_B^{\gamma-1} = P_C V_C V_C^{\gamma-1}$ $\quad \cancel{nR}T_2 V_B^{\gamma-1} = \cancel{nR}T_1 V_C^{\gamma-1}$

QUINDI $T_1 = T_2 \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \frac{P_A V_A}{nR} \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\frac{2}{5}}$ ★

- DALLA (2) $P_A V_A^3 = P_D V_D^3$ $\quad P_A V_A V_A^2 = P_D V_D V_D^2$ $\quad \cancel{nR}T_2 V_A^2 = \cancel{nR}T_1 V_D^2$

QUINDI $V_D = V_A \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = V_A \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = V_A \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\frac{2}{10}}$ ★