ES. 1 - (SOLUZIONE #1)

I DUE KART SVOLGONO MOTI CIRCOLARI UNIFORMI CON $\omega_A = \frac{V}{R}$ E $\omega_B = \frac{kV}{2R} > \omega_A$
QUINDI LE LORO POSIZIONI IN FUNZIONE DEL TEMPO SONO:

$$\begin{cases} x_A = R\cos(\omega_A t) \\ y_A = R\sin(\omega_A t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B = 2R\cos(\omega_B t) \\ y_B = 2R\sin(\omega_B t) \end{cases}$$

E LA DISTANZA TRA I DUE VALE

$$D \equiv \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + x_A^2 + y_A^2 - 2x_A x_B - 2y_A y_B} =$$

$$= \sqrt{4R^2\cos^2(\omega_B t) + 4R^2\sin^2(\omega_B t) + R^2\cos^2(\omega_A t) + R^2\sin^2(\omega_B t) - 4R^2\left(\cos(\omega_B t)\cos(\omega_A t) + \sin(\omega_B t)\sin(\omega_A t)\right)} =$$

$$= \sqrt{4R^2 + R^2 - 4R^2\cos((\omega_B - \omega_A)t)}$$ E DEFINITO $\omega_R \equiv (\omega_B - \omega_A) > 0$

$$D = R\sqrt{5 - 4\cos(\omega_R t)}$$

L'AUMENTO O LA DIMINUZIONE DELLA DISTANZA SI VALUTANO CON LA DERIVATA $\dot{D}$

$$\dot{D} \equiv \frac{dD}{dt} = \frac{2\cancel{4}R\omega_R\sin(\omega_R t)}{\cancel{2}\sqrt{5 - 4\cos(\omega_R t)}}$$

IL TESTO CHIEDE DI TROVARE IL MOMENTO IN CUI SI HA LA MASSIMA RAPIDITÀ DELL'AUMENTO DI D, CIOÈ IL MASSIMO DI $\dot{D}$
QUINDI DERIVIAMO $\dot{D}$ RISPETTO AL TEMPO E UGUAGLIAMO A ZERO

$$\ddot{D} \equiv \frac{d\dot{D}}{dt} = \frac{2R\omega_R}{[5 - 4\cos(\omega_R t)]}\left\{\omega_R\cos(\omega_R t)\sqrt{5 - 4\cos(\omega_R t)} - \sin(\omega_R t)\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\omega_R\sin(\omega_R t)}{\cancel{2}\sqrt{5 - 4\cos(\omega_R t)}}\right\} = 0$$

IL TERMINE PRIMA DELLA PARENTESI GRAFFA È SEMPRE $\neq 0$. MOLTIPLICHIAMO IL TERMINE IN PARENTESI GRAFFA PER $\sqrt{5 - 4\cos(\omega_R t)}$ E SI HA

$$\omega_R\left(5\cos(\omega_R t) - 4\cos^2(\omega_R t) - 2\sin^2(\omega_R t)\right) = 0$$ DEFINIAMO $z = \cos(\omega_R t)$

$$5z - 4z^2 - 2 + 2z^2 = 0 \Rightarrow 2z^2 - 5z + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$$

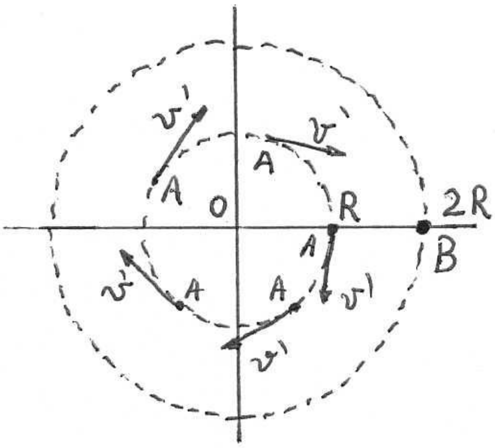
QUINDI $z = 2$ (NON ACCETTABILE) OPPURE $z = \frac{1}{2}$. QUINDI

$\cos(\omega_R t) = \frac{1}{2} \rightarrow \omega_R t = \pm\frac{\pi}{3} + N(2\pi)$ DOVE SI HANNO I MASSIMI DI $\dot{D}$ PER LE SOLUZIONI COL + ED I MINIMI PER QUELLE COL −
IL PRIMO MASSIMO SI HA PER $\omega_R t^* = +\frac{\pi}{3}$

$$t^* = \frac{\pi}{3\omega_R} = \frac{\pi}{3\left(\frac{kV}{2R} - \frac{V}{R}\right)} \Rightarrow t^* = \frac{2\pi R}{3V(k-2)}$$

ES. 1 - (SOLUZIONE #2)

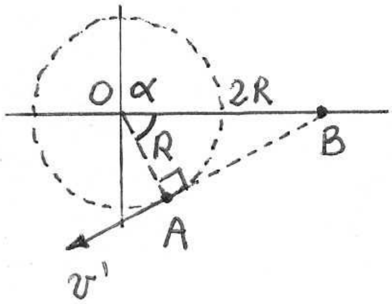
I DUE KART SVOLGONO MOTI CIRCOLARI UNIFORMI CON $\omega_A = \frac{V}{R}$ E $\omega_B = \frac{KV}{2R} > \omega_A$



METTIAMOCI NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE COL KART B, IL QUALE RUOTA CON VELOCITÀ ANGOLARE ω_B -

IN QUESTO SISTEMA DI RIFERIMENTO B È FERMO A DISTANZA 2R DAL CENTRO MENTRE A SI MUOVE SULLA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R CON VELOCITÀ ANGOLARE $\omega'_A = \omega_A - \omega_B$. ω'_A RISULTA ESSERE NEGATIVO, CIÒ VUOL DIRE CHE A GIRA IN SENSO <u>ORARIO</u>, CON VELOCITÀ CHE VALE IN MODULO $v' = |\omega_A| R$

IN QUESTO SISTEMA DI RIFERIMENTO RISULTA IMMEDIATO IDENTIFICARE IL MOMENTO IN CUI LA RAPIDITÀ DI ALLONTANAMENTO TRA I DUE



KART È MASSIMA. DATO CHE B È FERMO ED A SI MUOVE CON VELOCITÀ DI MODULO v' COSTANTE, ALLORA LA MASSIMA RAPIDITÀ DI AUMENTO DELLA DISTANZA TRA A E B SI HA QUANDO LA VELOCITÀ DI A È DIRETTA ESATTAMENTE IN VERSO CONTRARIO ALLA CONGIUNGENTE $\overline{AB}$ (VEDI FIGURA). IL TRIANGOLO OBA RISULTA AVERE IL LATO $\overline{OB}$ LUNGO 2R, IL LATO $\overline{OA}$ LUNGO R ED È RETTO IN A, VISTO CHE $\overline{AB}$ È DIRETTO COME v' IL QUALE È TANGENTE ALLA CIRC.

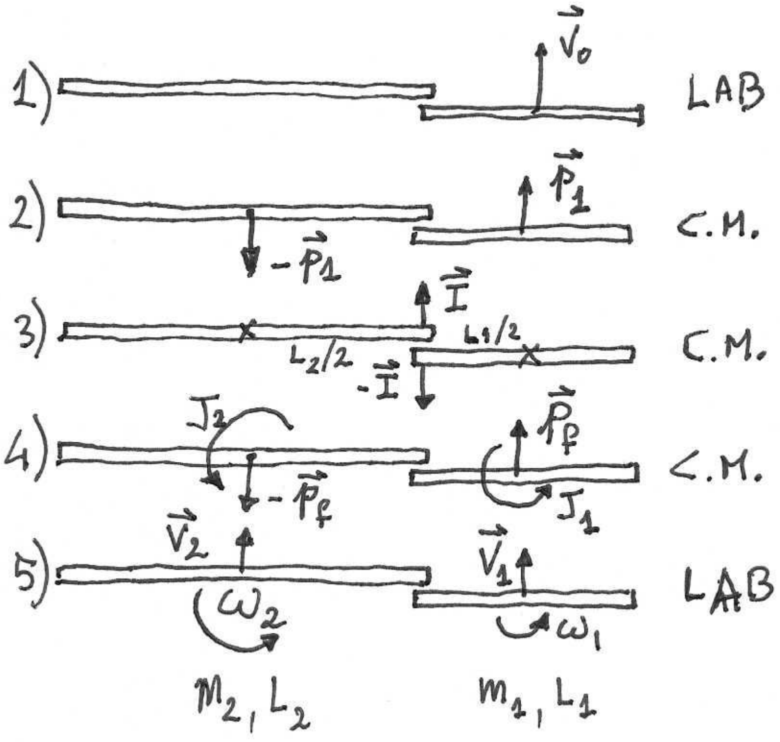
SI HA $\cos\alpha = 1/2 \rightarrow \alpha = 60° = \pi/3$ -

SE CONSIDERIAMO IL SEGNO + CONVENZIONALE PER LE ROTAZIONI, IL TEMPO CERCATO LO TROVIAMO IMPONENDO CHE A HA COMPIUTO UN MOTO ANGOLARE DI $-\alpha$ A VELOCITÀ ANGOLARE ω'_A

$$\omega'_A t^* = -\alpha = -\frac{\pi}{3}$$

$$t^* = -\frac{\pi}{3\omega'_A} = -\frac{\pi}{3\left(\frac{V}{R} - \frac{KV}{2R}\right)} \Rightarrow t^* = \frac{2\pi R}{3V(K-2)}$$

ES. 2



L'URTO È COMPLICATO. CONVIENE PASSARE NEL SIST. DI RIF. DEL C.M. (2) DOVE LE QUANTITÀ DI MOTO SONO SEMPRE UGUALI E OPPOSTE, RISOLVERE L'URTO (3), TROVARE QUANTITÀ DI MOTO E MOMENTO ANGOLARE RISPETTO AL C.M. [CHE CHIAMEREMO J PER NON CONFONDERCI CON LE LUNGHEZZE] (4) E POI TORNARE AL S.R. DI PARTENZA PER RICAVARE LE RISPOSTE (5). INTANTO $\vec V_{CM} = \frac{m_1 \vec V_0}{m_1+m_2}$ PER CUI

$$\vec P_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec V_0$$

CONSIDERANDO L'IMPULSO SCAMBIATO $\vec I$ ED APPLICATO IL TEOREMA DELL'IMPULSO ANGOLARE AD OGNUNA DELLE DUE ASTE SI OTTIENE

$$I \cdot \frac{L_1}{2} = J_1 \qquad I \cdot \frac{L_2}{2} = J_2 \longrightarrow J_1 = \frac{J_2 L_1}{L_2}$$

SCRIVIAMO ORA LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA UTILIZZANDO IL 2° TH DI KOENIG

$$\frac{P_1^2}{\cancel{2}m_1} + \frac{P_1^2}{\cancel{2}m_2} = \frac{P_f^2}{\cancel{2}m_1} + \frac{P_f^2}{\cancel{2}m_2} + \left(\frac{J_2 L_1}{L_2}\right)^2 \frac{1}{\cancel{2}I_1} + \frac{J_2^2}{\cancel{2}I_2} \qquad \text{CON } I_1 = \frac{1}{12} m_1 L_1^2 \quad I_2 = \frac{1}{12} m_2 L_2^2$$

$$P_1^2 \cancel{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} = P_f^2 \cancel{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} + \frac{12}{L_2^2} J_2^2 \cancel{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \rightarrow P_1^2 - P_f^2 = \frac{12}{L_2^2} J_2^2 \quad (1)$$

SCRIVIAMO ORA ANCORA NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA, LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE PRENDENDO COME POLO IL PUNTO DI CONTATTO

$$P_1 \frac{L_1}{2} + P_1 \frac{L_2}{2} = P_f \frac{L_1}{2} + P_f \frac{L_2}{2} + J_2 \frac{L_1}{L_2} + J_2 \rightarrow \frac{P_1}{2}\cancel{(L_1+L_2)} = \frac{P_f}{2}\cancel{(L_1+L_2)} + \frac{J_2}{L_2}\cancel{(L_1+L_2)}$$

$$P_1 - P_f = \frac{2J_2}{L_2} \quad (2)$$

DIVIDENDO LA (1) PER LA (2) SI OTTIENE $P_1 + P_f = \frac{6J_2}{L_2}$ (1/2)

DA CUI $P_f = \frac{6J_2}{L_2} - P_1$ CHE SOSTITUITO NELLA (2) DÀ $P_1 - \frac{6J_2}{L_2} + P_1 = \frac{2J_2}{L_2}$

CIOÈ $J_2 = \frac{L_2}{4} P_1 = \frac{L_2}{4} \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} V_0$ (3) E SUBITO $J_1 = \frac{L_1}{L_2} J_2 = \frac{L_1}{4} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} V_0$ (4)

SOSTITUIAMO LA (3) NELLA (1/2) $P_f = -P_1 + \frac{6J_2}{L_2} = -P_1 + \frac{6}{\cancel{L_2}} \frac{\cancel{L_2} P_1}{4} = \frac{P_1}{2}$

PER CUI $\vec P_f = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} \vec V_0$ E LE DUE VELOCITÀ FINALI NEL CENTRO DI MASSA VALGONO

$\vec V_1' = \frac{\vec P_f}{m_1}$ (5) E $\vec V_2' = -\frac{\vec P_f}{m_2}$ (6) TROVIAMO LE INCOGNITE FINALI –

A) $\vec V_1 = \vec V_1' + \vec V_{CM} = \frac{1}{2} \frac{m_2}{(m_1+m_2)} \vec V_0 + \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \vec V_0 = \frac{2m_1 + m_2}{2(m_1+m_2)} \vec V_0$ USATA LA (5)

B) $\vec V_2 = \vec V_2' + \vec V_{CM} = -\frac{1}{2} \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \vec V_0 + \frac{m_1}{(m_1+m_2)} \vec V_0 = \frac{m_1}{2(m_1+m_2)} \vec V_0$ USATA LA (6)

C) $\omega_1 = \frac{J_1}{I_1} = \frac{12}{\cancel{m_1} L_1^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{L_1}}{4} \frac{\cancel{m_1} m_2}{(m_1+m_2)} V_0 = \frac{3 m_2 V_0}{L_1 (m_1+m_2)}$ USATA LA (4)

D) $\omega_2 = \frac{J_2}{I_2} = \frac{12}{\cancel{m_2} L_2^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{L_2}}{4} \frac{m_1 \cancel{m_2}}{(m_1+m_2)} = \frac{3 m_1 V_0}{L_2 (m_1+m_2)}$ USATA LA (3)

ES. 3

IL RISCALDAMENTO DELL' AZOTO DA PARTE DELLA RESISTENZA AVVIENE A PRESSIONE COSTANTE $P = P_0 + \frac{mg}{S}$

DI CONSEGUENZA $Q = n c_p \Delta T$ (1)

SCRIVIAMO IL 1° PRINCIPIO

$\Delta U = Q + W \rightarrow n c_v \Delta T = n c_p \Delta T - P \Delta V \rightarrow$

$\rightarrow n(c_p - c_v) \Delta T = P \cdot S \cdot \Delta h \rightarrow n \Delta T = \frac{P \cdot S}{R} \Delta h$ (2)

SOSTITUIAMO LA (2) NELLA (1)

$$Q = c_p \frac{PS}{R} \Delta h = \frac{7}{2} PS \Delta h$$

IL CALORE FORNITO AL GAS È LA POTENZA TERMICA K DELLA RESISTENZA PER IL TEMPO DI ACCENSIONE

$$Q = K t^*$$

QUINDI

$$K t^* = \frac{7}{2} PS \Delta h$$

$$t^* = \frac{7}{2} \frac{(P_0 S + mg)}{K} \Delta h$$