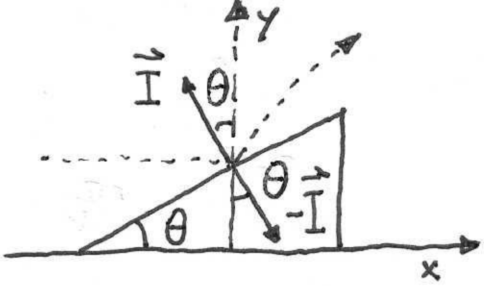


DURANTE L'URTO LA MASSA m RISENTE DI UN IMPULSO $\vec{I}$ INCLINATO DI UN ANGOLO θ RISPETTO ALLA VERTICALE, MENTRE $-\vec{I}$ È APPLICATO AD M. CHIAMIAMO v_x E v_y LE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ DI m APPENA DOPO L'URTO E V_x LA VELOCITÀ ORIZZONTALE DI M. APPLICHIAMO 3 VOLTE IL TEOREMA DELL'IMPULSO E LA CONSERVAZIONE DI E. OTTENIAMO:

$$\begin{cases} I\sin\theta = MV_x & (1) \\ mv_0 - I\sin\theta = mv_x & (2) \\ I\cos\theta = mv_y & (3) \\ mv_0^2 = mv_x^2 + mv_y^2 + MV_x^2 & (4) \end{cases}$$

SOMMIAMO (1) E (2) PER OTTENERE LA CONSERVAZIONE DI P_x

$$mv_0 = mv_x + MV_x \rightarrow$$

$$v_x = v_0 - \frac{M}{m}V_x \quad (5)$$

DIVIDIAMO LA (1) PER LA (2) $\quad tg\,\theta = \frac{MV_x}{m v_y} \rightarrow v_y = \frac{M}{m}V_x \cot g\,\theta \quad (6)$

SOSTITUIAMO (5) E (6) NELLA (4)

$$\cancel{mv_0^2} = \cancel{mv_0^2} + \frac{M^2}{m}V_x^2 - 2Mv_0V_x + \frac{M^2}{m}V_x^2\cot g^2\theta + MV_x^2$$

$$2v_0 = V_x\left(1 + \frac{M}{m}(1+\cot g^2\theta)\right) \quad [\text{MA } (1+\cot g^2\theta) = 1/\sin^2\theta]$$

$$V_x = \frac{2mv_0\sin^2\theta}{(M + m\sin^2\theta)}$$ SOSTITUIAMO V_x NELLA (5) E NELLA (6)

$$v_x = v_0\left(1 - \frac{2M\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}\right) = v_0\left(\frac{M + m\sin^2\theta - M\sin^2\theta - M(1-\cos^2\theta)}{M+m\sin^2\theta}\right) =$$

$$= v_0\left(\frac{M(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + m\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta}\right) = v_0\left(\frac{M\cos(2\theta) + m\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta}\right) \quad (7)$$

$$v_y = v_0\left(\frac{2M\sin^2\theta\cot g\,\theta}{M+m\sin^2\theta}\right) = v_0\left(\frac{2M\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}\right) = v_0\left(\frac{M\sin(2\theta)}{M + m\sin^2\theta}\right) \quad (8)$$

UNA VOLTA TROVATE v_x E v_y, ESSENDO $t=0$ IL MOMENTO DELL'URTO SI HA PER m

$$y(t) = h + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{E PONENDO } y(t^*)=0 \quad t^* = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g}$$

DOVE SI È SCELTA LA RADICE CON $t^* > 0$
PER LA X DELL'ATTERRAGGIO SI HA DUNQUE

$$x_{ATT} = v_x t^* = \frac{v_x}{g}\left(v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}\right)$$

TRALASCIAMO DI SOSTITUIRE LE ESPRESSIONI (7) E (8) PERCHÈ COMPLICATE

SIA $\vec{F}_g = \frac{G^* M m}{r^n}(-\hat{r})$ LA FORZA ESERCITATA DAL PIANETA DI MASSA M SUL SATELLITE DI MASSA m, UTILIZZANDO UN SISTEMA DI COORDINATE CENTRATE SUL PIANETA.
PER LA VELOCITÀ SU UN'ORBITA CIRCOLARE ABBIAMO:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_{CENTRIPETA} \rightarrow \frac{G^* M \cancel{m}}{r^n} = \frac{\cancel{m} V^2}{r} \rightarrow v^2 = G^* M\, r^{(1-n)} \quad (1)$$

E QUINDI L'ENERGIA CINETICA $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{G^* M m}{2} r^{(1-n)}$ (2)

PER L'ENERGIA POTENZIALE $dU = -\vec{F}_g \cdot d\vec{l} = \frac{G^* M m}{r^n} \hat{r} \cdot d\vec{l}$

QUINDI $dU = \frac{G^* M m}{r^n} dr \rightarrow U = G^* M m \int r^{-n} dr = \frac{G^* M m}{(-n+1)} r^{(1-n)} + U_0$ (3)

ALLORA L'ENERGIA MECCANICA SI HA SOMMANDO (2) E (3).
PONIAMO $U_0 = 0$

$$E = \frac{1}{2} G^* M m\, r^{(1-n)} - \frac{G^* M m}{(n-1)} r^{(1-n)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}\right) G^* M m\, r^{(1-n)}$$

PER AVERE E INDIPENDENTE DA r IL TERMINE TRA PARENTESI DEVE ESSERE NULLO, QUINDI $\frac{1}{2} = \frac{1}{n-1}$ $\quad n-1=2 \rightarrow \boxed{n=3}$

[IN REALTÀ DOBBIAMO ANALIZZARE IL CASO $n=1$ PERCHÉ L'INTEGRALE DELLA (3) VALE PER $n \neq 1$. SE $n=1$

$v^2 = G^* M$ (VEDI (1)) = COSTANTE $\rightarrow K$ = COSTANTE

$U = G^* M m [\ln(r) - U_0]$ (VEDI (3)) $\rightarrow U$ = NON COSTANTE

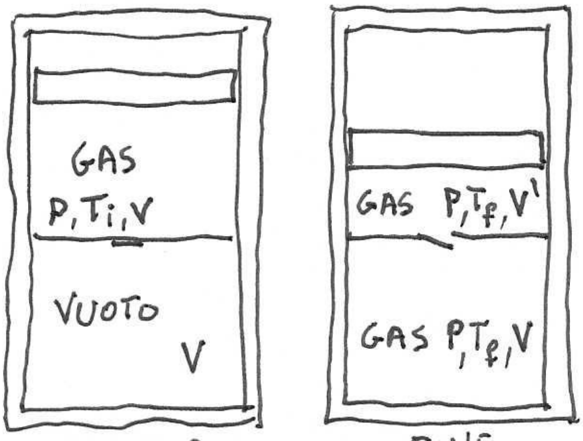
$n=1$ NON VA BENE]

a) $n=3$

b) $E=0$

c) $L = m v r$ $\quad$ ma $v = \sqrt{v^2}$ (1) $\rightarrow L = m\sqrt{\frac{G^* M}{\cancel{r}}}\, \cancel{r}$ INDIPENDENTE DA r !

d) PARLIAMO SOLO DI ORBITE CIRCOLARI. TUTTE LE ORBITE HANNO LA STESSA ENERGIA E TUTTE LE ORBITE HANNO LO STESSO MOMENTO ANGOLARE. QUESTO RENDE MOLTO FACILI I CAMBIAMENTI DI OBITA, MA PURTROPPO ANCHE QUELLI INVOLONTARI. LE ORBITE SAREBBERO TUTTE FACILMENTE ACCESSIBILI MA PROBABILMENTE INSTABILI.



INIZIO FINE

APPLICHIAMO IL 1° PRINCIPIO AL GAS. NON C'È SCAMBIO DI CALORE CON L'ESTERNO, QUINDI

$$dU = dW \rightarrow nc_v\,dT = -P\,dV \rightarrow nc_v\,\Delta T = -P\,\Delta V \rightarrow$$

$$nc_v(T_f - T_i) = -P(V' - V)$$

IL GAS FA UNA TRASFORMAZIONE CON $P_{\text{INIZIALE}} = P_{\text{FINALE}}$

$$\frac{\cancel{P}(V'+V)}{T_f} = nR = \frac{PV}{T_i} \qquad V' = V\left(\frac{T_f}{T_i} - 1\right)$$

$$nc_v(T_f - T_i) = P(V - V') = PV\left(1 - \frac{T_f}{T_i} + 1\right) = nRT_i\left(2 - \frac{T_f}{T_i}\right) \quad (1)$$

UGUAGLIAMO DIRETTAMENTE IL PRIMO E L'ULTIMO TERMINE IN (1)

$$\cancel{n}c_v(T_f - T_i) = \cancel{n}RT_i\left(2 - \frac{T_f}{T_i}\right)$$

$$\frac{3\cancel{R}}{2}(T_f - T_i) = \cancel{R}(2T_i - T_f)$$

PER UN GAS MONOATOMICO $c_v = \frac{3}{2}R$ E $c_p = \frac{5}{2}R$

$$T_f - T_i = \frac{4}{3}T_i - \frac{2}{3}T_f$$

$$\frac{5}{\cancel{3}}T_f = \frac{7}{\cancel{3}}T_i$$

$$T_f = \frac{7}{5}T_i$$

LA VARIAZIONE DI ENTROPIA DEL GAS COINCIDE CON QUELLA DELL'UNIVERSO PERCHÉ IL CONTENITORE È ISOLATO

SI HA $\frac{V_F}{V} = \frac{T_f}{T_i} = \frac{7}{5}$, QUINDI

$$\Delta S = nc_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = n(c_v + R)\ln\left(\frac{7}{5}\right)$$

$$\Delta S = \frac{PV}{\cancel{R}T_i}\cdot\frac{5\cancel{R}}{2}\ln\left(\frac{7}{5}\right) \qquad \Delta S = \frac{5}{2}\frac{PV}{T_i}\ln\left(\frac{7}{5}\right)$$