SIA ℓ LA LUNGHEZZA DELLA MOLLA. SI HA $\ell = \sqrt{h^2+x^2}$
L'ENERGIA POTENZIALE DEL SISTEMA VALE $U = \frac{1}{2} K (\ell - \ell_0)^2$
QUINDI $\Rightarrow$ $U = \frac{1}{2} K \left(h^2 + x^2 + \ell_0^2 - 2\ell_0 \sqrt{h^2+x^2} \right)$

PER RISPONDERE ALLA DOMANDA a), DALLA POSIZIONE INIZIALE FINO AL PASSAGGIO PER O SI CONSERVA L'ENERGIA MECCANICA, PER CUI

$$\Delta E = 0 \qquad U_i + K_i = U_f + K_f \quad \rightarrow \quad U(x) + \phi = U(0) + \frac{1}{2} m V^2$$

CIOÈ

$$\cancel{\frac{1}{2}} K \left(\cancel{h^2} + x^2 + \cancel{\ell_0^2} - 2\ell_0 \sqrt{h^2+x^2} \right) = \cancel{\frac{1}{2}} K \left(\cancel{h^2} + \cancel{\ell_0^2} - 2\ell_0 h \right) + \cancel{\frac{1}{2}} m V^2$$

$$V^2 = \frac{K}{m} \left(x^2 - 2\ell_0 \left(\sqrt{h^2+x^2} - h \right) \right) \qquad V = \sqrt{\frac{K}{m} \left(x^2 - 2\ell_0 \left(\sqrt{h^2+x^2} - h \right) \right)}$$

PER RISPONDERE ALLA DOMANDA b) SCRIVIAMO DI NUOVO U

$$U = \frac{1}{2} K \left(h^2 + x^2 + \ell_0^2 - 2\ell_0 h \left(1 + \frac{x^2}{h^2} \right)^{1/2} \right)$$

DOVE h^2 E ℓ_0^2 SONO COSTANTI, QUINDI POSSIAMO ELIMINARLE. IL TERMINE ALLA $1/2$ LO SVILUPPIAMO CON LA FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$

$$U = \frac{K}{2} \Big(x^2 - \underbrace{2\ell_0 h}_{\text{COSTANTE}} - \cancel{2}\ell_0 h \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \frac{x^2}{h^2} \Big) = \frac{K}{2} \left(x^2 - \frac{\ell_0}{h} x^2 \right) = \frac{K}{2} \left(1 - \frac{\ell_0}{h} \right) x^2$$

POI SI HA $K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$. L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA PER CUI $\frac{d}{dt}(U + K) = 0$. CIOÈ:

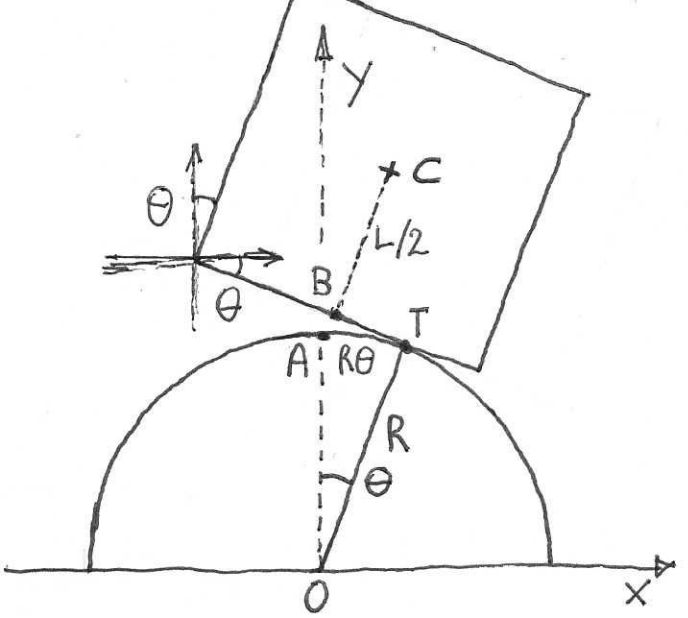
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{K}{2} \left(1 - \frac{\ell_0}{h} \right) x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = 0$$

$$\frac{K}{\cancel{2}} \left(1 - \left(\frac{\ell_0}{h} \right) \right) \cancel{2} x \cancel{\dot{x}} + \frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2} \cancel{\dot{x}} \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{h} \right) x = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{h} \right)}$$

$$\Downarrow$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K \left(1 - \frac{\ell_0}{h} \right)}}$$



PRENDIAMO IL CUBO INCLINATO DI UN ANGOLO θ. SIA T IL PUNTO DI TANGENZA. PER LA CONDIZIONE DI NON-STRISCIAMENTO L'ARCO $\widehat{AT}$ ED IL SEGMENTO $\overline{BT}$ HANNO UGUALE LUNGHEZZA PARI A $R\theta$.
[A e B COINCIDONO NELLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO]

CALCOLO LA Y DEL CENTRO C DEL CUBO COME

$$Y(C) = \overline{OT}_y + \overline{TB}_y + \overline{BC}_y$$

$$Y(C) = R\cos\theta + R\theta\sin\theta + \frac{L}{2}\cos\theta$$

PER PICCOLI θ $\sin\theta \simeq \theta$ $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$Y(C) \simeq R - R\frac{\theta^2}{2} + R\theta^2 + \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\frac{\theta^2}{2} = \left(R + \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{R}{2} - \frac{L}{4}\right)\theta^2$$

QUESTA È UNA PARABOLA COL VERTICE RIVOLTO VERSO L'ALTO SE $\left(\frac{R}{2} - \frac{L}{4}\right) > 0$, QUINDI C SALE SE $\left(\frac{R}{2} - \frac{L}{4}\right) > 0$ PER PICCOLI θ, QUINDI LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO È STABILE $\equiv$ SIAMO IN UN MINIMO DEL POTENZIALE. QUINDI $\frac{R}{2} > \frac{L}{4}$ $\underline{L < 2R}$

PER LA DOMANDA b) SCRIVIAMO

$$U = mg\,Y(C) = \underbrace{mg(R+2L)}_{\text{COSTANTE}} + mg\left(\frac{R}{2} - \frac{L}{4}\right)\theta^2$$

POI DERIVIAMO $Y(C) \Rightarrow \dot{Y}(C) = \left(\frac{R}{2} - \frac{L}{4}\right)2\theta\dot{\theta}$ ← $\underline{2^\circ \text{ ORDINE}}$

SCRIVIAMO $X(C) = R\sin\theta - R\theta\cos\theta + \frac{L}{2}\sin\theta \approx \cancel{R\theta} - \cancel{R\theta} + R\frac{\theta^3}{2} + \frac{L}{2}\theta$

$\dot{X}(C) = \frac{3R}{2}\theta^2\dot{\theta} + \frac{L}{2}\dot{\theta}$ ← $\underline{3^\circ \text{ ORDINE}}$ + $\underline{1^\circ \text{ ORDINE}}$

ALLORA DI $\dot{X}(C)$ E $\dot{Y}(C)$ TENIAMO SOLO IL TERMINE DEL 1° ORDINE

$V(C) \simeq \frac{L}{2}\dot{\theta}$ SCRIVIAMO ORA $\frac{d}{dt}(U+K) = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(U + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\cancel{m}g\left(\frac{R}{2} - \frac{L}{4}\right)\theta^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}\cancel{m}L^2\dot{\theta}^2\right) = 0$$

$$\frac{(2R-L)}{\cancel{4}}g\,\cancel{2}\theta\cancel{\dot{\theta}} + \frac{7}{\cancel{24}\,6}L^2\cancel{2}\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{6g(2R-L)}{7L^2}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6g(2R-L)}{7L^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$T = 2\pi L\sqrt{\frac{7}{6g(2R-L)}}$$

APPLICHIAMO AL SISTEMA IL 1° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA TRA LA SITUAZIONE INIZIALE E QUELLA FINALE

① $U_f - U_i = Q + W$ E VALUTIAMO I VARI TERMINI. SI PASSA DA 3 MOLI DI GAS BIATOMICI A 2 MOLI DI GAS POLIATOMICO, QUINDI

$$U_f - U_i = \cancel{2} \cdot \frac{6}{\cancel{2}} R T_f - 3 \cdot \frac{5}{2} R T_0 \quad ②$$

DURANTE TUTTO IL PROCESSO LA PRESSIONE RIMANE COSTANTE E VALE $P_0 = P_A + \frac{mg}{S}$ ③, DETTO V_f IL VOLUME FINALE $= Sh$ SI HA ALLORA PER LA TEMP. FINALE $T_f = \frac{P_0 V_f}{nR} = \frac{P_0 S h}{2R}$ E SOSTITUENDO NELLA ② $\Rightarrow U_f - U_i = \frac{6 P_0 S h}{2} - \frac{15}{2} R T_0$. ④

PER Q IL CALCOLO È FACILE, VENGONO PRODOTTE 2 MOLI DI H_2O, OGNUNA DELLE QUALI APPORTA CALORE ΔE, QUINDI

$Q = 2 \Delta E$ ⑤

PER IL LAVORO $W = -P_0 \Delta V$ E DETTA h_0 LA QUOTA INIZIALE DEL PISTONE $W = -P_0 S (h - h_0)$ ⑥

h_0 SI TROVA DALL' EQ. DI STATO DEI GAS ALL'INIZIO

$P_0 \cdot S h_0 = 3 R T_0 \rightarrow h_0 = \frac{3 R T_0}{P_0 S}$ E SOSTITUENDO NELLA ⑥

$W = -P_0 S h + 3 R T_0$ ⑦

SOSTITUIAMO ④, ⑤ E ⑦ NELLA ①

$$\frac{6}{2} P_0 S h - \frac{15}{2} R T_0 = 2 \Delta E - P_0 S h + 3 R T_0$$

$$6 P_0 S h - 15 R T_0 = 4 \Delta E - 2 P_0 S h + 6 R T_0$$

$8 P_0 S h = 4 \Delta E + 21 R T_0$ E RICORDANDO LA ③

$$8 (P_A S + mg) h = 4 \Delta E + 21 R T_0$$

$$h = \frac{4 \Delta E + 21 R T_0}{8 (P_A S + mg)} \approx 1,467 \text{ m}$$