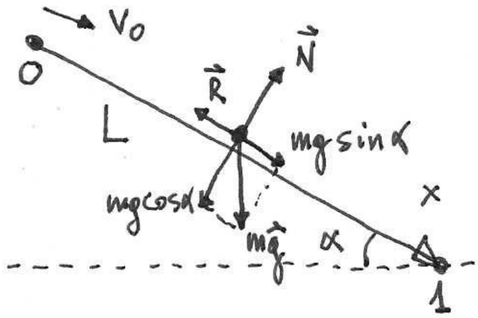


$|\vec{R}| = kV^2$ SCRIVIAMO IL 2° PRINCIPIO DI NEWTON PER m PROIETTATO SU X

$$mg\sin\alpha - kV_x^2 = m\frac{dV_x}{dt} = m\frac{dV_x}{dx}\frac{dx}{dt} = mV_x\frac{dV_x}{dx}$$

SEPARIAMO LE VARIABILI

$$\frac{m V_x dV_x}{mg\sin\alpha - kV_x^2} = dx$$

ORA INTEGRIAMO DA O (INIZIO DISCESA) A 1 (FINE DISCESA)

$$\int_{V_0}^{V_1} \frac{mV_x dV_x}{mg\sin\alpha - kV_x^2} = \int_0^1 dx = L$$

PER L'INTEGRALE A SINISTRA CAMBIAMO VARIABILE:

$$u \equiv mg\sin\alpha - kV_x^2 \quad ; \quad du = -k(2V_x)dV_x \rightarrow V_x dV_x = -\frac{1}{2k}du$$

QUANDO $V_x = V_0 \rightarrow u = mg\sin\alpha - kV_0^2$, QUANDO $V_x = V_1 \rightarrow u = mg\sin\alpha - kV_1^2$

SOSTITUIAMO IL TUTTO

$$-\frac{m}{2k}\int_{mg\sin\alpha - kV_0^2}^{mg\sin\alpha - kV_1^2} \frac{du}{u} = L \rightarrow -\frac{m}{2k}\ln\left(\frac{mg\sin\alpha - kV_1^2}{mg\sin\alpha - kV_0^2}\right) = L$$

$$\ln\left(\frac{mg\sin\alpha - kV_1^2}{mg\sin\alpha - kV_0^2}\right) = -\frac{2kL}{m}$$

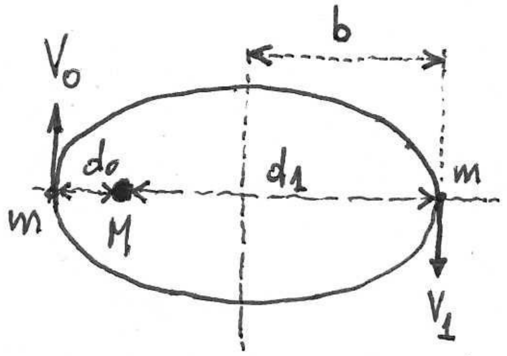
FACCIAMO L'ESPONENZIALE DI ENTRAMBI I MEMBRI

$$\frac{mg\sin\alpha - kV_1^2}{mg\sin\alpha - kV_0^2} = e^{-\frac{2kL}{m}}$$

$$mg\sin\alpha - kV_1^2 = mg\sin\alpha\, e^{-\frac{2kL}{m}} - kV_0^2 e^{-\frac{2kL}{m}}$$

$$kV_1^2 = kV_0^2 e^{-\frac{2kL}{m}} + mg\sin\alpha - mg\sin\alpha\, e^{-\frac{2kL}{m}}$$

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 e^{-\frac{2kL}{m}} + \frac{mg}{k}\sin\alpha\left(1 - e^{-\frac{2kL}{m}}\right)}$$



CERCHIAMO LA DISTANZA DELL'AFELIO. I DUE PUNTI DELL'ORBITA (PERIELIO E AFELIO) CHE DISTANO d_0 E d_1 DA M E IN CUI LE VELOCITÀ V_0 E V_1 SONO PERPENDICOLARI ALLA DISTANZA DEVONO SODDISFARE DUE EQUAZIONI: CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE $\cancel{m}V_0 d_0 = \cancel{m}V_1 d_1 \rightarrow V_1 = V_0\, d_0/d_1$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}V_0^2 - \frac{GM\cancel{m}}{d_0} = \frac{1}{2}\cancel{m}V_1^2 - \frac{GM\cancel{m}}{d_1} = \frac{1}{2}V_0^2\frac{d_0^2}{d_1^2} - \frac{GM}{d_1}$$

MOLTIPLICHIAMO TUTTO PER $2d_1^2$

$$(1)\quad d_1^2\left(V_0^2 - \frac{2GM}{d_0}\right) + 2GM\,d_1 - V_0^2 d_0^2 = 0$$

EQUAZIONE DI 2° GRADO IN d_1 USIAMO LA FORMULA RIDOTTA

$$d_1 = \frac{-GM \pm \sqrt{G^2M^2 + V_0^2 d_0^2\left(V_0^2 - \frac{2GM}{d_0}\right)}}{\left(V_0^2 - \frac{2GM}{d_0}\right)} = \frac{-GM \pm \sqrt{G^2M^2 + V_0^4 d_0^2 - 2GMV_0^2 d_0}}{\left(V_0^2 - \frac{2GM}{d_0}\right)}$$

$$d_1 = \frac{-GM \pm \sqrt{(GM - V_0^2 d_0)^2}}{\left(V_0^2 - \frac{2GM}{d_0}\right)} = \frac{-GM \pm (GM - V_0^2 d_0)}{\left(V_0^2 - \frac{2GM}{d_0}\right)}$$

$$d_1 = \begin{cases} + \;\; = \dfrac{-V_0^2 d_0}{\left(V_0^2 - \frac{2GM}{d_0}\right)} = \dfrac{V_0^2 d_0^2}{(2GM - V_0^2 d_0)} \\[2ex] - \;\; = \dfrac{-2GM + V_0^2 d_0}{V_0^2 - \frac{2GM}{d_0}} = d_0 \end{cases}$$

CHE È >0 ED È LA SOLUZIONE CHE CI INTERESSA

SOLUZIONE OVVIA MA DA SCARTARE

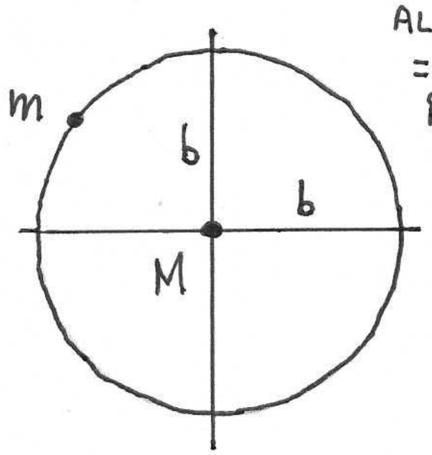
PER CUI IL SEMIASSE MAGGIORE DELL'ORBITA VALE $b = \frac{d_0 + d_1}{2}$

$$b = \frac{2GMd_0 - \cancel{V_0^2 d_0^2} + \cancel{V_0^2 d_0^2}}{2(2GM - V_0^2 d_0)} = \frac{GMd_0}{2GM - V_0^2 d_0}$$

[DA (1) SI POTEVA ARRIVARE DIRETTAMENTE QUI POICHÈ $\frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\frac{b}{2a}$]

ORA RIMANE DA CALCOLARE IL PERIODO.

LA 3ª LEGGE DI KEPLERO DICE CHE IL $(\text{PERIODO})^2$ È PROPORZIONALE AL $(\text{SEMIASSE MAGGIORE})^3$ QUALUNQUE SIA IL SEMIASSE MINORE



ALLORA IO SCELGO UN ELLISSE CON SEMIASSE MINORE = SEMIASSE MAGGIORE = b → CIRCONFERENZA.

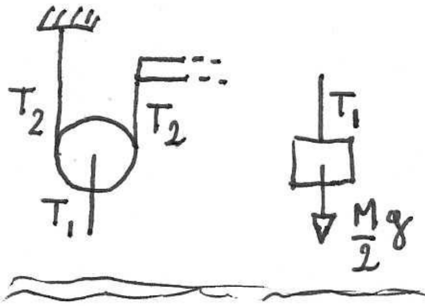
PER UN ORBITA CIRCOLARE $\frac{\cancel{m}V^2}{\cancel{b}} = \frac{GM\cancel{m}}{b^{\cancel{2}}}$

$V^2 = \frac{GM}{b}$ MA $V = \frac{2\pi b}{T}$

QUINDI $\frac{4\pi^2 b^2}{T^2} = \frac{GM}{b}$

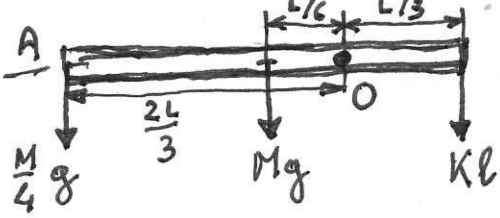
QUINDI $T = 2\pi\sqrt{\frac{b^3}{GM}}$ PER CUI

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(GM)^2 d_0^3}{(2GM - V_0^2 d_0)^3}}$$



NELLA SITUAZIONE DI EQUILIBRIO DA QUESTI DUE DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO SI DEDUCE CHE $T_1 = \frac{M}{2}g$ E $T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{M}{4}g$ →

DETTA ℓ LA LUNGHEZZA DELLA MOLLA SI HA:

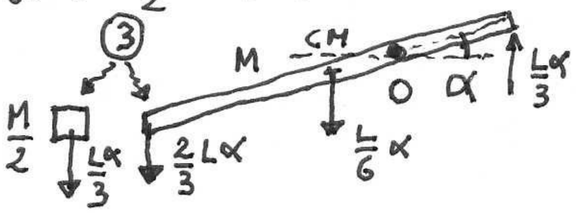


SCELTO IL VERSO ORARIO COME POSITIVO E PRENDENDO O COME POLO SI HA $-\frac{M}{\cancel{4}_2}g\frac{\cancel{2}\cancel{L}}{3} - Mg\frac{\cancel{L}}{6} + K\ell\frac{\cancel{L}}{3} = 0$

DA CUI $\frac{Mg}{\cancel{3}} = \frac{K\ell}{\cancel{3}} \to \ell = \frac{Mg}{K}$ (1) – CALCOLIAMO SUBITO IL MOMENTO D'INERZIA DELLA SBARRA RISPETTO AD O UTILIZZANDO IL TEOREMA DI STEINER $I_O = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 = ML^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{36}\right) = ML^2\left(\frac{3+1}{36}\right) \to I_O = \frac{ML^2}{9}$ (2)

NOTIAMO ANCHE CHE A CAUSA DELLA "DEMOLTIPLICA" DATA DALLA CARRUCOLA LO SPOSTAMENTO IN Y DELLA MASSA M/2 PER OGNI PICCOLA ROTAZIONE DELLA SBARRA È METÀ DELLO SPOSTAMENTO IN Y DELLA ESTREMITÀ A DELLA STESSA SBARRA $\Delta Y(Mg/2) = \frac{1}{2}\Delta Y(A)$ (3)

FACCIAMO UN DISEGNO DEGLI SPOSTAMENTI IN Y DEI PUNTI NOTEVOLI DEL SISTEMA SE LA SBARRA RUOTA DI UN PICCOLO ANGOLO α [INTORNO AD O].



PRENDIAMO $U_g = 0$ E $U_{MOLLA} = \frac{1}{2}K\ell^2$ NELLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO. SI HA

$$U(\alpha) = -\frac{M}{2}g\frac{L}{3}\alpha - Mg\frac{L}{6}\alpha + \frac{1}{2}K\left(\ell + \frac{L\alpha}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}MgL\alpha + \frac{1}{2}K\ell^2 + \frac{1}{2}K\frac{L^2\alpha^2}{9} + K\ell\frac{L\alpha}{3}$$

MA $\frac{1}{2}K\ell^2$ È COSTANTE E SI PUÒ SCARTARE [U È SEMPRE DEFINITO A MENO DI UNA COSTANTE]. USANDO LA (1) $K\ell\frac{L\alpha}{3} = \frac{1}{3}MgL\alpha$ PER CUI

$$U(\alpha) = -\cancel{\frac{1}{3}MgL\alpha} + \frac{1}{18}KL^2\alpha^2 + \cancel{\frac{1}{3}MgL\alpha} = \frac{1}{18}KL^2\alpha^2$$

– PER L'ENERGIA CINETICA:

$$K(\dot\alpha) = \frac{1}{2}\frac{M}{2}\left(\frac{1}{3}L\dot\alpha\right)^2 + \frac{1}{2}I_O\dot\alpha^2 \underset{(2)}{=} \frac{1}{36}ML^2\dot\alpha^2 + \frac{1}{18}ML^2\dot\alpha^2 = \frac{1}{12}ML^2\dot\alpha^2$$

PER CUI

$$E = \frac{1}{18}KL^2\alpha^2 + \frac{1}{12}ML^2\dot\alpha^2$$

MA SICCOME E SI CONSERVA, ALLORA $\to \frac{dE}{dt} = 0$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \to \frac{1}{\cancel{18}_3}K\cancel{L^2}\,\cancel{2}\alpha\cancel{\dot\alpha} + \frac{1}{\cancel{12}_2}M\cancel{L^2}\,\cancel{2}\cancel{\dot\alpha}\ddot\alpha = 0 \to \ddot\alpha + \frac{2}{3}\frac{K}{M}\alpha = 0$$

DA CUI

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{3M}} \to T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2K}} \to T = \pi\sqrt{\frac{6M}{K}}$$