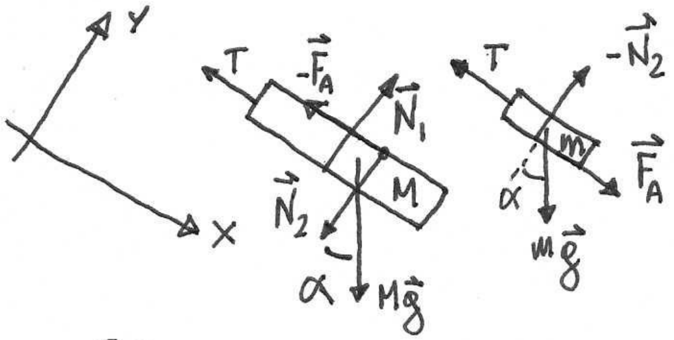


PRENDIAMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO PARALLELO E PERPENDICOLARE AL PIANO. SCRIVIAMO IL 2° PRINCIPIO PER M ED m SIA SU X CHE SU Y. TENIAMO PRESENTE CHE $a_x = -A_x$

$$m \begin{cases} (1)\ x)\quad F_A + mg\sin\alpha - T = m a_x = -m A_x \\ (2)\ y)\quad N_2 - mg\cos\alpha = 0 \rightarrow N_2 = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$M \begin{cases} (3)\ x)\quad -F_A + Mg\sin\alpha - T = M A_x \\ (4)\ y)\quad N_1 - N_2 - Mg\cos\alpha = 0 \xrightarrow{(2)} N_1 = (M+m) g\cos\alpha \end{cases}$$

SUPPONIAMO IL SISTEMA FERMO, QUINDI $A_x = 0$ SOTTRAIAMO (1) − (3)

$$F_A + mg\sin\alpha - \cancel{T} + F_A - Mg\sin\alpha + \cancel{T} = 0 \rightarrow 2F_A = (M-m)g\sin\alpha$$

$$F_A = \frac{(M-m)}{2} g\sin\alpha$$

PERCHÉ IL SISTEMA SIA FERMO SI DEVE AVERE $\rightarrow F_A \leq \mu_S N_2$ RICORDIAMO LA (2)

$$\frac{M-m}{2}\cancel{g}\sin\alpha \leq m\cancel{g}\cos\alpha \cdot \mu_S \rightarrow tg\alpha \leq \frac{2\mu_S m}{(M-m)}$$

PER CUI

$$\boxed{\alpha^* = arctg \frac{2\mu_S m}{(M-m)}}$$

ESAMINIAMO ORA IL CASO $\alpha > \alpha^* \rightarrow$ IL SISTEMA SI MUOVE, $F_A = \mu_D N_2$

LE EQ (1) E (3) DIVENTANO:

$$\begin{cases} (1)\ \mu_D mg\cos\alpha + mg\sin\alpha - T = -m A_x \\ (3)\ -\mu_D mg\cos\alpha + Mg\sin\alpha - T = M A_x \end{cases}$$

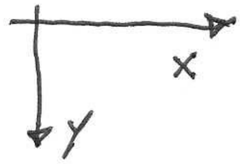
ESATTAMENTE COME PRIMA SOTTRAIAMO (1) − (3) PER ELIMINARE T

$$2\mu_D mg\cos\alpha - (M-m)g\sin\alpha = -(M+m)A_x$$

$$\boxed{A_x = \frac{(M-m)}{(M+m)} g\sin\alpha - 2\mu_D \frac{m}{(M+m)} g\cos\alpha}$$

SUL SISTEMA DEI TRE CORPI NON AGISCONO FORZE ESTERNE SU X, QUINDI P_x SI CONSERVA ED IN QUESTO CASO VALE ZERO. LE FORZE IN GIOCO SONO CONSERVATIVE QUINDI SI CONSERVA L'ENERGIA MECCANICA. DETTE $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ E $\vec{V}_0$ LE VELOCITÀ FINALI DI m_1, m_2 E M, OSSERVIAMO CHE $\vec{V}_1$ È DIRETTA SICURAMENTE VERSO SINISTRA, QUINDI $V_{1x} = -V_1$ MENTRE $V_{2x} = +V_2$. QUINDI:

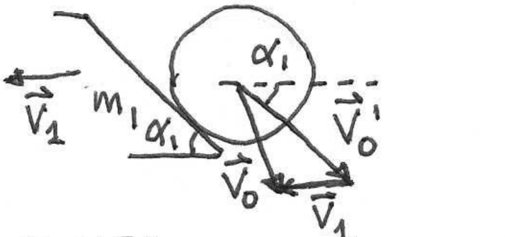
SCEGLIAMO COME S.R.



$$\begin{cases} ① \; -m_1 V_1 + M V_{0x} + m_2 V_2 = 0 \\ ② \; \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M (V_{0x}^2 + V_{0y}^2) + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = Mg(H-R) \end{cases}$$

ABBIAMO 5 INCOGNITE, QUINDI SERVONO 3 EQ DI CINEMATICA (ROTOLAMENTO, CONTATTO $m_1 \leftrightarrow M$, CONTATTO $M \leftrightarrow m_2$)

CHIAMATA $\vec{V}_0'$ LA VELOCITÀ DI M RISPETTO A m_1 AVREMO CHE



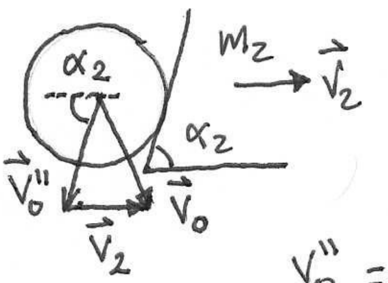
③ $v_0' = \omega R$ E PER LA COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ $\vec{V}_0 = \vec{V}_0' + \vec{V}_1$ ④ INOLTRE $\vec{V}_0'$ È INCLINATA DI α_1 RISPETTO ALLA ORIZZONTALE PER CUI $V_{0x}' = \omega R \cos\alpha_1$ E $V_{0y}' = \omega R \sin\alpha_1$

CHE INSERITE NELLA ④ DANNO 2 EQ CINEMATICHE:

⑤ $V_{0x} = \omega R \cos\alpha_1 - V_1$ E $V_{0y} = \omega R \sin\alpha_1$

DA CUI, TRA L'ALTRO, SI OTTIENE

⑥ $V_0^2 = V_{0x}^2 + V_{0y}^2 = \omega^2 R^2 \cos^2\alpha_1 + V_1^2 - 2\omega R V_1 \cos\alpha_1 + \omega^2 R^2 \sin^2\alpha_1 = (\omega R)^2 + V_1^2 - 2\omega R V_1 \cos\alpha_1$



STUDIAMO IL CONTATTO TRA M ED m_2. DETTA $\vec{V}_0''$ LA VELOCITÀ DI M RISPETTO AD m_2, PER LA COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ SI HA:

⑦ $\vec{V}_0 = \vec{V}_0'' + \vec{V}_2$, INOLTRE $\vec{V}_0''$ È INCLINATA DI α_2 RISPETTO ALL'ORIZZONTALE PER CUI:

$$V_{0x}'' = -V_0'' \cos\alpha_2 \,,\; V_{0y}'' = V_0'' \sin\alpha_2 \xrightarrow{\text{DIVIDENDO}} V_{0x}'' = -\frac{V_{0y}''}{tg\,\alpha_2} \quad ⑧$$

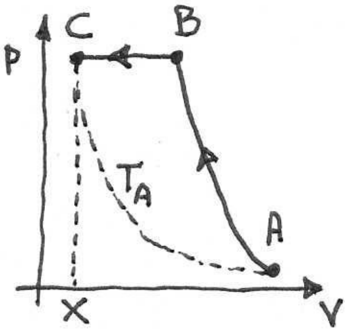
PROIETTIAMO LA ⑦ SULL'ASSE Y, SI HA $V_{0y} = V_{0y}''$ [$\vec{V}_2$ È ORIZZ.] PER CUI LA ⑧ DIVENTA $V_{0x}'' = -\frac{V_{0y}}{tg\,\alpha_2}$ ⑨. PROIETTIAMO LA ⑦ SULL'ASSE X, SI HA

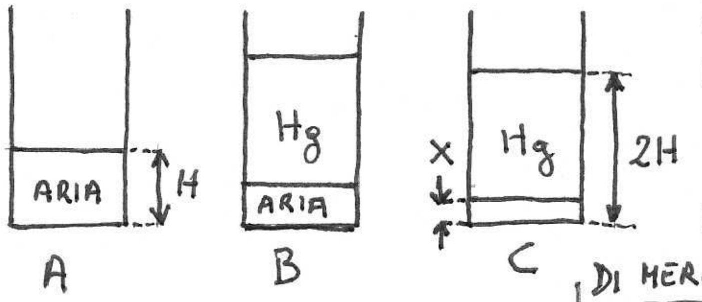
$V_{0x} = V_{0x}'' + V_2$ CHE USANDO LA ⑤ E LA ⑨ DIVENTA:

$$\omega R \cos\alpha_1 - V_1 = -\frac{\omega R \sin\alpha_1}{tg\,\alpha_2} + V_2 \longrightarrow V_2 = \omega R\left(\cos\alpha_1 + \frac{\sin\alpha_1}{tg\,\alpha_2}\right) - V_1 \quad ⑩$$

CHE È LA 3ª EQ CINEMATICA CHE MANCAVA. USANDO ⑤, ⑩, ⑥ IL SISTEMA ① & ② DIVENTA

$$\boxed{\begin{cases} ① \; -m_1 V_1 + M(\omega R \cos\alpha_1 - V_1) + m_2\left[\omega R\left(\cos\alpha_1 + \frac{\sin\alpha_1}{tg\,\alpha_2}\right) - V_1\right] = 0 \\ ② \; \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M\left[(\omega R)^2 + V_1^2 - 2\omega R V_1 \cos\alpha_1\right] + \frac{1}{2} m_2\left[\omega R\left(\cos\alpha_1 + \frac{\sin\alpha_1}{tg\,\alpha_2}\right) - V_1\right]^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = Mg(H-R) \end{cases}}$$





$S = 0{,}005\ m^2$
$H = 0{,}4\ m$
$P_A = 101'325\ Pa$
$\rho = 13'500\ kg/m^3$
$g = 9.81\ m/s^2$
$R = 8{,}314\ J/(mol \cdot K)$

DALLO STATO INIZIALE A IL VERSAMENTO (RAPIDO) DI MERCURIO PROCURA ALL'ARIA UNA COMPRESSIONE ADIABATICA FINO AD UNO STATO B, MENTRE L'ARIA SI RISCALDA. SUCCESSIVAMENTE IL SISTEMA SI RAFFREDDA PER TORNARE ALL'EQUILIBRIO C ALLA STESSA TEMPERATURA INIZIALE. IL RAFFREDDAMENTO È ISOBARO PERCHÉ LA PRESSIONE ATMOSFERICA ED IL PESO DEL MERCURIO SONO COSTANTI. $T_A = T_C$ COMPORTA:

$$P_A V_A = P_C V_C \rightarrow P_A \cancel{S} H = \left[P_A + \frac{\cancel{S}(2H-x)\rho g}{\cancel{S}}\right] \cancel{S} x$$

$$P_A H - P_A x - 2H\rho g x + \rho g x^2 = 0 \rightarrow \rho g x^2 - (P_A + 2H\rho g)x + P_A H = 0$$

$$x = \frac{P_A + 2H\rho g \pm \sqrt{P_A^2 + 4H^2\rho^2 g^2 + \cancel{4P_A H \rho g} - \cancel{4 P_A H \rho g}}}{2\rho g}$$

LA SOLUZIONE COL + SI SCARTA PERCHÉ SI AVREBBE L'ASSURDO $x > H$

$$x = \left(H + \frac{P_A}{2\rho g}\right) - \sqrt{H^2 + \left(\frac{P_A}{2\rho g}\right)^2}$$

E SOSTITUENDO I VALORI NUMERICI SI OTTIENE $\boxed{x \approx 0{,}229\ m}$

IL CALORE VIENE SCAMBIATO DALL'ARIA NELL'ISOBARA $B \rightarrow C$ ESSO È IN REALTÀ CEDUTO, QUINDI SI DOVRÀ AVERE $Q < 0$
CI SERVE LA TEMPERATURA IN B. USIAMO L'ADIABATICA

$$\frac{T_A^\gamma}{P_A^{\gamma-1}} = \frac{T_B^\gamma}{P_B^{\gamma-1}} \quad (1)$$

E L'EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI $\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_C V_C}{T_C}$ MA $T_A = T_C$ QUINDI

$$P_A \cancel{S} H = P_C \cancel{S} x \rightarrow P_B = P_C = P_A\left(\frac{H}{x}\right)$$

→ INSERIAMO QUESTA NELLA (1)

$$T_B = \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_A = \left(\frac{H}{x}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_A$$

ED INFINE $Q = n c_p (T_C - T_B) \rightarrow$

$$\rightarrow Q = n c_p T_A \left(1 - \left(\frac{H}{x}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

CI SERVE ANCORA n, CHE SI RICAVA FACILMENTE $n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = \frac{P_A S H}{R T_A}$

PER CUI
$$Q = \frac{P_A S H}{\cancel{R T_A}} \frac{7}{2} \cancel{R T_A} \left(1 - \left(\frac{H}{x}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) = \frac{7}{2} P_A S H \left(1 - \left(\frac{H}{x}\right)^{\frac{2}{7}}\right)$$

EVITIAMO DI SOSTITUIRE L'ESPRESSIONE ALGEBRICA DI X. NE USIAMO IL VALORE NUMERICO ED OTTENIAMO

$$\boxed{Q \approx -122{,}5\ J}$$