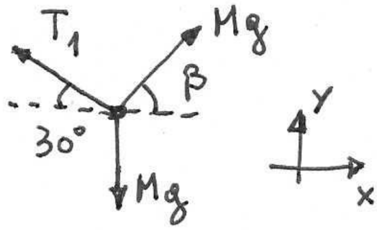


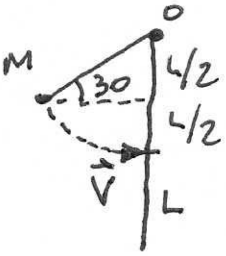
$$\begin{cases} x: \ T_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = Mg\cos\beta \\ y: \ T_1 \frac{1}{2} + Mg\sin\beta = Mg \end{cases}$$

$$T_1 = \frac{2Mg\cos\beta}{\sqrt{3}}$$

RISOLVIAMO DAPPRIMA IL PROBLEMA DI STATICA PER TROVARE L'ANGOLO β. DALLA EQ SU X: SI RICAVA $T_1 = \frac{2Mg\cos\beta}{\sqrt{3}}$ CHE SOSTITUITA NELLA Y: DA'

$$\frac{\cancel{Mg}\cos\beta}{\sqrt{3}} + \cancel{Mg}\sin\beta = \cancel{Mg}^{1} \rightarrow \sin\beta = 1 - \frac{\cos\beta}{\sqrt{3}} \rightarrow \sqrt{1-\cos^2\beta} = 1 - \frac{\cos\beta}{\sqrt{3}} \rightarrow$$

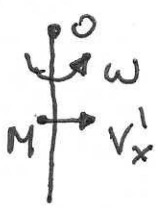
$$\cancel{1} - \cos^2\beta = \cancel{1} + \frac{\cos^2\beta}{3} - \frac{2\cos\beta}{\sqrt{3}} \rightarrow \cos\beta \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \beta = 30^\circ$$



RAGION PER CUI LA MASSA M COLPISCE LA SBARRA CON VELOCITA' ORIZZONTALE LUNGO X FACILMENTE CALCOLABILE CON LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}V_x^2 = \cancel{M}g\frac{L}{\cancel{2}} \rightarrow V_x = \sqrt{gL}$$

RISOLVIAMO ORA L'URTO TRA LA SBARRA E LA MASSA M IMPONENDO LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE RISPETTO AD O E DELL'ENERGIA MECCANICA.



IL MOMENTO D'INERZIA DELLA SBARRA RISPETTO AD O VALE $I = \frac{1}{3}(2M)(2L)^2 = \frac{8}{3}ML^2$

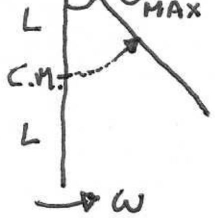
$$\begin{cases} \cancel{M}V_x\cancel{L} = \cancel{M}V'_x\cancel{L} + \frac{8}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\omega & (1) \\ \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}V_x^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}V'^2_x + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{8}{3}\cancel{M}L^2\omega^2 & (2) \end{cases}$$

QUINDI DALLA (1) $V'_x = V_x - \frac{8}{3}L\omega$ CHE SOSTITUIAMO NELLA (2)

$$\cancel{V_x^2} = \cancel{V_x^2} + \frac{64}{\cancel{9}\,3}L^{\cancel{2}}\omega^{\cancel{2}} - \frac{16}{\cancel{3}}V_x\cancel{L\omega} + \frac{8}{\cancel{3}}L^{\cancel{2}}\omega^{\cancel{2}} \rightarrow L\omega\left(\frac{64}{3}+8\right) = 16V_x \rightarrow$$

$$\omega\left(\frac{64+24}{3}\right) = \frac{V_x}{L}\cdot 16 \rightarrow \frac{\cancel{88}^{\,11}}{3}\omega = \frac{\sqrt{gL}}{L}\cancel{16}^{\,2} \rightarrow \omega = \frac{6}{11}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

ED UTILIZZIAMO NUOVAMENTE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA APPLICATA AL SOLLEVAMENTO DELLA SBARRA DURANTE LA ROTAZIONE SUCCESSIVA ALL'URTO PER CALCOLARE θ_{MAX}

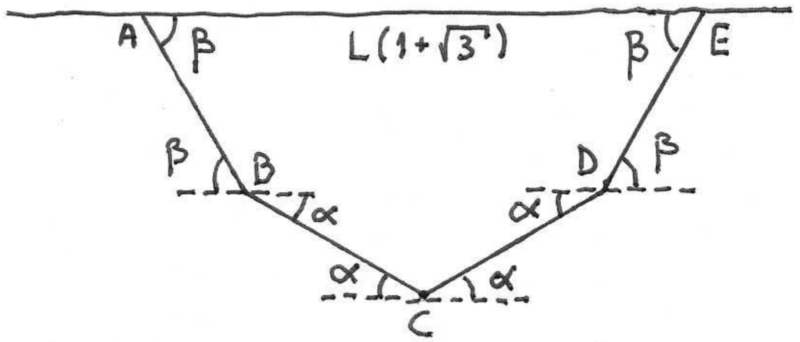


$$\frac{1}{2}I\omega^2 = (2M)\,g\,L\,(1-\cos\theta_{MAX})$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{3}}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\frac{\cancel{36}^{\,6}}{121}\frac{\cancel{g}}{\cancel{L}} = \cancel{2}\cancel{M}\cancel{g}\cancel{L}(1-\cos\theta_{MAX})$$

$$\frac{24}{121} = 1 - \cos\theta_{MAX} \rightarrow \cos\theta_{MAX} = 1 - \frac{24}{121} = \frac{97}{121}$$

$$\theta_{MAX} = \arccos\left(\frac{97}{121}\right) \simeq 36{,}7^\circ$$

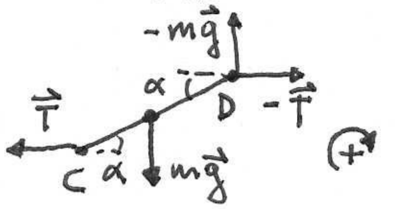


LA SITUAZIONE DI EQUILIBRIO DEL SISTEMA DEVE ESSERE PER FORZA SIMMETRICA, CI BASTA QUINDI DETERMINARE I DUE ANGOLI α E β IN FIGURA PER RISOLVERE IL PROBLEMA

LA PRIMA EQ. CHE SI PUÒ SCRIVERE È L'IMPORRE UGUALE A $L(1+\sqrt{3})$ LA DISTANZA TRA A ED E:

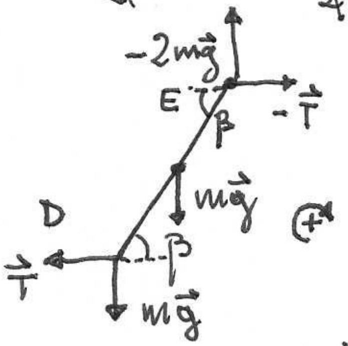
$$\cancel{L}\cos\beta + \cancel{L}\cos\alpha + \cancel{L}\cos\alpha + \cancel{L}\cos\beta = \cancel{L}(1+\sqrt{3}) \rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

ORA BISOGNA IMPORRE L'EQUILIBRIO. 2 VIE: A) MINIMIZZARE L'ALTEZZA DEL C.M. DEL SISTEMA OPPURE B) IMPORRE $=0$ LA SOMMA DELLE FORZE E DEI MOMENTI MECCANICI SULLE DUE SBARRE DI DESTRA [QUELLE DI SINISTRA SEGUONO PER SIMMETRIA]



COMINCIAMO CON $\overline{CD}$. LA FORZA $\vec{T}$ APPLICATA IN C DEVE ESSERE ORIZZONTALE PER LA SIMMETRIA DEL SISTEMA. $m\vec{g}$ È APPLICATA NEL C.M. VISTO CHE SI DEVE AVERE $\sum\vec{F}=0$ LA FORZA APPLICATA IN D VALE $\vec{F}_D = -\vec{T} - m\vec{g}$. IMPONIAMO CHE $\sum\vec{M}_{CM} = 0$:

$$+T\frac{\cancel{L}}{2}\sin\alpha + T\frac{\cancel{L}}{2}\sin\alpha - mg\frac{\cancel{L}}{2}\cos\alpha = 0 \rightarrow T = \frac{mg}{2\,tg\alpha} \quad (2)$$



PROCEDIAMO CON $\overline{DE}$. PER IL 3° PRINCIPIO DI NEWTON LA FORZA APPLICATA IN D VALE $+\vec{T}+m\vec{g}$. LA FORZA PESO VALE $m\vec{g}$. PER AVERE $\sum\vec{F}=0$ LA FORZA APPLICATA IN E VALE $\vec{F}_E = -\vec{T} - 2m\vec{g}$. IMPONIAMO CHE $\sum\vec{M}_{CM} = 0$

$$+T\frac{\cancel{L}}{2}\sin\beta + T\frac{\cancel{L}}{2}\sin\beta - mg\frac{\cancel{L}}{2}\cos\beta - 2mg\frac{\cancel{L}}{2}\cos\beta = 0 \rightarrow T = \frac{3mg}{2\,tg\beta} \quad (3)$$

UGUAGLIAMO (2) E (3): $\frac{\cancel{mg}}{\cancel{2}tg\alpha} = \frac{3\cancel{mg}}{\cancel{2}tg\beta} \rightarrow tg\beta = 3\,tg\alpha$ (4)

RIASSUMENDO

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} & (1) \\ tg\beta = 3\,tg\alpha & (4) \end{cases}$$

LA SOLUZIONE ANALITICA DI QUESTO SISTEMA NON È SEMPLICE, MA NON CE N'È BISOGNO. VISTO CHE $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ E $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ ED ANCHE CHE $tg(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ E $tg(60°) = \sqrt{3}$ ALLORA RISULTA EVIDENTE CHE

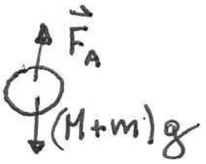
$$\alpha = 30° \quad E \quad \beta = 60°$$

LA DISTANZA CERCATA VALE $D = L\sin\beta + L\sin\alpha = \frac{L}{2}(1+\sqrt{3}) = \frac{\overline{AE}}{2}$

TROVIAMO SUBITO LA DENSITÀ DELL'ARIA AL SUOLO COME RAPPORTO TRA MASSA MOLARE E VOLUME MOLARE

$$\rho_0 = \frac{\mu_A}{V_m} = 0{,}029\ \frac{Kg}{mol} \cdot \frac{1}{0{,}0224}\ \frac{mol}{m^3} \simeq 1{,}295\ Kg/m^3$$

STUDIAMO L'ACCELERAZIONE ALLA PARTENZA COL II PRINCIPIO DI NEWTON



SIA V_0 IL VOLUME DEL PALLONE, n IL NUMERO DI MOLI DI ELIO ED m LA SUA MASSA. SI HA $V_0 = nV_m$ E LA SPINTA DI ARCHIMEDE VALE $F_A = V_0 \rho_0 g = n \cancel{V_m} \cdot \frac{\mu_A}{\cancel{V_m}} g = n\mu_A g$

QUINDI: $F_A - (M+m)g = (M+m)a \rightarrow$

$$\rightarrow n\mu_A g - Mg - n\mu_{He} g = Ma + n\mu_{He} a$$

$$n\left[\mu_A g - \mu_{He}(a+g)\right] = M(a+g) \rightarrow n = \frac{M(a+g)}{\left[\mu_A g - \mu_{He}(a+g)\right]} \simeq 2550 \text{ moli}$$

PER CUI $\boxed{m = n\mu_{HE} \simeq 10{,}20\ Kg \qquad V_0 = nV_m \simeq 57{,}12\ m^3}$ a)

PER IL CALCOLO IN QUOTA CI SERVIRÀ LA DENSITÀ DELL'ARIA IN FUNZIONE DELL'ALTEZZA $\rho(Y)$. CHIAMIAMO $V_m(Y)$ IL VOLUME MOLARE IN FUNZIONE DELL'ALTEZZA. ESSENDO COME DA TESTO COSTANTE LA TEMPERATURA DELL'ARIA, PER LA LEGGE DEI GAS PERFETTI $P_0 V_m = P(Y) V_m(Y) = P_0 e^{-\frac{\rho_0 g Y}{P_0}} V_m(Y)$ PER CUI

$$V_m(Y) = V_m e^{+\frac{\rho_0 g Y}{P_0}} \quad (1)$$

DA CUI LA DENSITÀ DELL'ARIA IN FUNZIONE DELLA QUOTA

$$\rho(Y) = \frac{\mu_A}{V_m(Y)} = \frac{\mu_A}{V_m e^{+\frac{\rho_0 g Y}{P_0}}} = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g Y}{P_0}} \quad (2)$$

PER IL VOLUME DELL'ELIO NEL PALLONE, VISTO CHE QUESTO NON PERMETTE IL PASSAGGIO DI CALORE, USIAMO UNA ADIABATICA REVERSIBILE

$$P_0 V_0^{\gamma} = P(Y) V(Y)^{\gamma} \rightarrow P_0^{\frac{1}{\gamma}} V_0 = P(Y)^{\frac{1}{\gamma}} V(Y) \rightarrow \cancel{P_0}^{\frac{1}{\gamma}} V_0 = \cancel{P_0}^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\rho_0 g Y}{\gamma P_0}} V(Y)$$

PER CUI $$V(Y) = V_0 e^{+\frac{\rho_0 g Y}{\gamma P_0}} \quad (3)$$

TROVIAMO LA QUOTA DI EQUILIBRIO IMPONENDO $F_A = (M+m)g$ [F_A = SPINTA DI ARCHIMEDE]

$$V(Y)\rho(Y)\cancel{g} = (M+m)\cancel{g} \xrightarrow{(2)+(3)} V_0 e^{+\frac{\rho_0 g Y}{\gamma P_0}} \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g Y}{P_0}} = (M+m)$$

$$e^{\frac{\rho_0 g Y}{P_0}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} = \frac{(M+m)}{V_0 \rho_0} \rightarrow \frac{\rho_0 g Y}{P_0}\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) = \ln\left(\frac{M+m}{V_0 \rho_0}\right) \rightarrow$$

b) $$\boxed{Y_{EQ} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0 g\ (1-\gamma)} \ln\left(\frac{M+m}{V_0 \rho_0}\right) \simeq 14'610\ m}$$

ED INSERENDO QUESTO VALORE NELLA (3) SI OTTIENE:

c) $$\boxed{V_{EQ} = V_0 e^{\frac{\rho_0 g Y_{EQ}}{\gamma P_0}} \simeq 174\ m^3}$$