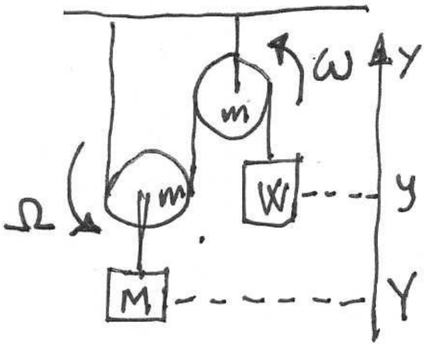


SIA y LA COORDINATA y DI W E Y QUELLA DI M
SIA Ω LA VELOCITÀ ANGOLARE DELLA CARRUCOLA A SINISTRA E ω DI QUELLA A DESTRA.
PER IL CINEMATISMO DELLE CARRUCOLE

$y=-2Y \rightarrow Y=-\frac{y}{2}$ (1) $\rightarrow \dot{Y}=-\frac{\dot{y}}{2}$ (2)

INOLTRE, PER LA LEGGE DEL ROTOLAMENTO PURO

$R\omega=\dot{y}$ (3) E $R\Omega=\dot{Y} \rightarrow R\Omega=-\frac{\dot{y}}{2}$ (4)

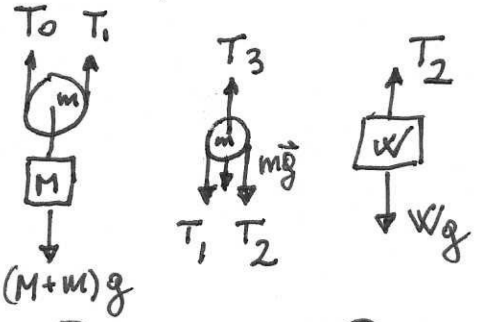
1° METODO: I E II EQ CARDINALE. LA I SU Y, LA II $+$ ANTIORARIO

(5) I EQ, MASSE $M+m$ $\quad T_0+T_1-(M+m)g=(M+m)\ddot{Y}$

(6) II EQ, CARR. SINISTRA $\quad (T_1-T_0)\cancel{R}=\frac{1}{2}mR^{\cancel{2}}\dot{\Omega}$

(7) II EQ, CARR. DESTRA $\quad (T_1-T_2)\cancel{R}=\frac{1}{2}mR^{\cancel{2}}\dot{\omega}$

(8) I EQ, MASSA W $\quad T_2-Wg=W\ddot{y}$



DA (6) + (4) SI OTTIENE $T_0=T_1+\frac{m}{4}\ddot{y}$, SOSTITUENDO NELLA (1) E USANDO LA (2) SI HA

$2T_1+\frac{(2M+3m)}{4}\ddot{y}=(M+m)g$ (9). RICAVANDO T_2 DALLA (8) E SOSTITUENDO NELLA (7) SI RICAVA $T_1=Wg+(W+\frac{m}{2})\ddot{y}$ CHE SOSTITUENDO T_1 NELLA (9) DÀ

$\left[(2W+m)+\left(\frac{2M+3m}{4}\right)\right]\ddot{y}=(M+m-2W)g$ CHE DOPO DUE PASSAGGI DIVENTA

$$\ddot{y}=\frac{4(M+m-2W)}{8W+7m+2M}g$$

2° METODO CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$U=(M+m)gY+Wgy$

$K=\frac{1}{2}(M+m)\dot{Y}^2+\frac{1}{2}W\dot{y}^2+\frac{1}{4}mR^2\Omega^2+\frac{1}{4}mR^2\omega^2$

SOMMANDO LE DUE ED EFFETTUANDO LE SOSTITUZIONI (2), (3) E (4)

$E=U+K=-(M+m)g\frac{y}{2}+Wgy+\frac{1}{8}(M+m)\dot{y}^2+\frac{1}{2}W\dot{y}^2+\frac{1}{16}m\dot{y}^2+\frac{1}{4}m\dot{y}^2$

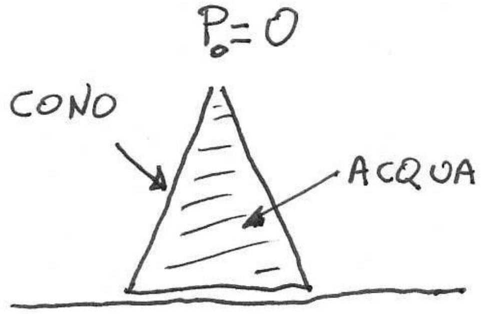
RACCOGLIENDO I TERMINI IN DUE PASSAGGI SI HA:

$E=\left(W-\frac{M+m}{2}\right)gy+\left(\frac{8W+7m+2M}{16}\right)\dot{y}^2$ PER LA CONS. DI E SI HA $\frac{dE}{dt}=0$

$\frac{dE}{dt}=\left(W-\frac{M+m}{2}\right)g\cancel{\dot{y}}+\left[\frac{8W+7m+2M}{\cancel{16}\ 8}\right]\cancel{2}\cancel{\dot{y}}\ddot{y}=0$

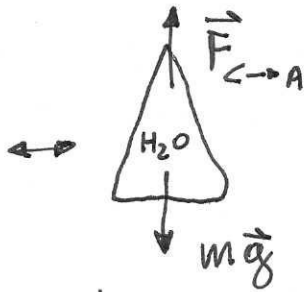
$8W-4(M+m)g+(8W+7m+2M)\ddot{y}=0$

$$\ddot{y}=\frac{4(M+m-2W)}{8W+7m+2M}g$$



IL "RECIPIENTE A FORMA DI CONO" LO CHIAMEREMO SEMPLICEMENTE "CONO"

CHIAMIAMO $\vec{F}_{C\to A}$ LA FORZA CHE IL CONO ESERCITA SULL'ACQUA E FACCIAMONE IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO



L'ACQUA È FERMA DUNQUE $\vec{F}_{C\to A} + m\vec{g} = 0$

QUINDI $\vec{F}_{C\to A}$ È UN VETTORE DIRETTO VERSO L'ALTO E DI MODULO mg DOVE $m = \rho_{H_2O} V$ OSSIA $m = \rho_{H_2O} \frac{\pi}{3} r^2 h$

PER IL 3° PRINCIPIO LA FORZA $\vec{F}_{A\to C}$ CHE L'ACQUA ESERCITA SUL CONO È UGUALE E OPPOSTA, QUINDI $\vec{F}_{A\to C}$ È UN VETTORE DIRETTO VERSO IL BASSO DI MODULO mg

LA FORZA CHE L'ACQUA ESERCITA SUL CONO SI PUÒ CERTO SCOMPORRE IN FORZA ESERCITATA SULLA BASE $\vec{F}_{A\to B}$ PIÙ LA FORZA ESERCITATA SULLA SUPERFICIE LATERALE $\vec{F}_{A\to SL}$

QUINDI

$$\vec{F}_{A\to C} = m\vec{g} = \rho_{H_2O} \frac{\pi}{3} r^2 h \vec{g} = \vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_{A\to SL}$$

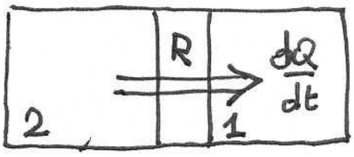
LA FORZA CHE L'ACQUA ESERCITA SULLA BASE È DIRETTA VERSO IL BASSO E IL SUO MODULO SI CALCOLA FACILMENTE MOLTIPLICANDO LA PRESSIONE IDROSTATICA $P = \rho g h$ PER L'AREA DI BASE $\pi r^2 \rightarrow \vec{F}_{A\to B} = \pi r^2 \cdot \rho_{H_2O} \vec{g} h$

PER CUI

$$\rho_{H_2O} \cdot \frac{\pi}{3} r^2 h \vec{g} = \rho_{H_2O} \pi r^2 h \vec{g} + \vec{F}_{A\to SL}$$

$$\vec{F}_{A\to SL} = -\frac{2}{3} \rho_{H_2O} \pi r^2 h \vec{g} = -2 \rho_{H_2O} V \vec{g}$$

OSSIA UNA FORZA VERSO L'ALTO PARI IN MODULO A DUE VOLTE LA FORZA PESO DELL'ACQUA



$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R}(T_2 - T_1)$$

E PER DEFINIZIONE DI CAPACITÀ TERMICA

$$\frac{dQ}{dt} = -C_2 \frac{dT_2}{dt} \qquad \frac{dQ}{dt} = C_1 \frac{dT_1}{dt}$$

QUINDI
$$\begin{cases} \frac{1}{R}(T_2 - T_1) = -C_2 \frac{dT_2}{dt} & (1) \\ \frac{1}{R}(T_2 - T_1) = C_1 \frac{dT_1}{dt} & (2) \end{cases}$$

SE FACCIAMO LA DIFFERENZA (1)–(2) OTTENIAMO:

$$0 = -C_2 \frac{dT_2}{dt} - C_1 \frac{dT_1}{dt}$$

$$0 = -\frac{d}{dt}(C_2 T_2 + C_1 T_1)$$

VALE A DIRE $C_2 T_2 + C_1 T_1 = \text{COSTANTE}$. LA COSTANTE SI CONOSCE FACILMENTE IMPONENDO LA CONDIZIONE IN $t=0 \rightarrow C_2 T_2 + C_1 T_1 = C_2 T_{02} + C_1 T_{01}$ (3)

DIVIDIAMO LA 1ª EQ PER C_2 E LA 2ª PER C_1 SI OTTIENE

$$\begin{cases} \frac{1}{RC_2}(T_2 - T_1) = -\frac{dT_2}{dt} & (1) \\ \frac{1}{RC_1}(T_2 - T_1) = \frac{dT_1}{dt} & (2) \end{cases}$$

FACCIAMO LA SOMMA (1)+(2) E SI HA

$$\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right)(T_2 - T_1) = -\frac{d}{dt}(T_2 - T_1)$$

DEFINIAMO PER SEMPLICITÀ NEI CALCOLI $\rightarrow \gamma \equiv \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right)$

QUINDI $\gamma(T_2 - T_1) = -\frac{d}{dt}(T_2 - T_1)$ ED ALLORA SEPARIAMO LE VARIABILI ED INTEGRIAMO DA $t=0$ A t QUALSIASI

$$-\int_0^t \gamma \, dt = \int_{T_{02}-T_{01}}^{T_2 - T_1} \frac{d(T_2 - T_1)}{(T_2 - T_1)} \rightarrow -\gamma t = \ln\left(\frac{T_2 - T_1}{T_{02} - T_{01}}\right)$$

PRENDIAMO ORA L'ESPONENZIALE DI ENTRAMBI I MEMBRI

$$\frac{(T_2 - T_1)}{(T_{02} - T_{01})} = e^{-\gamma t}$$

DALLA (3) RICAVIAMO $T_1 = -\frac{C_2}{C_1} T_2 + T_{01} + \frac{C_2}{C_1} T_{02}$ E SOSTITUIAMO

$$T_2 + \frac{C_2}{C_1} T_2 - T_{01} - \frac{C_2}{C_1} T_{02} = (T_{02} - T_{01}) e^{-\gamma t}$$

$$T_2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) = T_{01} + \frac{C_2}{C_1} T_{02} + (T_{02} - T_{01}) e^{-\gamma t}$$

E FINALMENTE

$$T_2 = \left[\frac{C_1}{(C_1 + C_2)}\right] \left[\frac{(C_1 T_{01} + C_2 T_{02})}{C_1} + (T_{02} - T_{01}) e^{-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right) t}\right]$$