PERCHÉ AVVENGA LA COLLISIONE È NECESSARIO CHE ESISTA UN t PER CUI $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$, E CIOÈ $r_{1x} = r_{2x}$, $r_{1y} = r_{2y}$ E $r_{1z} = r_{2z}$.

COMINCIAMO DALLA COMPONENTE Z CHE È LA PIÙ SEMPLICE:

$6 \frac{\cancel{m}}{\cancel{s}} \cancel{t} = 3 \frac{\cancel{m}}{s^{\cancel{2}}} t^{\cancel{2}} \rightarrow t = 2s$. QUINDI PER $t = 2s$ $r_{1z} = r_{2z}$ OK

VERIFICHIAMO CHE $t = 2s$ È UNA SOLUZIONE VALIDA ANCHE SU X E Y

x) $-2 \frac{m}{\cancel{s}} \cdot 2\cancel{s} = 8m - 3 \frac{m}{\cancel{s^2}} \cdot 4\cancel{s^2} \rightarrow -4m = -4m$ OK ①

y) $2 \frac{m}{\cancel{s^2}} \cdot 4\cancel{s^2} = 14m - 3 \frac{m}{\cancel{s}} \cdot 2\cancel{s} \rightarrow 8m = 8m$ OK ②

$\boxed{a)}$ COORDINATE DELL'IMPATTO. SOSTITUENDO $t = 2s$ IN r_{1z} O r_{2z} SI OTTIENE $r_{1z} = r_{2z} = 12\,m$, PER X E Y ABBIAMO GIÀ ① E ②

QUINDI $\vec{r}_{URTO} = \vec{r}_1(2s) = \vec{r}_2(2s) = -4m\hat{\imath} + 8m\hat{\jmath} + 12m\hat{k}$ E $t_{URTO} = 2s$

DERIVANDO $\vec{r}_1$ ED $\vec{r}_2$ RISPETTO AL TEMPO SI OTTIENE

$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1(t) = -2 \frac{m}{s}\hat{\imath} + 4 \frac{m}{s^2} t \hat{\jmath} + 6 \frac{m}{s}\hat{k}$

$\vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2(t) = -6 \frac{m}{s^2} t \hat{\imath} - 3 \frac{m}{s}\hat{\jmath} + 6 \frac{m}{s^2} t \hat{k}$

E SOSTITUENDO $t = 2s$ IN QUESTE ESPRESSIONI OTTENIAMO:

$\boxed{b)}$ $\vec{v}_{1\,URTO} = \vec{v}_1(2s) = (-2\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + 6\hat{k}) \frac{m}{s}$; $\vec{v}_{2\,URTO} = \vec{v}_2(2s) = (-12\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 12\hat{k}) \frac{m}{s}$

PER OTTENERE L'ANGOLO USIAMO LA DEFINIZIONE DI PRODOTTO SCALARE.

A $t = 2s$: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos\theta \rightarrow \theta = \arccos \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$

ED IN COMPONENTI:

$$\theta = \arccos \left(\frac{v_{1x} v_{2x} + v_{1y} v_{2y} + v_{1z} v_{2z}}{\sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2} \cdot \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2}} \right)$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{2 \cdot 12 - 3 \cdot 8 + 6 \cdot 12}{\sqrt{4 + 64 + 36} \cdot \sqrt{144 + 9 + 144}} \right) = \arccos \left(\frac{72}{\sqrt{104} \cdot \sqrt{297}} \right)$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{\cancel{6} \cdot 12}{\cancel{2}\sqrt{26} \cdot \cancel{3}\sqrt{33}} \right) = \arccos \left(\frac{12}{\sqrt{858}} \right)$$

E NUMERICAMENTE:

$\boxed{c)}$ $\theta \simeq 65{,}816^\circ$

A

A) COMINCIAMO METTENDOCI IN UN S.R. CHE VIAGGIA A VELOCITÀ V_0 LUNGO X. TUTTI I CORPI SONO FERMI, QUINDI $P_{TOT_x}=0$ ①

B) IL PASSEGGERO 1 LANCIA LA PALLA. LA QUANTITÀ DI MOTO DI 1 + M SI CONSERVA ED È ZERO, LA VELOCITÀ RELATIVA È V_p

$$\begin{cases} MV_1 + mV_m = 0 \\ V_m - V_1 = V_p \rightarrow V_1 = V_m - V_p \end{cases} \rightarrow MV_m - MV_p + mV_m = 0 \rightarrow V_m = \frac{M}{M+m} V_p$$

C) LA PALLA DI MASSA m VIAGGIA A VELOCITÀ V_m E COLPISCE IL CARRELLO 2, CHE HA MASSA M ED È FERMO. PER L'EQUAZIONE 8.24 DEL TIPLER RELATIVA AGLI URTI ELASTICI, DETTA V_2 LA VELOCITÀ DEL CARRELLO 2 DOPO L'URTO

$$V_2 = \frac{2m}{M+m} V_m = \frac{2mM}{(M+m)^2} V_p$$

D) QUANDO IL PASSEGGERO 1 AVRÀ RACCOLTO LA PALLA IL CARRELLO 1, CON MASSA (M+m) VIAGGERÀ A VELOCITÀ V_3 (ANCORA INCOGNITA) MENTRE IL CARRELLO 2 VIAGGERÀ A VELOCITÀ V_2. IN ASSENZA DI FORZE ESTERNE LUNGO X SI HA ANCORA $P_{TOT_x}=0$ ①

$$(M+m)V_3 + MV_2 = 0 \rightarrow (M+m)V_3 + \frac{2mM^2}{(M+m)^2} V_p = 0$$

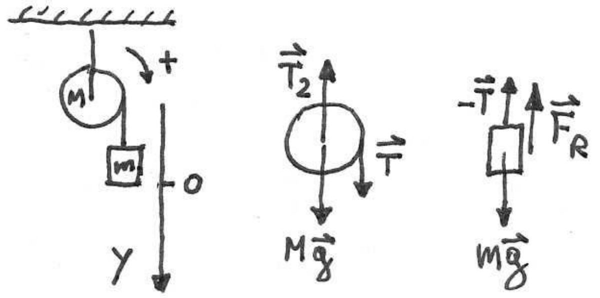
$$V_3 = -\frac{2mM^2}{(M+m)^3} V_p$$

E) ORA SOMMIAMO V_0 PER "TORNARE INDIETRO" NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DI PARTENZA, CON UNA TRASFORMAZIONE INVERSA RISPETTO A QUELLA ESEGUITA IN A) TROVIAMO LA VELOCITÀ FINALE RICHIESTA

$$V_{1f} = V_0 - \frac{2mM^2}{(M+m)^3} V_p$$

(LE VELOCITÀ NELLO SVOLGIMENTO SONO OVVIAMENTE TUTTE SOTTINTESE ESSERE LE COMPONENTI X DEI VETTORI VELOCITÀ)

COMINCIAMO DEFINENDO UN ASSE Y PER LO SPOSTAMENTO DI m, IL VERSO POSITIVO DELLE ROTAZIONI DI M E FACENDO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO PER M E m. SIA R IL RAGGIO DELLA CARRUCOLA, IL SUO MOMENTO D'INERZIA VALE $\frac{1}{2}MR^2$.



SCRIVIAMO IL 2° PRINCIPIO DI NEWTON LUNGO Y PER m,

$$mg - T - KV_y = ma_y \quad ①$$

$$RT = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad ②$$

$$a_y = \alpha R \quad ③$$

LA 2ª EQ CARDINALE PER M E LA CONDIZIONE DI PURO ROTOLAMENTO PER LA CARRUCOLA. UTILIZZANDO ② E ③ RICAVIAMO $T = \frac{Ma_y}{2}$ CHE SOSTITUITA IN ① CI FORNISCE L'EQUAZIONE DEL MOTO DI m

$$(M+2m)\,a_y = 2(mg - KV_y) \quad ④$$

VISTO CHE PER $t=0$ SI HA $V_y = 0$ RICAVIAMO L'ACCELERAZIONE INIZIALE DA ④

$$\boxed{a)} \quad a_y(t=0) = \frac{2mg}{M+2m}$$

LA VELOCITÀ TERMINALE SI HA QUANDO m SMETTE DI ACCELERARE. PONENDO $a_y = 0$ [QUESTO SUCCEDE PER $t \to \infty$] SI HA $mg - KV_{y_{TERM}} = 0$, QUINDI

$$\boxed{b)} \quad V_{y_{TERM}} = \frac{mg}{K}$$

ORA RICORDIAMO CHE $a_y = \frac{dV_y}{dt}$, SEPARANDO LE VARIABILI V_y E t IN ④ SI HA:

$$-\frac{1}{2}\frac{dV_y}{(KV_y - mg)} = \frac{dt}{(M+2m)} \rightarrow \text{INTEGRIAMO} \rightarrow -\frac{1}{2}\int_0^{V_y}\frac{dV_y}{(KV_y - mg)} = \frac{1}{(M+2m)}\int_0^t dt$$

L'INTEGRALE A SINISTRA SI RISOLVE SOSTITUENDO $u = KV_y - mg$

$$-\frac{1}{2K}\int_{-mg}^{KV_y - mg}\frac{du}{u} = \frac{1}{(M+2m)}t \rightarrow \ln\left(\frac{KV_y - mg}{-mg}\right) = -\frac{2K}{(M+2m)}t$$

PRENDIAMO L'ESPONENZIALE DA AMBO LE PARTI

$$1 - \frac{KV_y}{mg} = e^{-\frac{2K}{(M+2m)}t} \rightarrow \boxed{c)} \quad V_y = \frac{mg}{K}\left(1 - e^{-\frac{2K}{(M+2m)}t}\right)$$

PER TROVARE LO SPAZIO PERCORSO CALCOLIAMO $Y(t)$:

$$Y(t) = \int_0^t V_y\,dt \rightarrow Y = \frac{mg}{K}\int_0^t\left(1 - e^{-\frac{2K}{(M+2m)}t}\right)dt$$

$$Y = \frac{mg}{K}\left[t + \frac{(M+2m)}{2K}e^{-\frac{2K}{(M+2m)}t}\right]_0^t = \frac{mg}{K}\left[t + \frac{(M+2m)}{2K}e^{-\frac{2K}{(M+2m)}t} - \frac{(M+2m)}{2K}\right]$$

E QUINDI:

$$\boxed{d)} \quad Y = \frac{mg}{K}\left[t - \frac{(M+2m)}{2K}\left(1 - e^{-\frac{2K}{(M+2m)}t}\right)\right]$$