Travature Elastiche Iperstatiche con Appoggi Cedevoli Elasticamente: il “problema” dei ***segni*** di η_c

Davide Tonelli

Novembre 2013

1 Introduzione

Il principio dei lavori virtuali afferma che per un qualunque sistema in equilibrio vale la relazione $L.v.e. = L.v.i.$. Nella fattispecie per un generico sistema di travi elastiche, preso un sistema A di forze - sollecitazioni ausiliario ed un sistema B di spostamenti - deformazioni effettivo, si ha (cito testualmente Belluzzi I, par. 326):

$$L_e = \sum P_a \delta_b + \sum C_a \gamma_b$$

essendo δ_b gli spostamenti dei punti d'applicazione dei carichi P_a valutati nella direzione e verso dei P_a, e γ_b i cedimenti (anelastici ed elastici) *dei vincoli* (esterni ed interni (ossia sconnessioni)) *valutati nella direzione e verso delle C_a*; banalmente poi il lavoro virtuale interno risulta:

$$L_i = \int_s N_a d\epsilon_b + \int_s M_a d\phi_b + \int_s T_a d\eta_b + \int_s M_{Ta} d\theta_b$$

Nel caso di vincoli cedevoli anelasticamente i γ_b sono noti a priori in modulo, direzione e segno. Nel caso di vincoli cedevoli elasticamente (vedi Figura 1) i γ_b sono funzione delle incognite iperstatiche e vanno esplicitati in funzione di essi. La determinazione del segno del coefficiente η_c non rappresenta un problema in quanto scaturisce in maniera automatica dal calcolo. Si prenda ad esempio come riferimento il caso della travata a 3 campate e 2 appoggi cedevoli di Figura 1. Si vogliono calcolare i momenti iperstatici agli appoggi intermedi e dunque si assume come sistema principale quello della trave con due svincoli a momento in corrispondenza degli appoggi intermedi. Si andranno dunque a scrivere due equazioni di congruenza nel seguente modo[1]:

[1] A - Convezioni di Positività - assumo positive le rotazioni assolute antiorarie ϕ e le rotazioni relative $\Delta\phi = \phi_{sx} - \phi_{dx}$.
B - v è il numero di vincoli elastici presenti nella struttura.
C - Il *segno* - è dovuto al fatto che il termine η_{1ce} fa parte del primo membro, e dunque per farlo comparire al secondo è necessario cambiargli il segno.

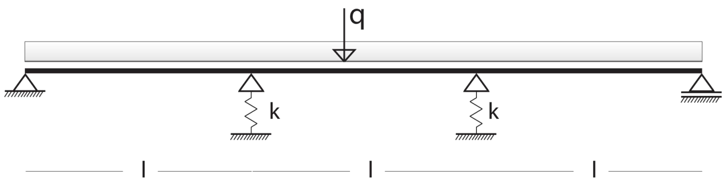

Figura 1: Trave a 3 campate con appoggi intermedi cedevoli.

$$
\begin{aligned}
\eta_1 =& \eta_{10} + X_1\eta_{11} + X_2\eta_{12} + \eta_{1ce} \\
&\eta_{10} = 2 \cdot \frac{ql^3}{24EJ} \\
&\eta_{11} = -2 \cdot \frac{l}{3EJ} \\
&\eta_{12} = -\frac{l}{6EJ} \\
&\eta_{1ce} = -\sum_v \frac{R_1 R}{k} = -\sum_v \Big[\frac{R_1 R_0}{k} + X_1 \frac{R_1 R_1}{k} + X_2 \frac{R_1 R_2}{k}\Big] = \\
&-\Big[\big(ql \cdot \frac{2}{l} \cdot \frac{1}{k} + X_1 \cdot \frac{4}{kl^2} - X_2 \cdot \frac{2}{kl^2}\big) + \\
&+\big(-ql \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{k} + X_1 \cdot \frac{1}{kl^2} - X_2 \cdot \frac{2}{kl^2}\big)\Big]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_2 =& \eta_{20} + X_1\eta_{21} + X_2\eta_{22} + \eta_{2ce} \\
&\eta_{20} = 2 \cdot \frac{ql^3}{24EJ} \\
&\eta_{21} = -\frac{l}{6EJ} \\
&\eta_{22} = -2 \cdot \frac{l}{3EJ} \\
&\eta_{2ce} = -\sum_v \frac{R_2 R}{k} = -\sum_v \Big[\frac{R_2 R_0}{k} + X_1 \frac{R_2 R_1}{k} + X_2 \frac{R_2 R_2}{k}\Big] = \\
&-\Big[\big(-ql \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{k} - X_1 \cdot \frac{2}{kl^2} - X_2 \cdot \frac{1}{kl^2}\big) + \\
&+\big(ql \cdot \frac{2}{l} \cdot \frac{1}{k} - X_1 \cdot \frac{2}{kl^2} + X_2 \cdot \frac{4}{kl^2}\big)\Big]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Riscrivendo e raggruppando le precedenti due equazioni otteniamo:

$$
\begin{aligned}
X_1 \cdot \Big(\frac{2}{3}\frac{l}{EJ} + \frac{5}{kl^2}\Big) + X_2\Big(\frac{l}{6EJ} - \frac{4}{kl^2}\Big) = \Big(\frac{ql^3}{12EJ} - \frac{q}{k}\Big) \\
X_1 \cdot \Big(\frac{l}{6EJ} - \frac{4}{kl^2}\Big) + X_2\big(\frac{2}{3}\frac{l}{EJ} + \frac{5}{kl^2}\Big) = \Big(\frac{ql^3}{12EJ} - \frac{q}{k}\Big)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Risolvendo il sistema per vari valori di rigidezza k si ottengono i valori numerici dei momenti iperstatici agli appoggi X_1 e X_2. La Tabella 1 riporta i suddetti valori, messi a confronto con i medesimi ottenuti da codice FEM *Straus7 2.3*.

	k=∞	k=300	k=30	k=10	k=5	k=3	k=0,3	k=0
M Metodo Forze	-100	-98,8	-87,8	-64,2	-30,7	10,8	48,1	1000
M Straus	-100	-98,8	-88,4	-65,9	-33,8	6,0	46,8	1000

Tabella 1: Tabella Riassuntiva e Comparativa: k ($\frac{kN}{cm}$), M (kNm).