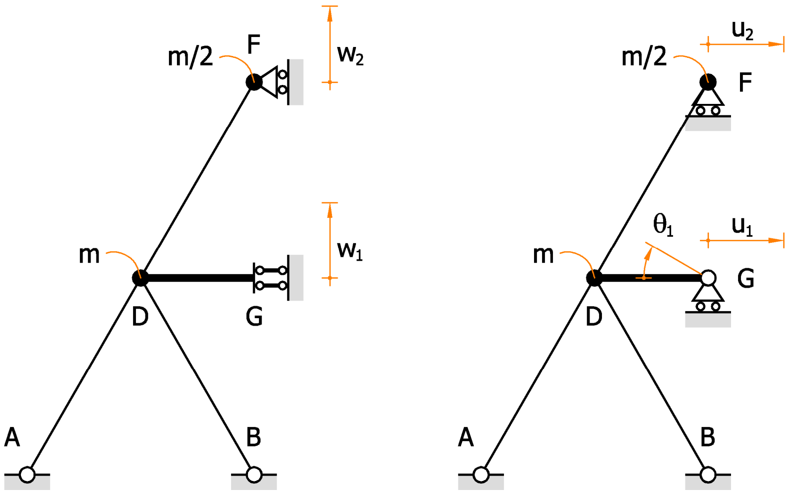
Prova d'esame del 5 luglio 2011 – Soluzione

Il sistema dato possiede 5 gradi di libertà. Esso, tuttavia, può essere studiato analizzando, separatamente, un sistema a 2 gradi di libertà, corrispondente alle configurazioni deformate simmetriche della struttura, ed un sistema a 3 gradi di libertà, corrispondente alle configurazioni deformate antisimmetriche. In questo modo, inoltre, è possibile limitare lo studio del sistema alla sola metà sinistra, introducendo opportuni vincoli in corrispondenza dell'asse di simmetria/antisimmetria.



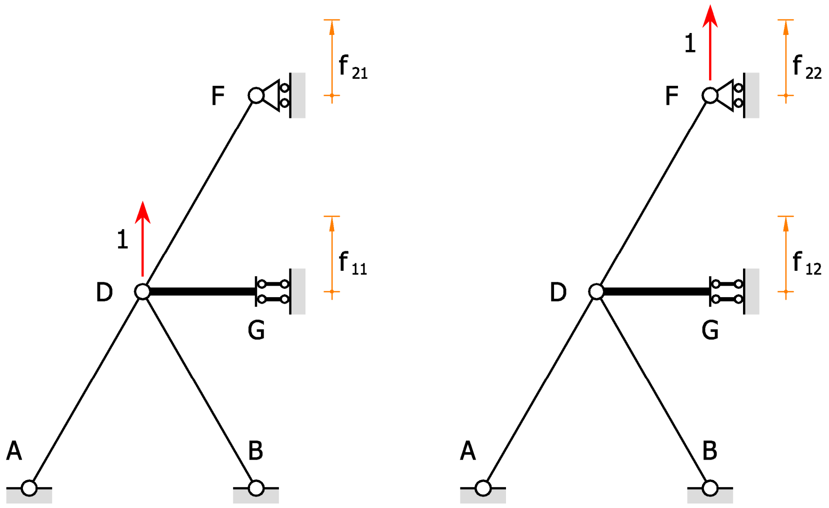
Sistemi simmetrico ed antisimmetrico – Definizione delle coordinate lagrangiane

Le coordinate lagrangiane scelte possono essere raccolte in un vettore di 2 + 3 = 5 componenti,

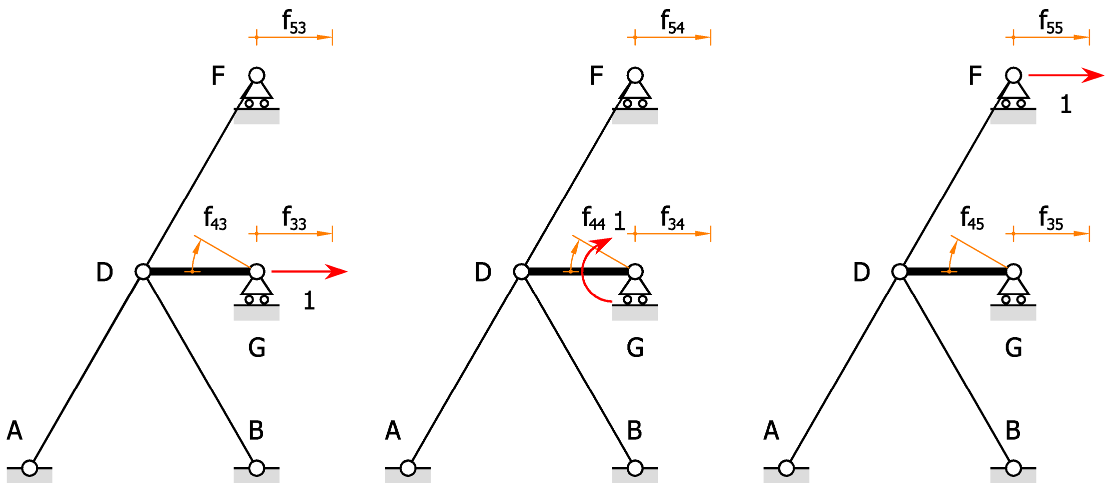
$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \hline v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \hline u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

Per determinare i coefficienti di flessibilità si studiano i sistemi riportati nelle figure seguenti, calcolando gli spostamenti corrispondenti all'applicazione dei rispettivi carichi unitari. A tal fine è utile ricordare che il "cavalletto" costituito da due aste inclinate contrapposte (ad esempio, le aste AD e BD) è equivalente a due molle disposte, rispettivamente, nelle direzioni orizzontale e verticale ed aventi le rigidezze

$$k_x = 2\frac{EA}{L}\cos^2 60° = \frac{1}{2}\frac{EA}{L} \quad \text{e} \quad k_z = 2\frac{EA}{L}\sin^2 60° = \frac{3}{2}\frac{EA}{L}.$$



Sistema simmetrico: determinazione dei coefficienti di flessibilità



Sistema antisimmetrico: determinazione dei coefficienti di flessibilità

Si ottengono così per il sistema simmetrico

$$f_{11} = \frac{1}{k_z}, \quad f_{21} = f_{11} = \frac{1}{k_z};$$

$$f_{12} = \frac{1}{k_z}, \quad f_{22} = f_{12} + \frac{1}{k_z/2} = \frac{3}{k_z};$$

e per il sistema anti simmetrico

$$f_{33} = \frac{1}{k_x}, \quad f_{43} = 0, \quad f_{53} = f_{33} = \frac{1}{k_x};$$

$$f_{34} = 0, \quad f_{44} = \frac{2/L}{k_z}\frac{1}{L/2} = \frac{4}{k_z L^2}, \quad f_{54} = f_{44}\frac{\sqrt{3}}{2}L = \frac{2\sqrt{3}}{k_z L};$$

$$f_{35} = \frac{1}{k_x}, \quad f_{45} = \frac{\sqrt{3}}{k_z}\frac{1}{L/2} = \frac{2\sqrt{3}}{k_z L}, \quad f_{55} = f_{35} + \frac{1}{k_x/2} + f_{45}\frac{\sqrt{3}}{2}L = \frac{3}{k_x} + \frac{3}{k_z}.$$

Prova d'esame di Dinamica delle Strutture del 5 luglio 2011

Docente: Dott. Ing. Paolo S. VALVO

Matricola dello studente:

$$M := 400000$$

Modulo di Young e densità del materiale (acciaio)

$$E := 210 \cdot 10^{9} \qquad \rho := 7850$$

Sezione trasversale delle aste

$$D_e := 0.2191 \qquad t := 0.010 \qquad A := \frac{\pi}{4} \cdot \left[D_e^{\;2} - \left(D_e - 2 \cdot t \right)^2 \right] = 0.006569$$

Lunghezza delle aste

$$L := 3$$

Masse concentrate

$$m := 5\% \cdot M = 20000$$

Rigidezze equivalenti dei cavalletti

$$\alpha := 60 \cdot \deg$$

$$k_x := 2 \cdot \frac{E \cdot A}{L} \cdot (\cos(\alpha))^2 = 229917458.4 \qquad k_z := 2 \cdot \frac{E \cdot A}{L} \cdot (\sin(\alpha))^2 = 689752375.1$$

Matrici di flessibilità

$$F_s := \begin{pmatrix} \frac{1}{k_z} & \frac{1}{k_z} \\ \frac{1}{k_z} & \frac{3}{k_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.449796 \times 10^{-9} & 1.449796 \times 10^{-9} \\ 1.449796 \times 10^{-9} & 4.349387 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

$$F_a := \begin{pmatrix} \frac{1}{k_x} & 0 & \frac{1}{k_x} \\ 0 & \frac{4}{k_z \cdot L^2} & \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{k_z \cdot L} \\ \frac{1}{k_x} & \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{k_z \cdot L} & \frac{3}{k_x} + \frac{3}{k_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.349 \times 10^{-9} & 0.000 \times 10^{0} & 4.349 \times 10^{-9} \\ 0.000 \times 10^{0} & 6.444 \times 10^{-10} & 1.674 \times 10^{-9} \\ 4.349 \times 10^{-9} & 1.674 \times 10^{-9} & 1.740 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

Matrici di rigidezza

$$K_s := F_s^{-1} = \begin{pmatrix} 1034628563 & -344876188 \\ -344876188 & 344876188 \end{pmatrix}$$

$$K_a := F_a^{-1} = \begin{pmatrix} 344876188 & 298671540 & -114958729 \\ 298671540 & 2327914266 & -298671540 \\ -114958729 & -298671540 & 114958729 \end{pmatrix}$$

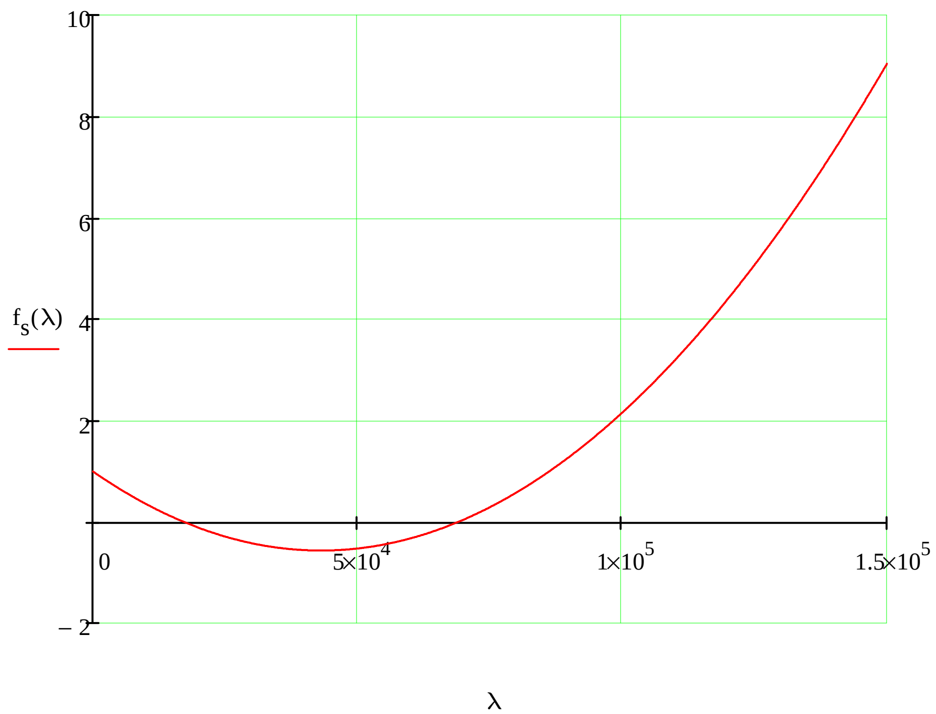
Matrici di massa

$$M_s := \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 10000 \end{pmatrix}$$

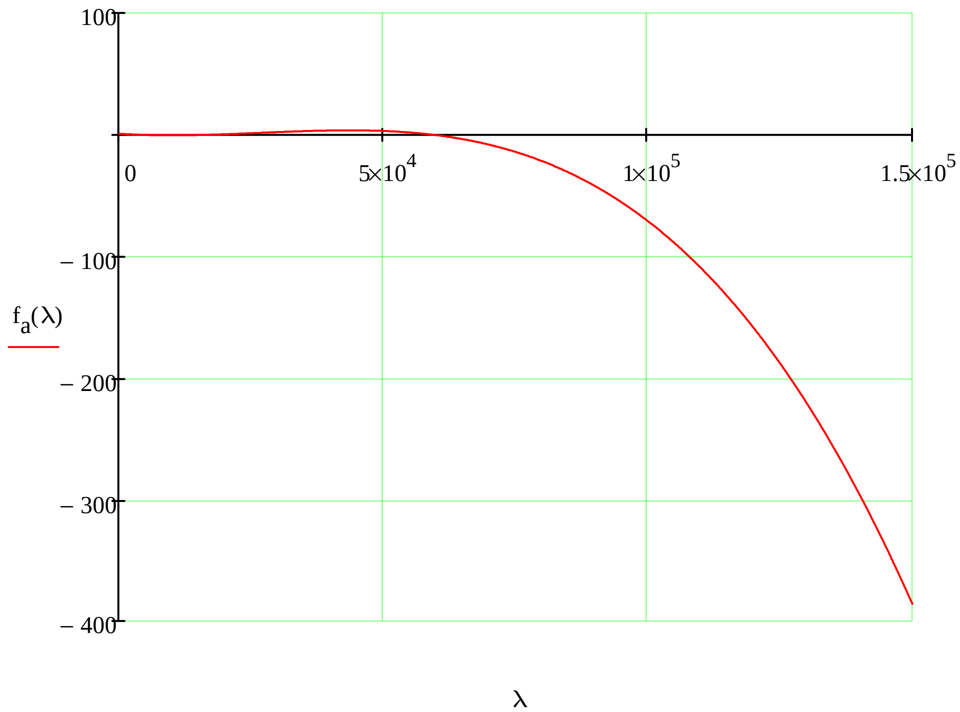
$$M_a := \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 45000 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 \end{pmatrix}$$

Ricerca degli autovalori

$$f_s(\lambda) := \frac{\left|K_s - \lambda \cdot M_s\right|}{\left|K_s\right|} \qquad \left|K_s\right| = 2.379 \times 10^{17} \qquad \left|M_s\right| = 2.000 \times 10^{8}$$



$$f_a(\lambda) := \frac{|K_a - \lambda \cdot M_a|}{|K_a|} \qquad |K_a| = 4.102 \times 10^{25} \qquad |M_a| = 9.000 \times 10^{12}$$



$$vec\_coeffs_s := f_s(\lambda)\ \text{coeffs}\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.000072489783011953933261 \\ 8.4076298257922644314\text{e-}10 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_s := \text{polyroots}(vec\_coeffs_s) = \begin{pmatrix} 17243.8 \\ 68975.2 \end{pmatrix}$$

$$vec\_coeffs_a := f_a(\lambda)\ \text{coeffs}\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.00028995913204781561048 \\ 1.7656022634163740713\text{e-}8 \\ -2.1940821421794456039\text{e-}13 \end{pmatrix}$$

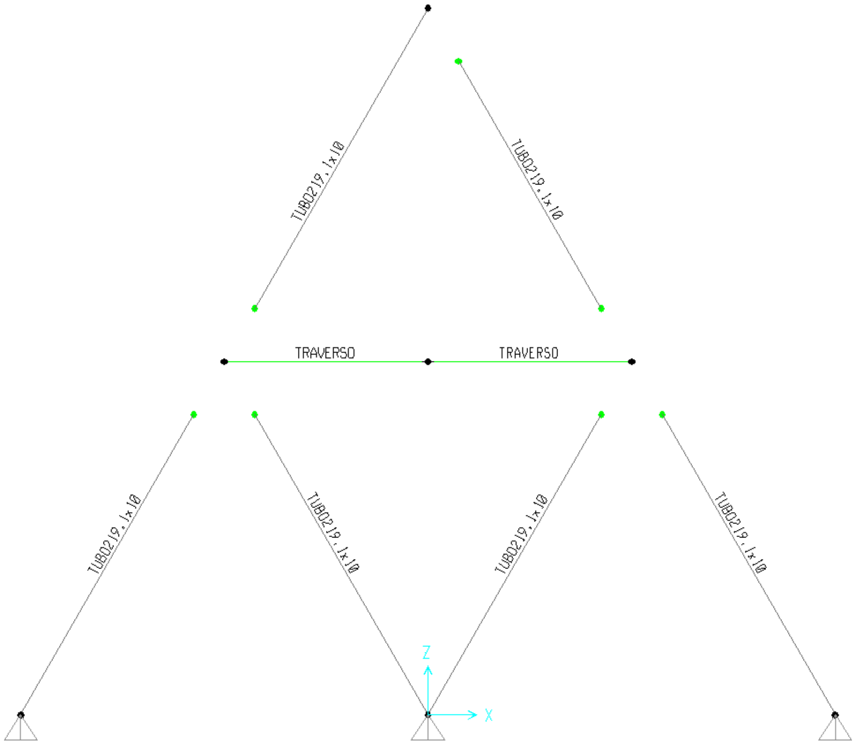
$$\lambda_a := \text{polyroots}(vec\_coeffs_a) = \begin{pmatrix} 4732.1 \\ 16168.0 \\ 59571.0 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni, frequenze e periodi propri

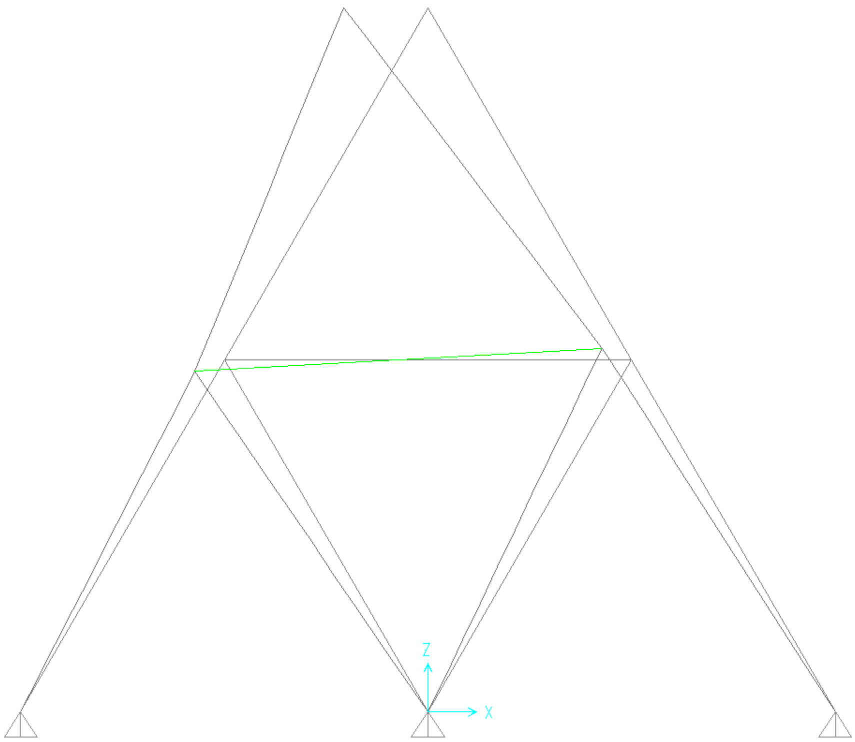
$$\omega_s := \sqrt{\lambda_s} = \begin{pmatrix} 131.3 \\ 262.6 \end{pmatrix} \qquad f_s := \frac{\omega_s}{2\cdot\pi} = \begin{pmatrix} 20.900 \\ 41.799 \end{pmatrix} \qquad T_s := \frac{1}{f_s} = \begin{pmatrix} 0.047848 \\ 0.023924 \end{pmatrix}$$

$$\omega_a := \sqrt{\lambda_a} = \begin{pmatrix} 68.8 \\ 127.2 \\ 244.1 \end{pmatrix} \qquad f_a := \frac{\omega_a}{2\cdot\pi} = \begin{pmatrix} 10.948 \\ 20.237 \\ 38.845 \end{pmatrix} \qquad T_a := \frac{1}{f_a} = \begin{pmatrix} 0.091338 \\ 0.049414 \\ 0.025743 \end{pmatrix}$$

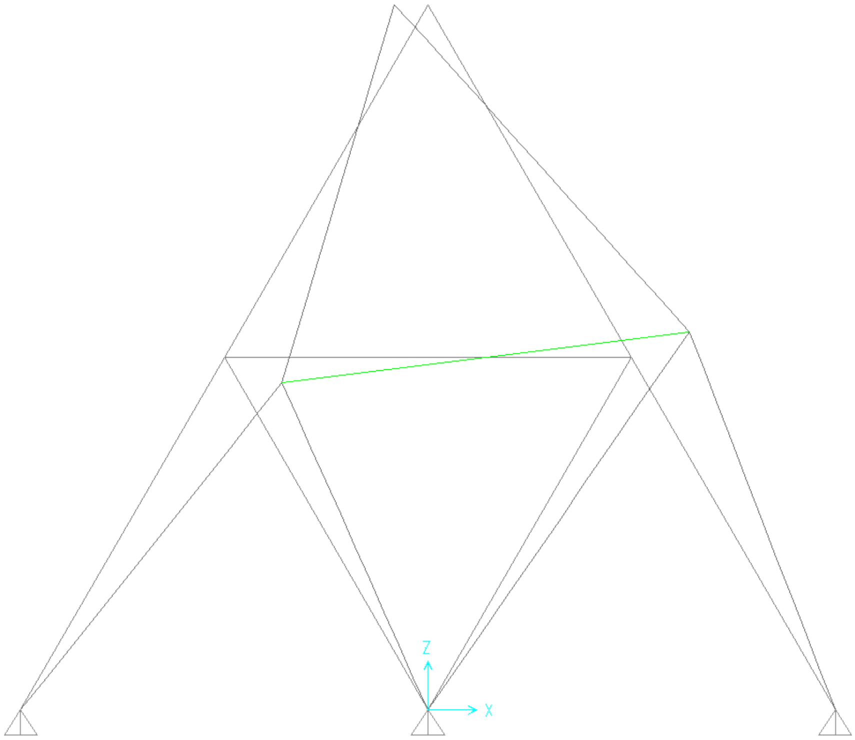
Prova d'esame del 5 luglio 2011 – Risultati analisi FEM



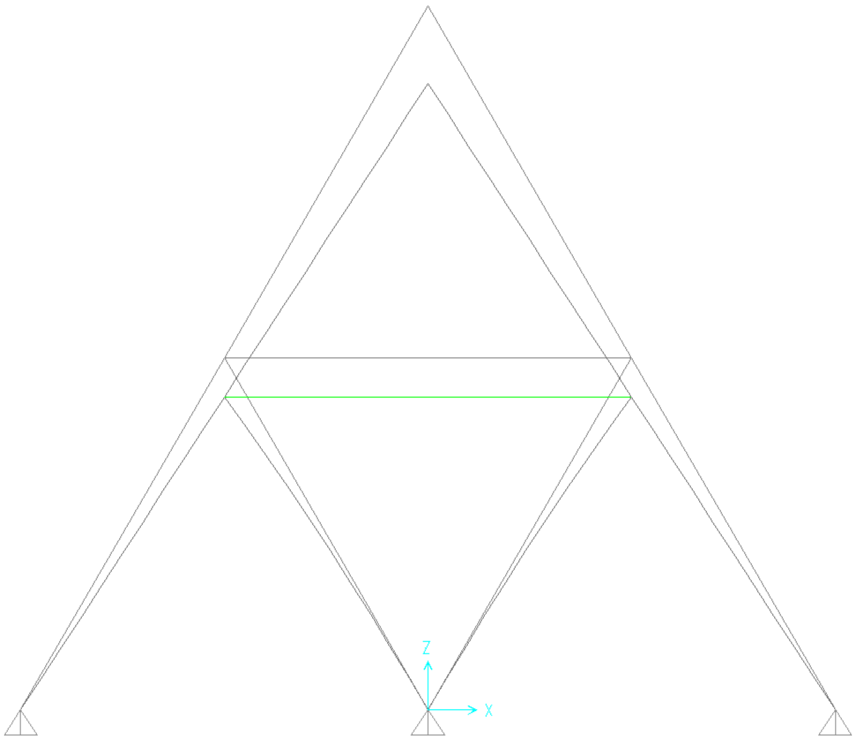
Configurazione di riferimento



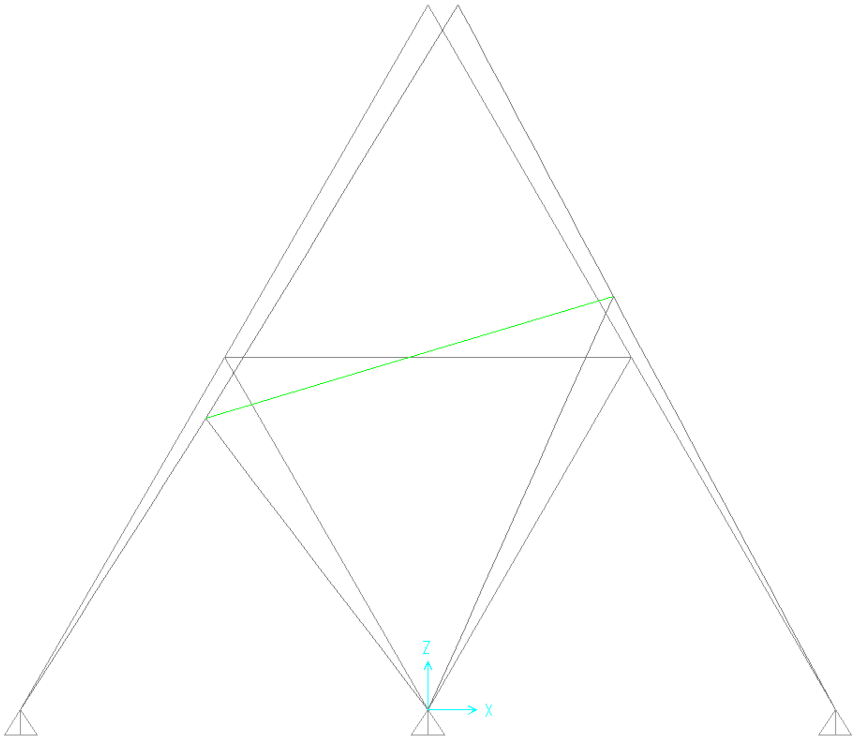
Forma modale – Modo 1 (f_1 = 10.901 Hz)



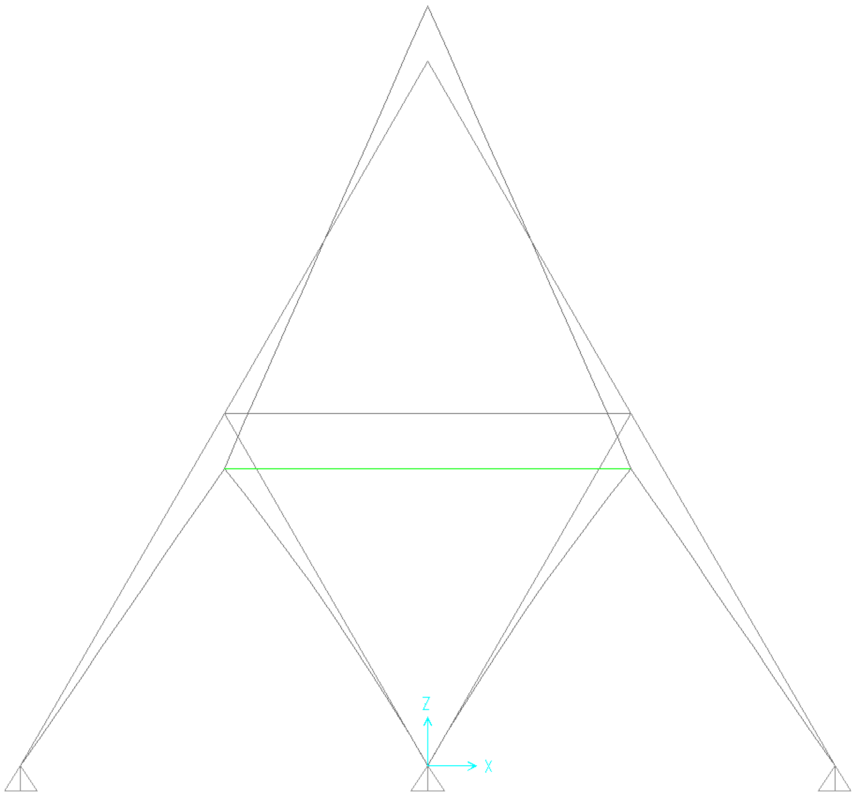
Forma modale – Modo 2 (f_2 = 20.125 Hz)



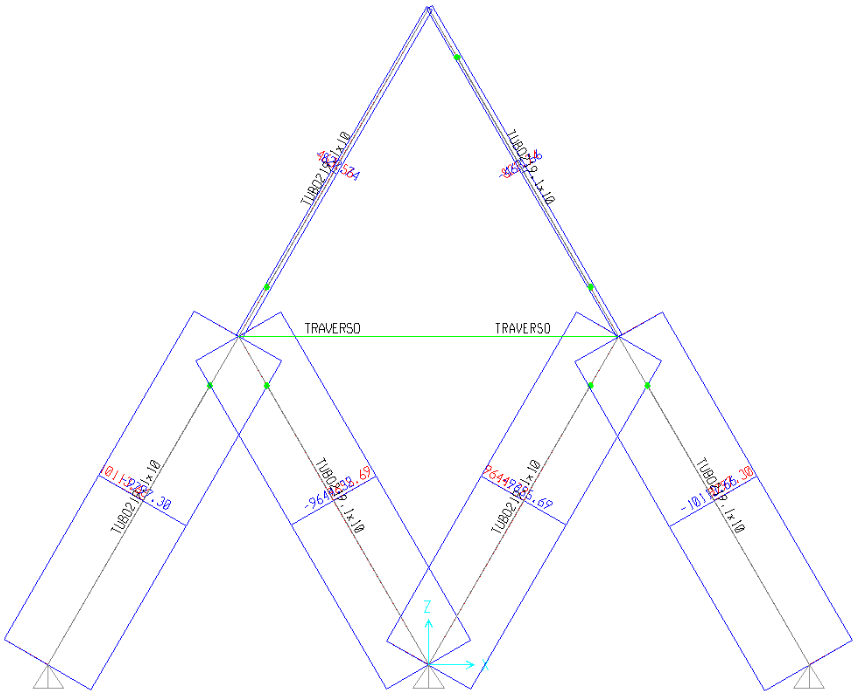
Forma modale – Modo 3 (f_3 = 20.808 Hz)



Forma modale – Modo 4 (f_4 = 38.629 Hz)



Forma modale – Modo 5 (f_5 = 41.587 Hz)



Forza normale – Inviluppo (N_{min} = –9.797 kN; N_{max} = 10.114 kN)