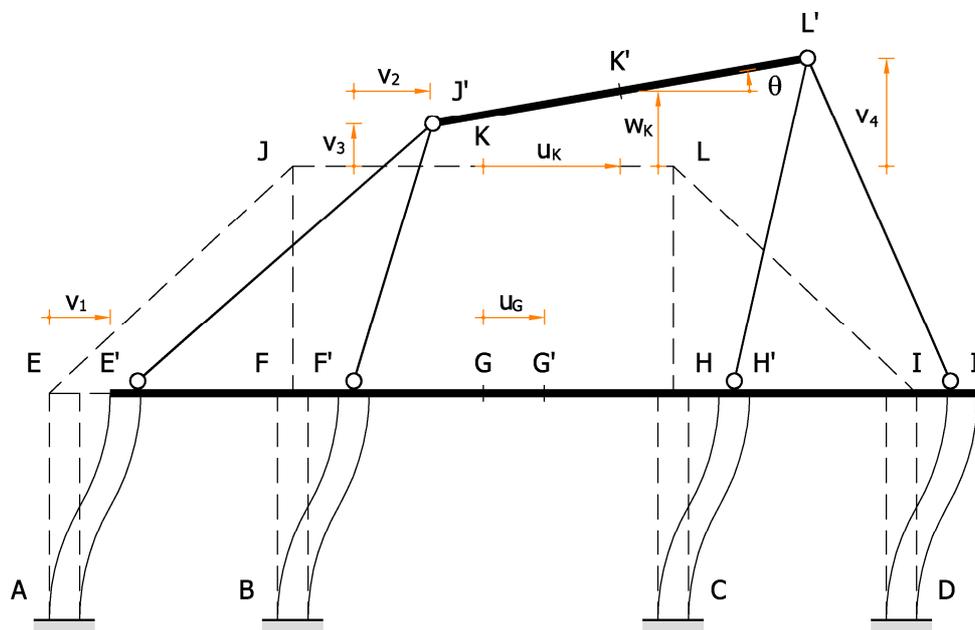




Prova d'esame del 4 febbraio 2012 – Soluzione

La struttura data può essere modellata come un sistema a 4 gradi di libertà. Scegliamo come coordinate lagrangiane lo spostamento orizzontale di E, lo spostamento orizzontale relativo di J rispetto a F, gli spostamenti verticali di J e L. Raccogliamo queste variabili nel vettore

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_E \\ u_J - u_F \\ w_J \\ w_L \end{Bmatrix}. \quad (1)$$



Scelta delle coordinate lagrangiane

Esprimiamo gli spostamenti dei punti del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$\begin{aligned} u_E = u_F = u_G = u_H = u_I = v_1, & \quad u_J = v_1 + v_2, & \quad u_K = v_1 + v_2, & \quad u_L = v_1 + v_2; \\ w_E = w_F = w_G = w_H = w_I = 0, & \quad w_J = v_3, & \quad w_K = (v_3 + v_4)/2, & \quad w_L = v_4. \end{aligned} \quad (2)$$

L'angolo di rotazione della trave JKL risulta

$$\theta = \frac{v_4 - v_3}{L_2} \quad (3)$$

dove L_2 è la lunghezza della trave stessa. Esprimiamo gli allungamenti delle aste elastiche in funzione delle coordinate lagrangiane

$$\Delta L_{EJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_2 + v_3), \quad \Delta L_{FJ} = v_3, \quad \Delta L_{HL} = v_4, \quad \Delta L_{IL} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-v_2 + v_4). \quad (4)$$



Le aste di acciaio sono soggette a forza normale in modo proporzionale ai rispettivi allungamenti:

$$N_{EJ} = \frac{E_s A_1}{\sqrt{2} L_1} \Delta L_{EJ}, \quad N_{FJ} = \frac{E_s A_2}{L_1} \Delta L_{FJ}, \quad N_{HL} = \frac{E_s A_2}{L_1} \Delta L_{HL}, \quad N_{IL} = \frac{E_s A_1}{\sqrt{2} L_1} \Delta L_{IL}, \quad (5)$$

dove A_1 e A_2 sono le aree delle sezioni trasversali dei profili UPN 200 e HE 240 A, rispettivamente, ed L_1 è la lunghezza delle aste verticali. I piedritti di calcestruzzo armato sono soggetti tutti alla medesima forza di taglio

$$T = 12 \frac{E_c J_c}{L_1^3} u_G, \quad (6)$$

dove J_c è il momento d'inerzia della sezione trasversale dei piedritti.

Ricaviamo le equazioni di equilibrio dinamico utilizzando il metodo energetico. L'energia potenziale totale del sistema è

$$V = U - W, \quad (7)$$

dove

$$U = 4 \frac{1}{2} \frac{12 E_c J_c}{L_1^3} u_G^2 + \frac{1}{2} \frac{E_s A_1}{\sqrt{2} L_1} (\Delta L_{EJ}^2 + \Delta L_{IL}^2) + \frac{1}{2} \frac{E_s A_2}{L_1} (\Delta L_{FJ}^2 + \Delta L_{HL}^2) \quad (8)$$

è l'energia di deformazione elastica, mentre

$$W = p_1 u_E - p_2 u_j \quad (9)$$

è il lavoro virtuale dei carichi.

L'energia cinetica del sistema è

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_G^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_K^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{w}_K^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2, \quad (10)$$

dove $I_2 = m_2 L_2^2 / 12$ è l'inerzia rotazionale della trave rigida JKL.

Sostituendo le espressioni (2)–(4) nelle (7)–(10), si ottengono V ed E_k in funzione delle coordinate lagrangiane. Quindi, per derivazione si ottengono le componenti della matrice di massa

$$[M] = [m_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{v}_i \partial \dot{v}_j} \right] = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 & 0 & 0 \\ m_2 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} m_2 & \frac{1}{6} m_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} m_2 & \frac{1}{3} m_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$



le componenti della matrice di rigidezza

$$[K] = [k_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial v_i \partial v_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{48E_c J_c}{L_1^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_s A_1}{\sqrt{2}L_1} & \frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} & -\frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} \\ 0 & \frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} & \frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} + \frac{E_s A_2}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} & 0 & \frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} + \frac{E_s A_2}{L_1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

e le componenti del vettore dei carichi

$$\{p\} = \{p_i\} = \left\{ \frac{\partial W}{\partial v_i} \right\} = \begin{Bmatrix} p_1(t) - p_2(t) \\ -p_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Le equazioni del moto in forma matriciale risultano infine

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 & 0 & 0 \\ m_2 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_2 & \frac{1}{6}m_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}m_2 & \frac{1}{3}m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{v}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{48E_c J_c}{L_1^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_s A_1}{\sqrt{2}L_1} & \frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} & -\frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} \\ 0 & \frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} & \frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} + \frac{E_s A_2}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} & 0 & \frac{E_s A_1}{2\sqrt{2}L_1} + \frac{E_s A_2}{L_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) - p_2(t) \\ -p_2(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

Prova d'esame di Dinamica delle Strutture del 4 febbraio 2012

Docente: Prof. Ing. Paolo S. VALVO

Matricola dello studente:

Matricola := 400000

Lunghezze [m]

$$L_1 := 3 \quad L_2 := 5 \quad H_1 := 3 \quad H_2 := 3$$

$$L_{EFGHI} := 2 \cdot L_1 + L_2 = 11.000 \quad L_{JKL} := L_2 = 5.000 \quad L_{EJ} := \sqrt{L_1^2 + H_2^2} = 4.243$$

Modulo di Young [Pa] e densità [kg/m³] dei materiali (calcestruzzo armato e acciaio)

$$E_c := 35 \cdot 10^9 \quad \rho_c := 2500$$

$$E_s := 210 \cdot 10^9 \quad \rho_s := 7850$$

Momento di inerzia della sezione trasversale [m⁴] delle travi di calcestruzzo (30x40)

$$J_c := \frac{1}{12} \cdot 0.30 \cdot 0.40^3 = 0.001600$$

Area della sezione trasversale [m²] delle aste di acciaio (UPN 200 e HE 240 A)

$$A_1 := 32.2 \cdot 10^{-4} \quad A_2 := 76.84 \cdot 10^{-4} = 7.684 \times 10^{-3}$$

Massa [kg] e inerzia rotazionale [kg m²] delle travi rigide

$$m_1 := \frac{\text{Matricola}}{5} = 80000.0 \quad I_1 := \frac{m_1 \cdot L_{EFGHI}^2}{12} = 806666.7$$

$$m_2 := \frac{m_1}{2} = 40000.0 \quad I_2 := \frac{m_2 \cdot L_{JKL}^2}{12} = 83333.3$$

Matrice di massa [kg]

$$M := \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 & 0 & 0 \\ m_2 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \cdot m_2 & \frac{1}{6} \cdot m_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \cdot m_2 & \frac{1}{3} \cdot m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120000.0 & 40000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 40000.0 & 40000.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 13333.3 & 6666.7 \\ 0.0 & 0.0 & 6666.7 & 13333.3 \end{pmatrix}$$

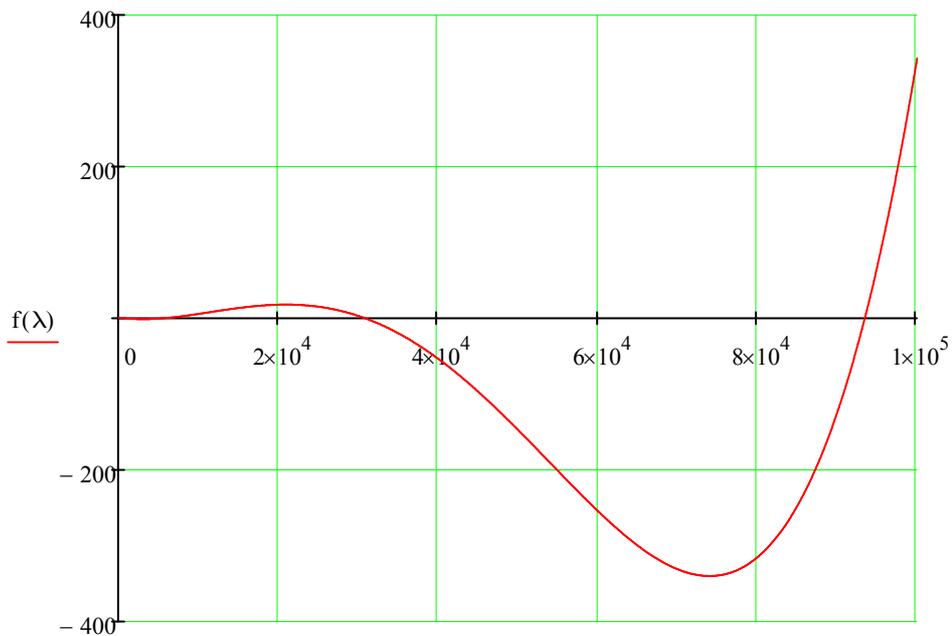
Matrice di rigidezza

$$\underline{\underline{K}} := \begin{pmatrix} \frac{48 \cdot E_c \cdot J_c}{H_1^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_s \cdot A_1}{\sqrt{2} \cdot L_1} & \frac{E_s \cdot A_1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot L_1} & -\frac{E_s \cdot A_1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot L_1} \\ 0 & \frac{E_s \cdot A_1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot L_1} & \frac{E_s \cdot A_1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot L_1} + \frac{E_s \cdot A_2}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{E_s \cdot A_1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot L_1} & 0 & \frac{E_s \cdot A_1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot L_1} + \frac{E_s \cdot A_2}{L_1} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 99555555.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 159381868.5 & 79690934.2 & -79690934.2 \\ 0.0 & 79690934.2 & 617570934.2 & 0.0 \\ 0.0 & -79690934.2 & 0.0 & 617570934.2 \end{pmatrix}$$

Ricerca degli autovalori

$$f(\lambda) := \frac{|K - \lambda \cdot M|}{|K|} \quad |K| = 5.271 \times 10^{33} \quad |M| = 4.267 \times 10^{17}$$



λ

Vettore dei coefficienti dell'equazione caratteristica

$$\text{vec_coeffs} := f(\lambda) \text{ coeffs} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.001538289016011979941 \\ 2.9837001399996581119\text{e-}7 \\ -1.0582917909028072955\text{e-}11 \\ 8.0949105991584192686\text{e-}17 \end{pmatrix}$$

Autovalori generalizzati [rad²/s²]

$$\lambda := \text{polyroots}(\text{vec_coeffs}) = \begin{pmatrix} 758.7 \\ 5641.9 \\ 30878.5 \\ 93456.3 \end{pmatrix}$$

Pulsazioni [rad/s], frequenze [Hz] e periodi propri [s]

$$\omega := \sqrt{\lambda} = \begin{pmatrix} 27.545 \\ 75.112 \\ 175.723 \\ 305.706 \end{pmatrix} \quad f := \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \begin{pmatrix} 4.384 \\ 11.955 \\ 27.967 \\ 48.655 \end{pmatrix} \quad T := \frac{1}{f} = \begin{pmatrix} 0.228103 \\ 0.083650 \\ 0.035756 \\ 0.020553 \end{pmatrix}$$

Carichi dinamici [N]

$$p_{1.\text{max}} := \frac{\text{Matricola}}{2000} \cdot 1000 = 200000 \quad p_{2.\text{max}} := \frac{p_{1.\text{max}}}{2} = 100000$$

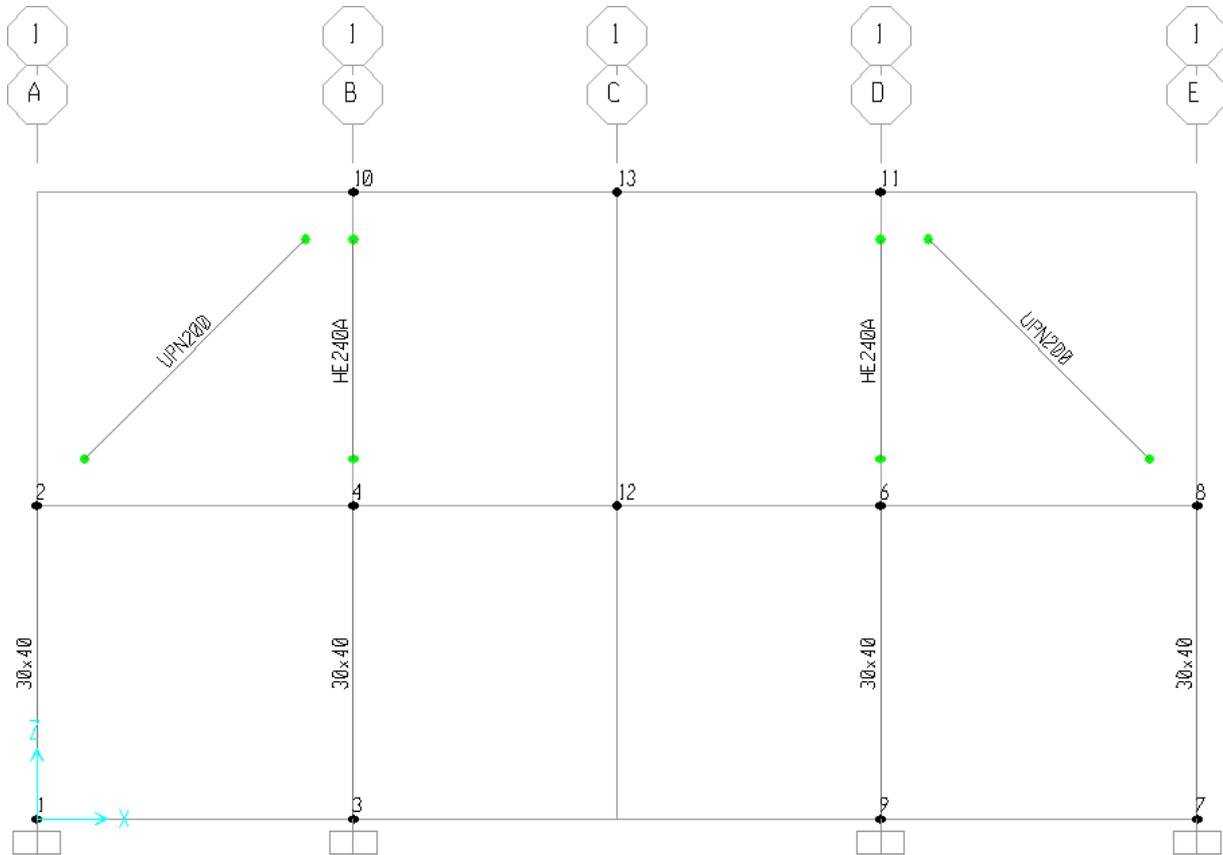
Impulso dei carichi [N s]

$$I_{p1} := \int_0^{0.1} p_{1.\text{max}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{0.1}\right) dt + \int_0^{0.1} \frac{p_{1.\text{max}}}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{0.1}\right) dt = 19098.6$$

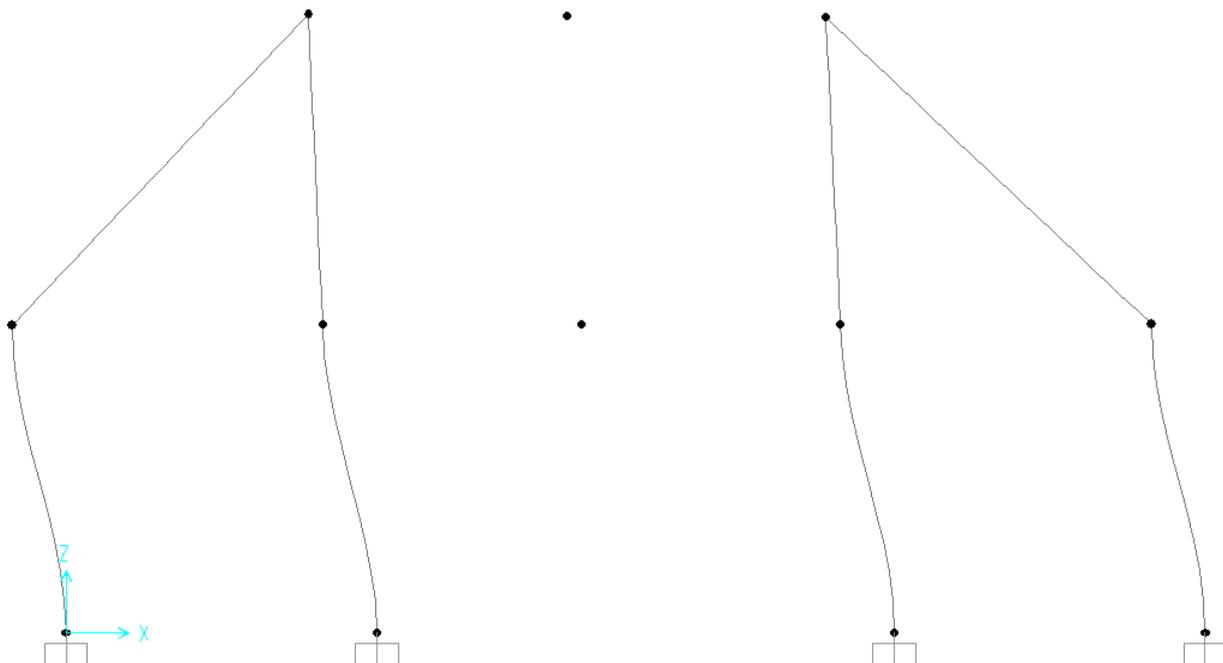
$$I_{p2} := \int_0^{0.3} p_{2.\text{max}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{0.3}\right) dt = 19098.6$$



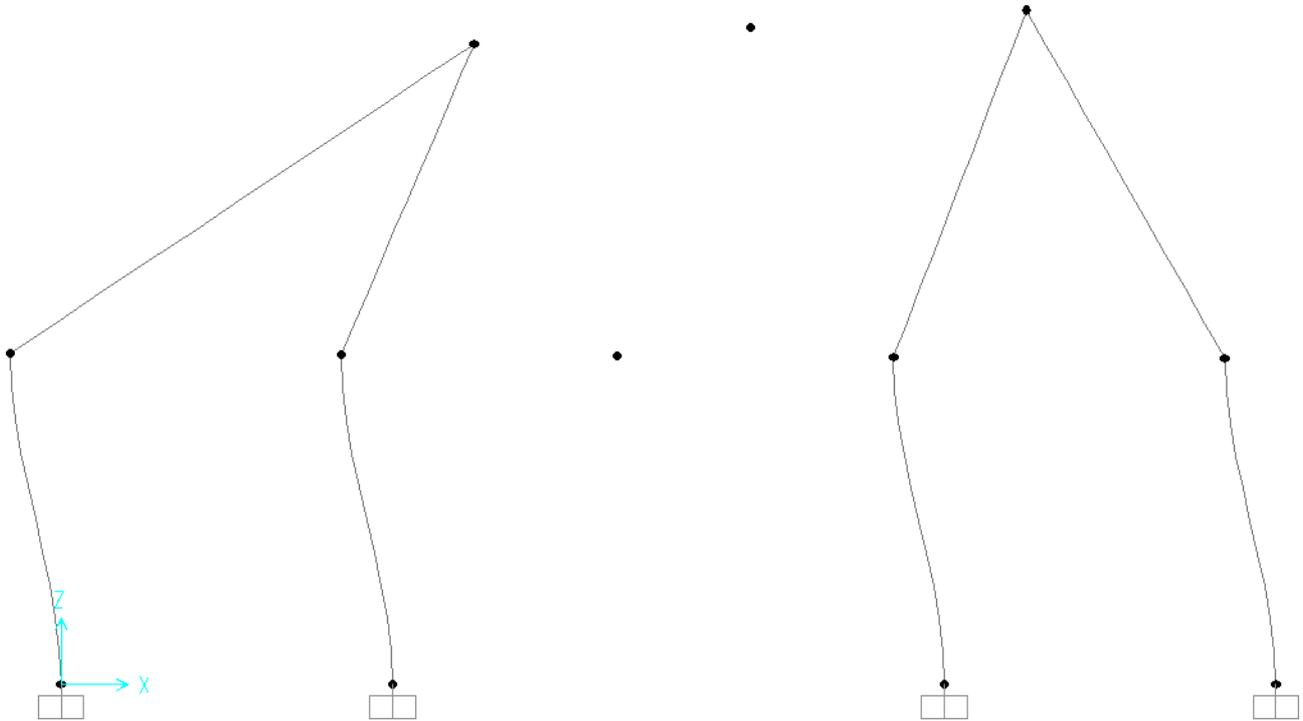
Prova d'esame del 4 febbraio 2012 – Risultati analisi FEM



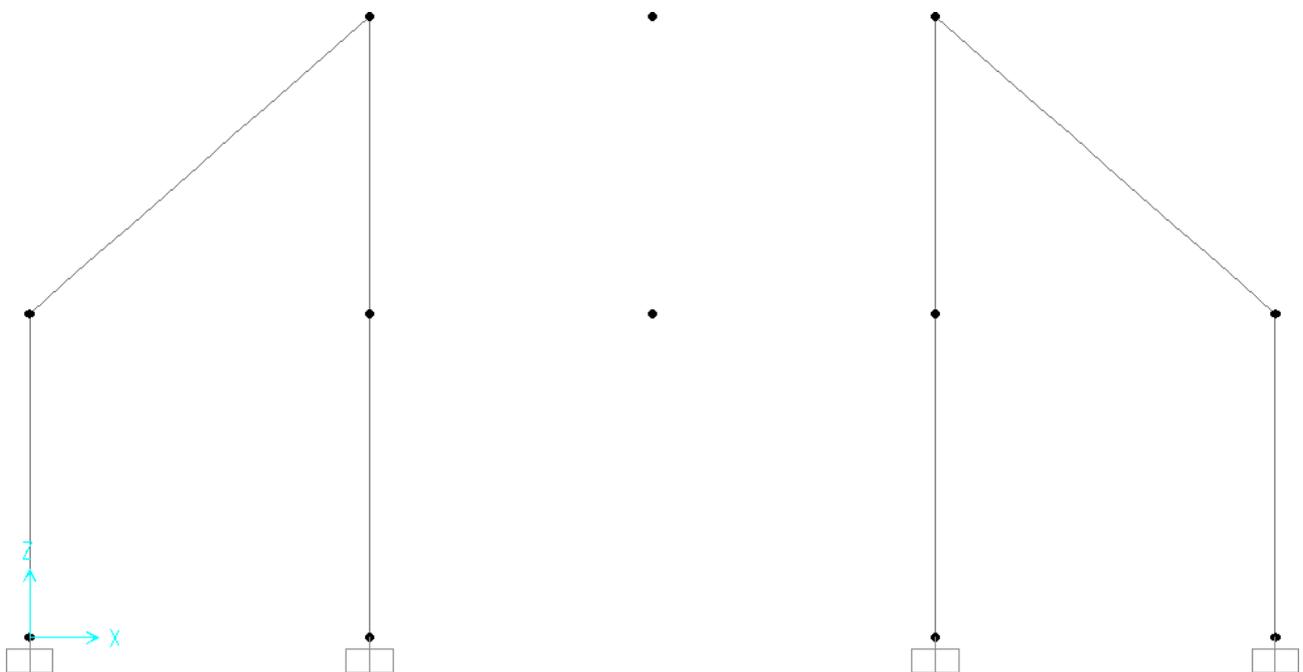
Configurazione di riferimento



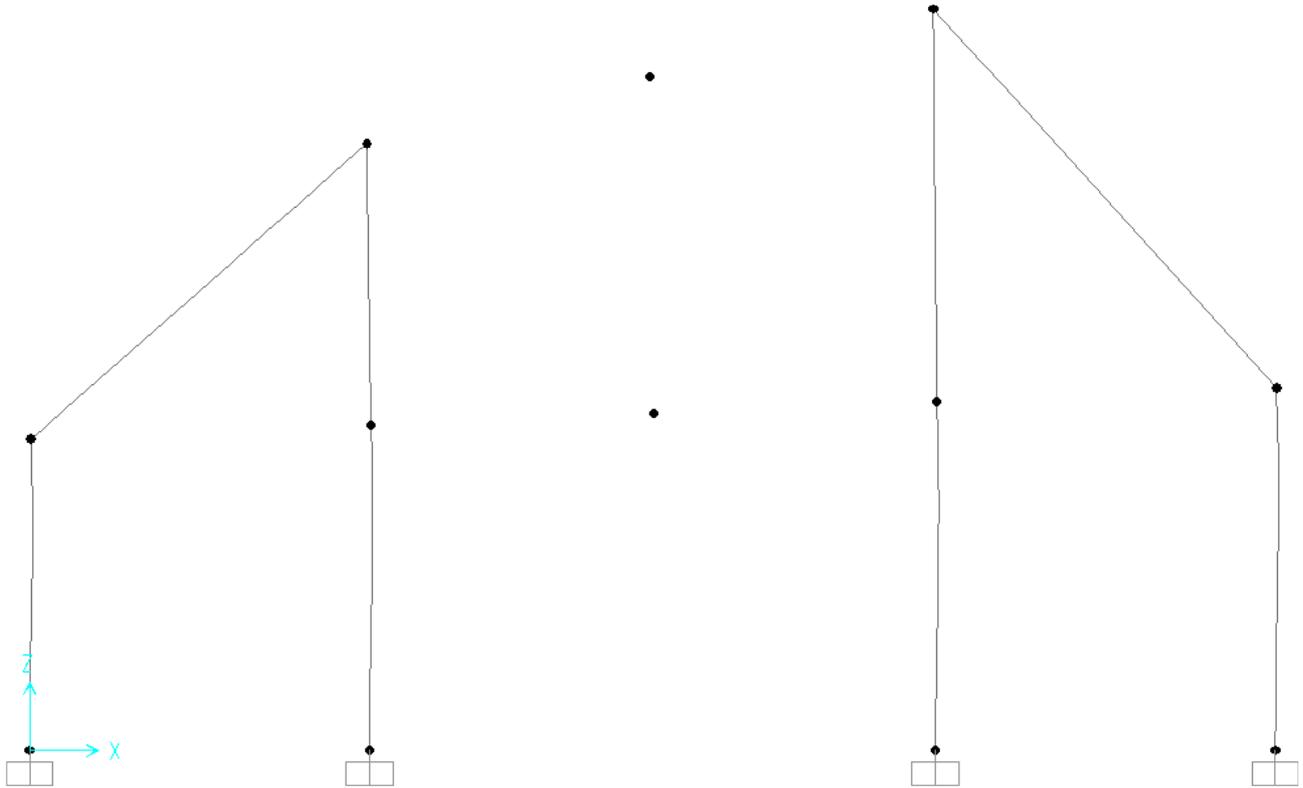
Forma modale – Modo 1 ($f_1 = 4.228$ Hz)



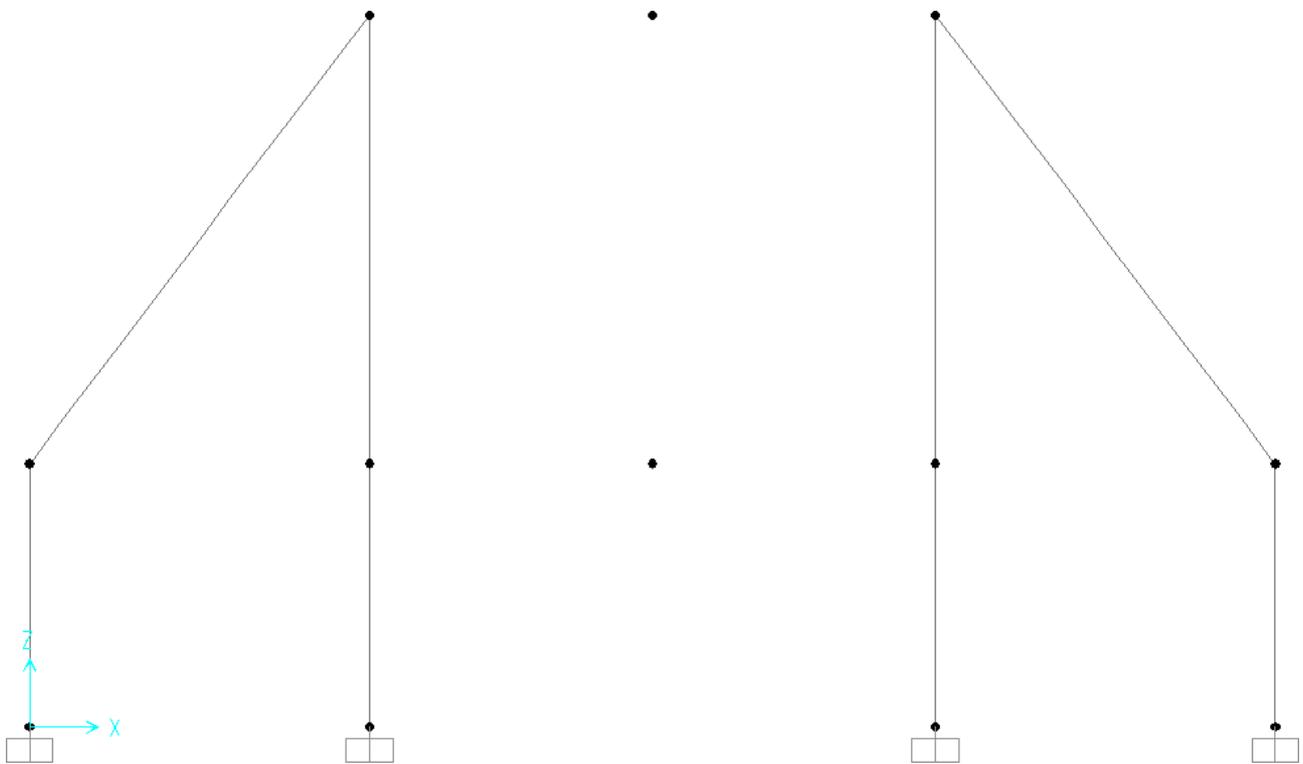
Forma modale – Modo 2 ($f_2 = 11.787$ Hz)



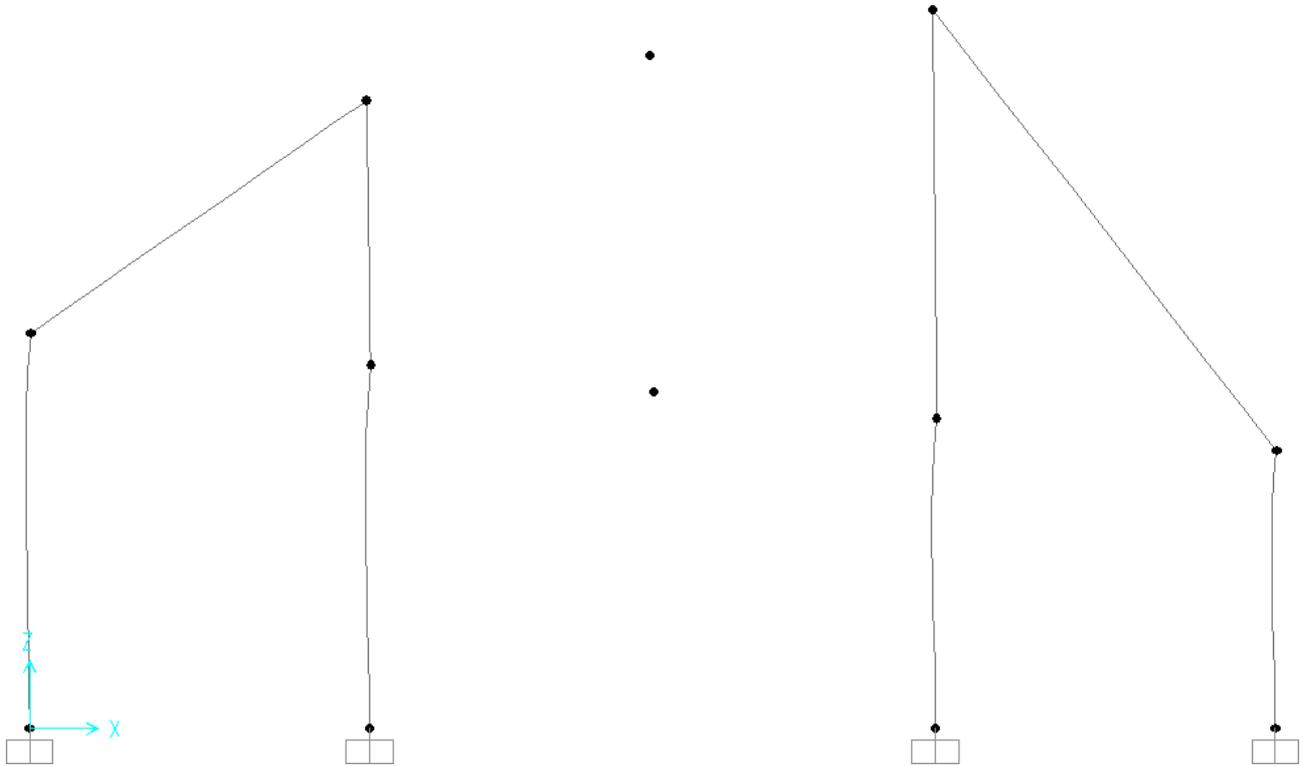
Forma modale – Modo 3 ($f_3 = 24.135$ Hz)



Forma modale – Modo 4 ($f_4 = 43.062$ Hz)



Forma modale – Modo 5 ($f_5 = 47.986$ Hz)



Forma modale – Modo 6 ($f_6 = 62.335$ Hz)

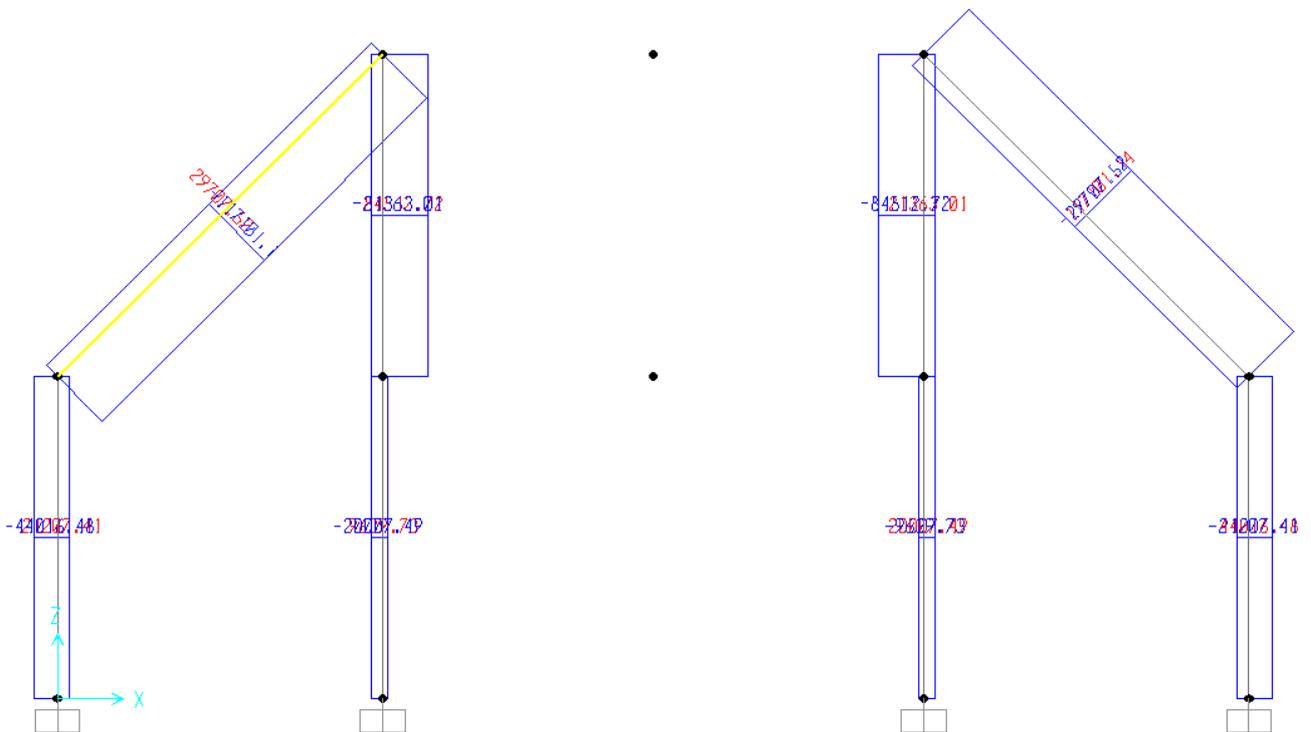


Diagramma involuppo della forza normale
($N_{\min} = -117.101$ kN, $N_{\max} = 117.101$ kN)

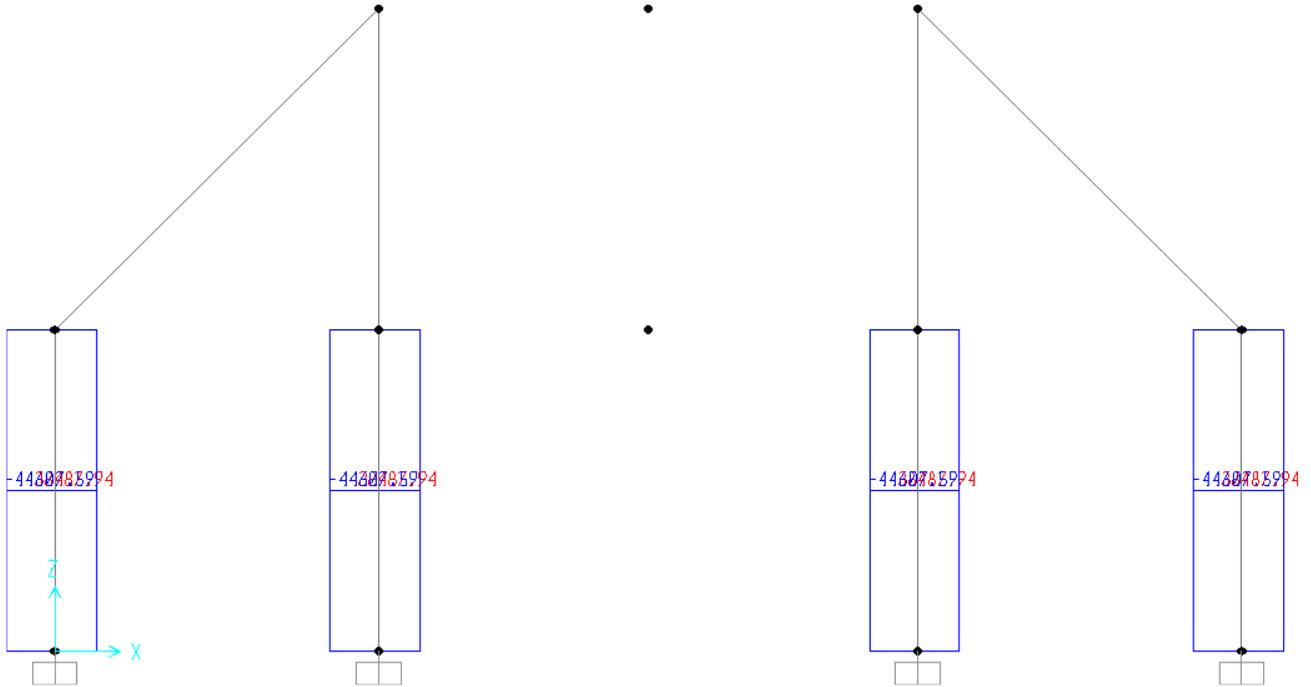


Diagramma involucro della forza di taglio
($T_{\min} = -44.608 \text{ kN}$, $T_{\max} = 38.488 \text{ kN}$)

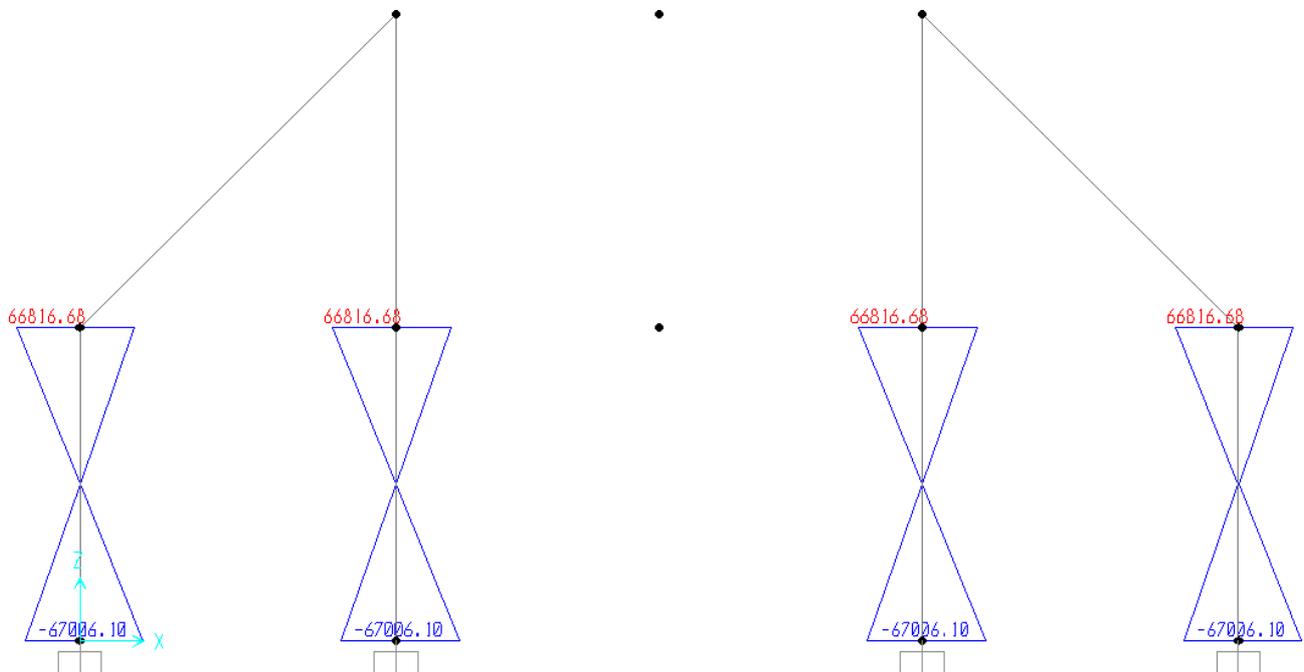


Diagramma involucro del momento flettente
($M_{\min} = -67.001 \text{ kN m}$, $M_{\max} = 66.817 \text{ kN m}$)