UNIVERSITÀ DI PISA – Facoltà di Ingegneria

Scienza delle Costruzioni (CdLM in Ingegneria Edile – Architettura)

A.A. 2011/2012

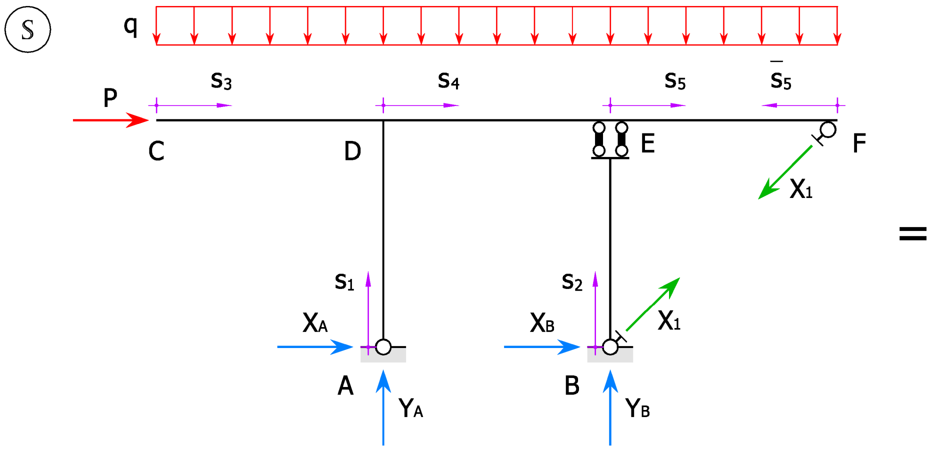
Docenti: Salvatore Sergio LIGARÒ & Paolo Sebastiano VALVO

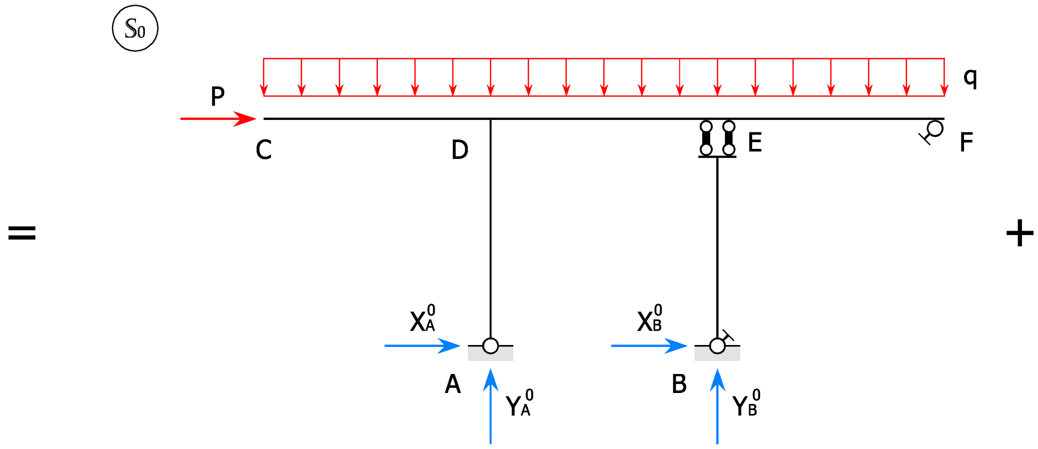
Web: www.dic.unipi.it/paolovalvo/sdc_edarch.html

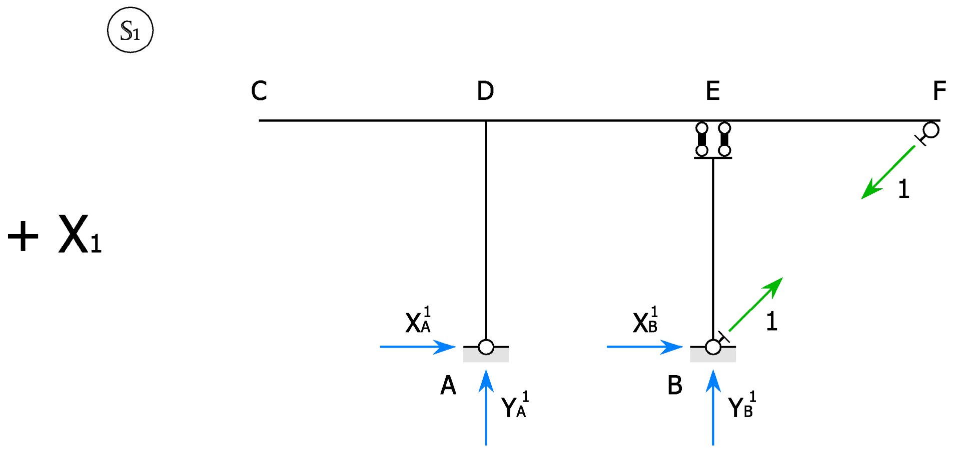
Prova scritta del 15 giugno 2012 – Soluzione

Problema A

Si risolve il problema col metodo delle forze, scegliendo come incognita iperstatica X_1 la forza normale nell'asta BF. Pertanto, il sistema $\mathcal{S}$, equivalente a quello effettivo, è decomposto nella somma del sistema $\mathcal{S}_0$, in cui agiscono le azioni esterne, e del sistema $\mathcal{S}_1$, in cui agisce l'incognita iperstatica assunta unitaria, moltiplicato per il valore X_1 dell'incognita iperstatica stessa.







Sistema S_0

Mediante le equazioni di equilibrio statico, si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione nel sistema S_0. Le reazioni vincolari risultano

$$X_A^0 = -qL, \quad Y_A^0 = \frac{1}{2}qL, \quad X_B^0 = 0, \quad Y_B^0 = \frac{5}{2}qL.$$

Le caratteristiche della sollecitazione hanno le espressioni riportate nella tabella seguente.

Trave n.	Estremi IJ	Ascissa	Forza normale N_{IJ}^0	Forza di taglio T_{IJ}^0	Momento flettente M_{IJ}^0
1	AD	$0 \le s_1 \le L$	$-\frac{1}{2}qL$	qL	qLs_1
2	BE	$0 \le s_2 \le L$	$-\frac{5}{2}qL$	0	0
3	CD	$0 \le s_3 \le L$	$-qL$	$-qs_3$	$-\frac{1}{2}qs_3^2$
4	DE	$0 \le s_4 \le L$	0	$-\frac{1}{2}qL - qs_4$	$\frac{1}{2}qL^2 - \frac{1}{2}qLs_4 - \frac{1}{2}qs_4^2$
5	EF	$0 \le s_5 \le L$ $(\bar{s}_5 = L - s_5)$	0	$q\bar{s}_5$	$-\frac{1}{2}q\bar{s}_5^2$

Sistema S_1

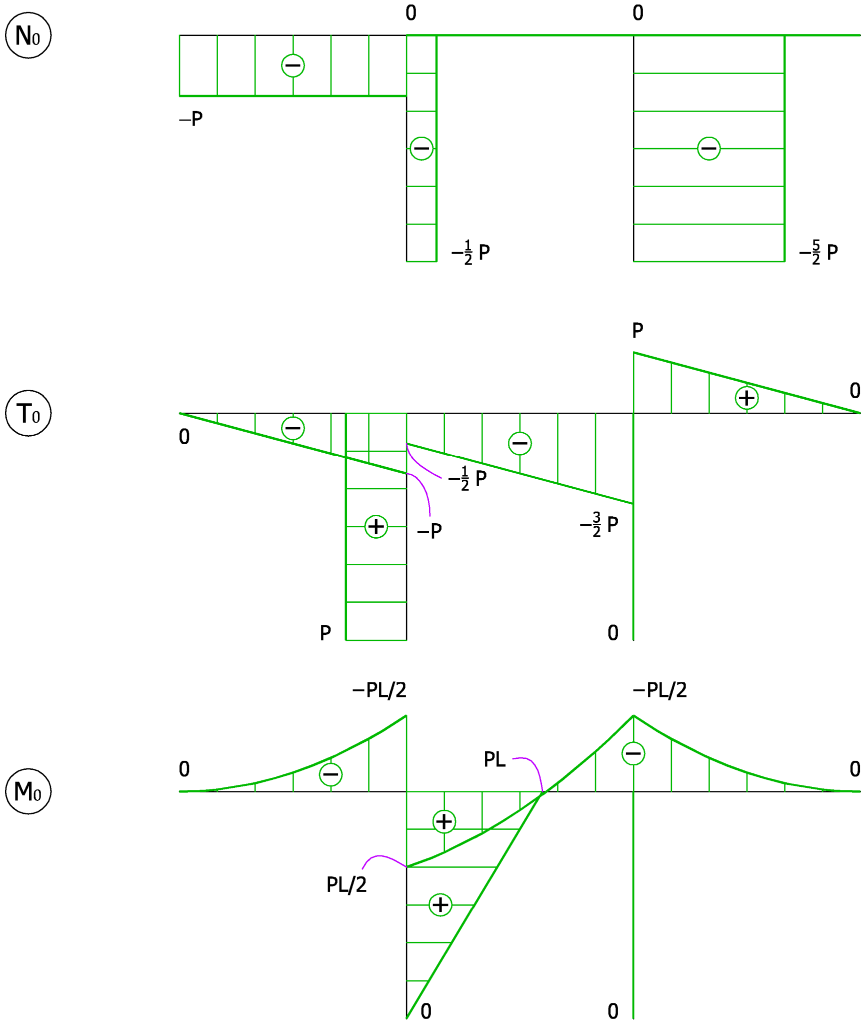
Analogamente, imponendo l'equilibrio statico nel sistema S_1, si trovano le reazioni vincolari

$$X_A^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad Y_A^1 = 0, \quad X_B^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad Y_B^1 = 0.$$

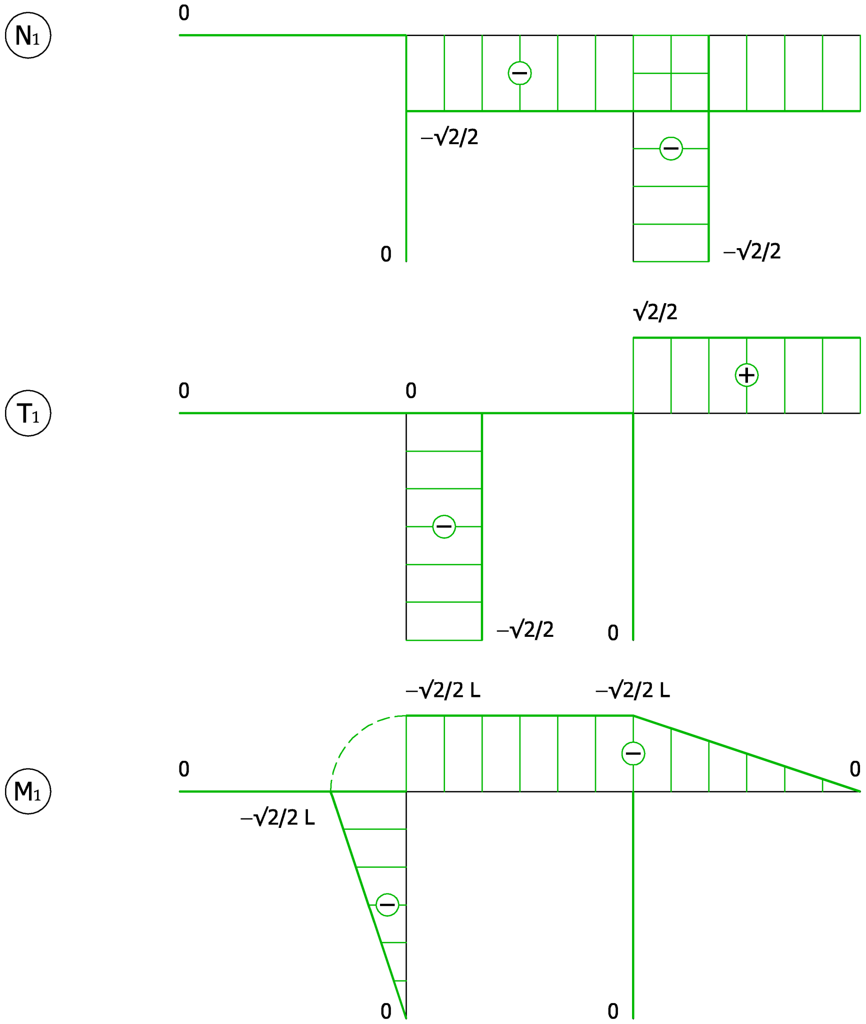
Le caratteristiche della sollecitazione hanno le espressioni riportate nella tabella seguente.

Trave n.	Estremi IJ	Ascissa	Forza normale N_{IJ}^1	Forza di taglio T_{IJ}^1	Momento flettente M_{IJ}^1
1	AD	$0 \le s_1 \le L$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}s_1$
2	BE	$0 \le s_2 \le L$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0
3	CD	$0 \le s_3 \le L$	0	0	0
4	DE	$0 \le s_4 \le L$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}L$
5	EF	$0 \le s_5 \le L$ $(\bar{s}_5 = L - s_5)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{s}_5$

Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione nel sistema S_0



Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione nel sistema S_1



Determinazione dell'incognita iperstatica

Per il sistema in esame, l'equazione di Müller-Breslau risulta

$$\eta_1 = \eta_{10} + X_1 \eta_{11},$$

dove

$$\eta_1 = -\sqrt{2}\,\frac{L}{EA} X_1 .$$

Applicando il Teorema dei lavori virtuali, si calcolano i valori degli altri coefficienti:

$$\mathcal{L}_e^{1\to0} = 1\cdot\eta_{10} = \mathcal{L}_i^{1\to0} = \int_\Omega M_{IJ}^1\,\kappa_{IJ}^0\,ds = \int_\Omega M_{IJ}^1\,\frac{M_{IJ}^0}{EJ}\,ds \quad\Rightarrow\quad \eta_{10} = -\frac{7\sqrt{2}}{48}\frac{qL^4}{EJ};$$

$$\mathcal{L}_e^{1\to1} = 1\cdot\eta_{11} = \mathcal{L}_i^{1\to1} = \int_\Omega M_{IJ}^1\,\kappa_{IJ}^1\,ds = \int_\Omega M_{IJ}^1\,\frac{M_{IJ}^1}{EJ}\,ds \quad\Rightarrow\quad \eta_{11} = \frac{5}{6}\frac{L^3}{EJ}.$$

Infine, si determina il valore dell'incognita iperstatica

$$X_1 = \frac{7}{4}\,\frac{qL}{5\sqrt{2} + 12\dfrac{EJ}{EAL^2}}.$$

Problema B

Rispetto al sistema di riferimento fissato Ox_1x_2, il gradiente di spostamento risulta

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} \equiv [H] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2^0} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1^0} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \dfrac{x_2^0}{a} & \varepsilon \dfrac{x_1^0}{a} \\ \varepsilon \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi x_1^0}{2a} & 0 \end{bmatrix};$$

da quest'ultimo, si possono ricavare il gradiente di trasformazione,

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{I} \equiv [F] = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \dfrac{x_2^0}{a} & \varepsilon \dfrac{x_1^0}{a} \\ \varepsilon \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi x_1^0}{2a} & 1 \end{bmatrix},$$

ed il tensore di deformazione di Green-Lagrange,

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) \equiv [G] = \begin{bmatrix} \varepsilon \dfrac{x_2^0}{a} + \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 [(\dfrac{x_2^0}{a})^2 + \dfrac{\pi^2}{4} \cos^2 \dfrac{\pi x_1^0}{2a}] & \dfrac{1}{2}\varepsilon [\dfrac{x_1^0}{a} + \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi x_1^0}{2a}] + \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 \dfrac{x_1^0 x_2^0}{a^2} \\ \dfrac{1}{2}\varepsilon [\dfrac{x_1^0}{a} + \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi x_1^0}{2a}] + \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 \dfrac{x_1^0 x_2^0}{a^2} & \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 (\dfrac{x_1^0}{a})^2 \end{bmatrix}.$$

Se $\varepsilon \ll 1$, vale l'ipotesi di piccole deformazioni, per cui

$$\mathbf{G} \cong \mathbf{E} = \mathrm{sym}\, \mathbf{H} \equiv [E] = \begin{bmatrix} \varepsilon \dfrac{x_2^0}{a} & \dfrac{1}{2}\varepsilon (\dfrac{x_1^0}{a} + \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi x_1^0}{2a}) \\ \dfrac{1}{2}\varepsilon (\dfrac{x_1^0}{a} + \dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi x_1^0}{2a}) & 0 \end{bmatrix}.$$

La variazione locale di area è data dalla formula di Nanson,

$$\mathbf{n}\, dA = J\, \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_0\, dA_0 ,$$

dove

$$J = \det \mathbf{F} = 1 + \varepsilon \frac{x_2^0}{a} - \varepsilon^2 \frac{\pi}{2} \frac{x_1^0}{a} \cos \frac{\pi x_1^0}{2a}$$

e $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 \equiv \{0, 0, 1\}^T$. Pertanto, la variazione di area dell'intera regione Ω_0 risulta

$$\Delta A = A - A_0 = \int_{\Omega_0} (J-1)\, dA_0 = \int_0^{2a} [\int_0^a \varepsilon \frac{x_2^0}{a} - \varepsilon^2 \frac{\pi}{2} \frac{x_1^0}{a} \cos \frac{\pi x_1^0}{2a}\, dx_2^0]\, dx_1^0 = \cdots = \varepsilon a^2 + \frac{4}{\pi} \varepsilon^2 a^2 .$$

Nell'ipotesi di piccole deformazioni,

$$\Delta A \cong \int_{\Omega_0} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, dA_0 = \int_0^{2a} [\int_0^a \varepsilon \frac{x_2^0}{a}\, dx_2^0]\, dx_1^0 = \cdots = \varepsilon a^2 .$$