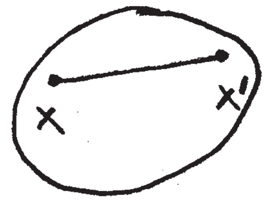
Per parlare di <u>convessità</u>, basta la struttura di uno <u>spazio vettoriale</u>.

<u>Def.</u> Sia X uno spazio vettoriale (reale). Se $K \subseteq X$, diciamo che K è <u>convesso</u> se

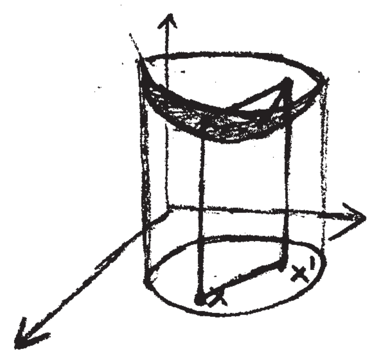
$$(1-t)x + t x' \in K \quad \forall t \in [0,1],\ \forall x, x' \in K.$$



<u>Def.</u> Sia X uno spazio vettoriale, sia $K \subseteq X$ un convesso. Se $f : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, diciamo che f è <u>convessa</u> se

$$f((1-t)x + t x') \leq (1-t) f(x) + t\, f(x') \quad \forall t \in [0,1],\ \forall x, x' \in K.$$

Naturalmente, vogliamo parlare di convessi <u>chiusi</u> e di funzioni convesse <u>continue</u>, quindi sullo spazio vettoriale X metteremo una topologia e anche una distanza, magari compatibili con la struttura di X; quindi, supporremo X spazio normato, e magari completo: cioè, X <u>spazio di Banach</u>.



Ad esempio, $X = \mathbb{R}^n$ oppure X spazio di Hilbert, ma non solo.

<u>Esempi di insiemi convessi</u>

- <u>iperpiani</u>: se $\varphi : X \to \mathbb{R}$ è lineare,

  $K = \{x \in X : \varphi x = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, è un <u>iperpiano affine</u>

(se $X = \mathbb{R}^n$, avremo $K = \{x \in X : \langle x, y_0 \rangle = a\}$ con $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ = prodotto scalare: quindi K è un iperpiano $(n-1)$-dimensionale).

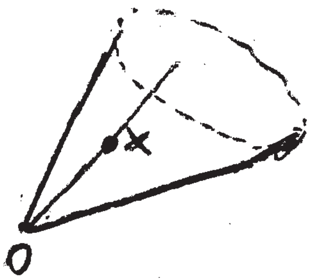
- <u>varietà affini</u>: ogni sottoinsieme $V \subseteq X$ tale che
$$\alpha x + (1-\alpha) x' \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, x' \in V.$$

(in $\mathbb{R}^n$ sono singoli punti, rette, piani, iperpiani k-dimensionali, $2 \leq k \leq n-1$)

- <u>semispazi</u>: $K = \{x \in X :\ \varphi x \leq a\}$ (chiuso)
$\quad = \{x \in X :\ \varphi x < a\}$ (aperto)

ove $\varphi : X \to \mathbb{R}$ è lineare e $a \in \mathbb{R}$.

- <u>coni</u>: un cono è un insieme $K \subseteq X$ tale che
$$\alpha x \in K \quad \forall \alpha > 0,\ \forall x \in K.$$



I coni non sono necessariamente convessi!

Ad esempio, dati $x_1 \cdots x_p \in \mathbb{R}^n$, il cono
$$K = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \langle x, x_i \rangle = 0,\ i = 1 \ldots m,\ \langle x, x_i \rangle \geq 0\ \ i = m+1, \ldots p\}$$
è convesso

- le <u>palle</u> di X: $B(x_0, r) = \{x \in X :\ \|x - x_0\| \leq r\}$ (chiusa)
$\mathring{B}(x_0, r) = \{x \in X :\ \|x - x_0\| < r\}$ (aperta).

<u>Operazioni (su insiemi) che preservano la convessità</u>

- $\cap$: K, K' convessi $\Rightarrow$ $K \cap K'$ convesso (dalla definizione)
- $\times$: K, K' convessi $\Rightarrow$ $K \times K'$ convesso in $X \times X$ (dalla definizione)
- affinità: K convesso in X, $A : X \to Y$ appl. affine $\Rightarrow$ $A(K)$ convesso in Y.

(A affine $\Leftrightarrow$ $A((1-\alpha)x + \alpha x') = (1-\alpha) A(x) + \alpha A(x')$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x, x' \in X$)

In particolare se $K, H \subseteq X$ sono convessi e $\lambda \in \mathbb{R}$, sono convessi

$$\lambda K = \{\lambda x : x \in K\}, \quad H+K = \{x+y : x \in H,\ y \in K\}.$$

• <u>sezioni</u>: se $K \subseteq X \times Y$ è convesso, per $x \in X$ e $y \in Y$ le <u>sezioni</u>

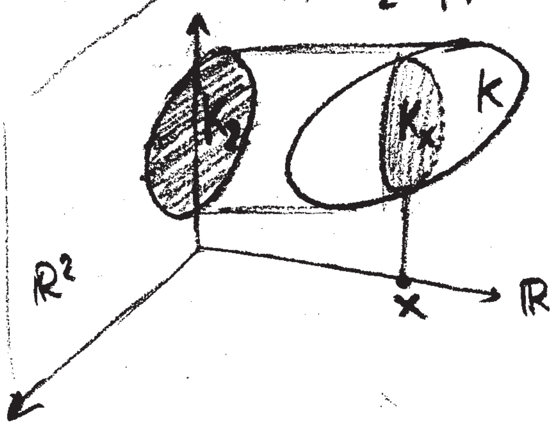
$$K_x = \{y \in Y : (x,y) \in K\}, \quad K^y = \{x \in X : (x,y) \in K\}$$

sono convesse.

• <u>proiezioni</u>: se $K \subseteq X \times Y$ è convesso, per $x \in X$ e $y \in Y$ le <u>proiezioni</u>

$$K_1 = \{x \in X : \exists\, y \in Y : (x,y) \in K\}, \quad K_2 = \{y \in Y : \exists\, x \in X : (x,y) \in K\}$$

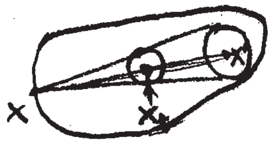
sono convesse.



• <u>chiusura</u>: se K è convesso, allora $\overline{K}$ è convesso.

• <u>parte interna</u>: se K è convesso, allora $\mathring{K}$ è convesso (forse vuoto).

<u>Oss.</u>: se $x \in \overline{K}$ e $x' \in \mathring{K}$, allora $]x, x'[= \{(1-t)x + tx',\ t \in]0,1[\} \subseteq \mathring{K}$.
Infatti esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x', \varepsilon) \subseteq \mathring{K}$. Allora se $t \in]0,1[$ il punto $x_t = (1-t)x + tx'$ sta in $\mathring{K}$ perché $B(x_t, t\varepsilon) \subseteq \mathring{K}$ [dato che per $\xi \in B(x_t, t\varepsilon)$ posto $v = \frac{\xi - (1-t)x}{t}$, si ha $(1-t)x + tv = \xi$ e $\|v - x'\| = \frac{1}{t}\|\xi - x_t\| < \varepsilon$].



<u>Inviluppi</u>: l'<u>inviluppo lineare</u> (di un insieme K) è il minimo sottosp. vettoriale $\supseteq K$;
l'<u>inviluppo affine</u> ($\mathrm{aff}(K)$) è la minima varietà affine $\supseteq K$;
l'<u>inviluppo convesso</u> ($\mathrm{co}(K)$) è il minimo convesso $\supseteq K$.

<u>Oss.</u> $K \subseteq X$ convesso $\iff$ ogni <u>combinazione convessa</u> di el. di K [cioè del tipo $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$, con $x_i \in K$, $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$] sta in K.

$(\Leftarrow)$ se ogni comb. convessa di el. di K sta in K, considero quelle con 2 elementi, e verifico che K è convesso.

$(\Rightarrow)$ Sia K convesso, siano $x_1 \dots x_m \in K$, siano $\alpha_1 \dots \alpha_m \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.
Uno almeno degli α_i è positivo: supp. $\alpha_1 > 0$.

$$\Rightarrow y_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} x_2 \in K.$$

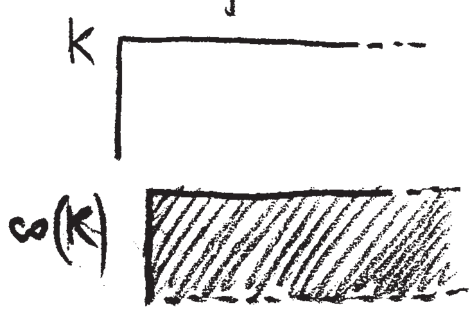
$$\Rightarrow y_3 = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} y_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} x_3 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} \alpha_i} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i x_i \in K,$$

....

$$\Rightarrow y_m = \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_{m-1}}{\alpha_1+\dots+\alpha_m} y_{m-1} + \frac{\alpha_m}{\alpha_1+\dots+\alpha_m} x_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in K. \square$$

<u>Oss.</u> $K \subseteq X \Rightarrow co(K) = \{$comb. convesse di elementi di $K\}$.

<u>Oss.</u> K chiuso $\not\Rightarrow co(K)$ chiuso!

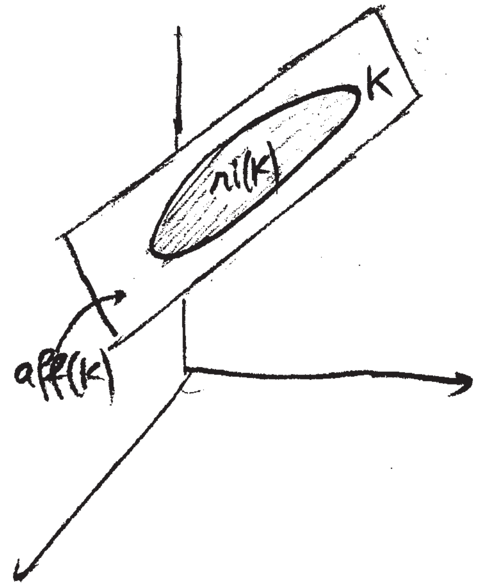


Però: K limitato in $\mathbb{R}^n \Rightarrow co(K)$ limitato
K compatto in $\mathbb{R}^n \Rightarrow co(K)$ compatto.

<u>Interno relativo di un convesso K</u>: è la parte interna di K, rispetto alla topologia di aff(K). Perciò

$$x \in ri(K) \ [\text{relative interior}] \iff \exists \delta > 0 \text{ t. che } aff(K) \cap B(x,\delta) \subseteq K.$$

Ciò è significativo in dim. finita: in $\mathbb{R}^3$, ad es. $ri(K)$ è l'interno dell'ellisse piana K contenuta nel piano aff(K).



In dim. infinita può succedere che il convesso sia <u>denso</u> e privo di parte interna: es. $X = L^2(\mathbb{R}^n)$; $K = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è uno sp. vett. (quindi convesso), denso in X, con $\mathring{K} = \phi$ perché $B(\varphi,\varepsilon)$ contiene ad es. $\varphi + \frac{\varepsilon}{2} g \notin K$ se $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ e $g \notin C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: qui, $aff(C_0^\infty(\mathbb{R}^n)) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = ri(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$.

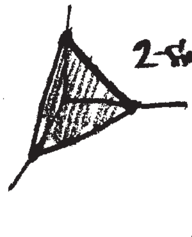
~~Ad es. se $K \subset \mathbb{R}^3$ è un poliedro, ri(K) è l'interno delle facce (tranne spigoli).~~

<u>Dimensione</u> di un convesso K è la dim. di aff(K).

<u>Esempi</u>. $K = \{x\} \Rightarrow aff(K) = \{x\}$, $dim(K) = 0$, $ri(K) = \{x\}$.

$K = [x, x'] \Rightarrow aff(K) =$ retta per x e x', $dim(K) = 1$, $ri(K) =]x, x'[$

$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ ((n-1)-simplesso standard) $\Rightarrow$



$\Rightarrow aff(K) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e \rangle = 1\}$ ove $e = (1, \dots, 1)$, $dim(K) = n-1$

$ri(K) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

$K = B(x_0, \delta) \Rightarrow aff(K) = X$, $dim(K) = dim(X)$, $ri(K) = \mathring{B}(x_0,\delta) =$
$= \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$.

<u>Oss.</u> $K \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso $\neq \phi \Rightarrow ri(K) \neq \phi$ e $dim\, K = dim\, ri(K)$.

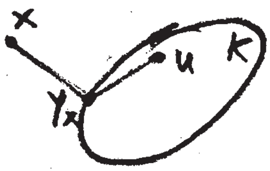
Inoltre, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $x \in \overline{K}$, $x' \in ri(K) \Rightarrow \,]x, x'] \subseteq ri(K)$.
(in dim. ∞ questi due fatti non valgono: $ri(K)$ può essere $\emptyset$).

Proiezione su convessi chiusi

X sp. di Hilbert, $K \subseteq X$ convesso chiuso non vuoto.

Teo. $\forall x \in X \ \exists \min\limits_{u \in K} \|x-u\|^2$; il punto di minimo $y_x \in K$ è unico.
Inoltre $y = y_x$ se e solo se $y \in K$ e risolve la disequazione variazionale

$$\langle x - y, u - y \rangle \leq 0 \quad \forall u \in K.$$



dim. Sia $y_x \in K$ t.che $\|x - y_x\|^2 \leq \|x-u\|^2 \ \forall u \in K$.
Allora

$$\|x - y_x\|^2 \leq \|x - ((1-\alpha) y_x + \alpha u)\|^2 = \|x - y_x - \alpha (u - y_x)\|^2 \quad \forall u \in K,$$

e sviluppando i quadrati

$$0 \leq \alpha^2 \|u - y_x\|^2 - 2\alpha \langle x - y_x, u - y_x \rangle ;$$

dividendo per α e mandando poi $\alpha \to 0$, viene la tesi.
Viceversa, se $y_x \in K$ e risolve la disequazione variazionale, allora $\forall u \in K$

$$\begin{aligned} 0 \geq \langle x - y_x, u - y_x \rangle &= \langle x - y_x, u - x + x - y_x \rangle = \\ &= \|x - y_x\|^2 + \langle x - y_x, u - x \rangle \geq \\ &\geq \|x - y_x\|^2 - \|x - y_x\| \, \|u - x\|. \end{aligned}$$

Se $x = y_x$, la tesi è certamente vera, se no divido per $\|x - y_x\|$ e trovo
$\|x - y_x\| \leq \|x - u\| \ \forall u \in K$.

Il punto di minimo è unico perché se ce n'è 2 distinti, u_1 e u_2, si ha

$$\min \leq \left\|x - \frac{u_1 + u_2}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{1}{2}(x - u_1) + \frac{1}{2}(x - u_2)\right\|^2 < \frac{1}{2}\|x - u_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x - u_2\|^2 = \min,$$

quindi in $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ il valore è $< \min$, assurdo. Qui si usa la stretta convessità di $x \mapsto \|x\|^2$.

<u>Oss.</u> Si suole scrivere $y_x = P_K(x)$; $P_K : H \to H$ è la <u>proiezione</u> sul convesso K.
Se K è un sottospazio, chiuso, P_K è la proiezione ortogonale su K.
Si ha $P_K(x) = x \iff x \in K$. Inoltre

$$\|P_K(x) - P_K(x')\| \le \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in X$$

[infatti $\langle x - P_K(x), P_K(x') - P_K(x) \rangle \le 0$, $\langle x' - P_K(x'), P_K(x) - P_K(x') \rangle \le 0$,
e sommando

$$\langle x - x' - P_K(x) + P_K(x'), P_K(x') - P_K(x) \rangle \le 0,$$

ovvero

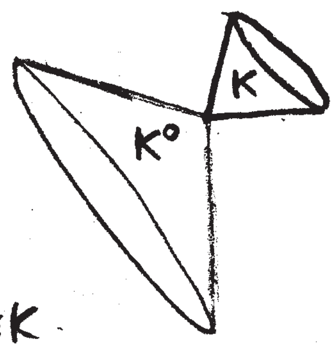
$$\|P_K(x') - P_K(x)\|^2 \le \langle x' - x, P_K(x') - P_K(x) \rangle \le \|x' - x\| \, \|P_K(x') - P_K(x)\| \Big]$$

<u>Polarità tra coni convessi</u>

Sia X uno spazio di Hilbert. Se $K \subseteq X$ è un cono, il <u>cono polare</u> K è

$$K^0 = \{ y \in H : \langle y, x \rangle \le 0 \ \forall x \in K \}$$

(è un cono convesso e chiuso). Se K è un sottospazio, allora $K^0 = K^\perp$, [perché vale $\langle y, \pm x \rangle \le 0 \ \forall x \in K$]. Se $\mathcal{K}$ è la famiglia dei coni convessi chiusi $\subseteq X$, allora $K, K' \in \mathcal{K}$ e $K \subseteq K'$ implica $K^0 \supseteq (K')^0$ e $K \cap K^0 \subseteq \{0\}$; inoltre $K \subseteq (K^0)^0$.



<u>Prop.</u> Se $K \in \mathcal{K}$, si ha $y = P_K(x)$ se e solo se

(*) $x - y \in K^0$, $y \in K$, $\langle x - y, y \rangle = 0$.

<u>dim</u> $y = P_K(x) \iff \langle x - y, u - y \rangle \le 0 \ \forall u \in K$ e $y \in K$.
Scelgo $u = \alpha y$, $\alpha > 0$: è $u \in K$ e $\langle x - y, (\alpha - 1) y \rangle \le 0 \ \forall \alpha > 0$, quindi $\langle x - y, y \rangle = 0$ e allora $\langle x - y, u \rangle \le \langle x - y, y \rangle = 0 \ \forall u \in K$, cioè $x - y \in K^0$.
Viceversa: $\forall u \in K$ vale, usando (*).

$$\frac{1}{2}\|x-u\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y+y-u\|^2 \geq \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + \langle x-y, y-u\rangle = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - \langle x-y, u\rangle \geq \frac{1}{2}\|x-y\|^2$$

quindi $y = P_K(x)$. $\square$

Oss. Se $K \subseteq X$ è cono convesso chiuso, allora da ⊛ segue $P_K(x) = 0 \Leftrightarrow x \in K^0$, $P_K(\alpha x) = \alpha P_K(x)$ $\forall \alpha \geq 0$, $P_K(-x) = -P_{-K}(x)$.

Teo. (Moreau) Sia X spazio di Hilbert, $K \subseteq X$ cono convesso chiuso. Se $x, x_1, x_2 \in X$ si ha

$$x = x_1 + x_2 \text{ con } x_1 \in K,\ x_2 \in K^0 \text{ e } \langle x_1, x_2\rangle = 0 \iff x_1 = P_K(x) \text{ e } x_2 = P_{K^0}(x).$$

dim. Anzitutto, vale $P_K(x) + P_{K^0}(x) = x$ $\forall x \in X$. Infatti, sia $x_1 = x - P_K(x)$ e verifichiamo ⊛ per K^0:

(i) $x - x_1 = P_K(x) \in K \subseteq (K^0)^0$; (ii) $x_1 = x - P_K(x) \in K_0$, infatti $\langle x - P_K(x), y - P_K(x)\rangle \leq 0$ $\forall y \in K$, e posso scegliere $y = u + P_K(x)$, $u \in K$, da cui

$$\langle x - P_K(x), u\rangle \leq 0 \quad \forall u \in K;$$

(iii) $\langle x - x_1, x_1\rangle = \langle P_K(x), x - P_K(x)\rangle = 0$, infatti è la (iii) di ⊛ per K.

Quindi, $x_1 = P_{K^0}(x)$ che è quanto si voleva.

Ciò premesso:

$\Leftarrow$) segue da $P_K(x) + P_{K^0}(x) = x$ e da $\langle x - P_K(x), P_K(x)\rangle = 0$.

$\Rightarrow$) vale ⊛ con $y = x_1$, quindi $x_1 = P_K(x)$ e $x_2 = x - x_1 = P_{K^0}(x)$. $\square$

Notare le analogie tra ortogonalità e polarità!

Separazione di insiemi convessi: dati due convessi disgiunti, c'è un iperpiano affine che li separa.

Teo. (Hahn-Banach). Sia X spazio di Hilbert, $K \subseteq X$ convesso chiuso non vuoto, $x \notin K$. Allora $\exists\, z \in X \setminus \{0\}$ tale che $\langle z, x\rangle > \sup_{y \in K} \langle z, y\rangle$.

<u>dim</u>. Scelgo $z = x - P_K(x) \neq \phi$. Dato che

$$\langle x - P_K(x), y - P_K(x) \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K,$$

si ha

$$0 \geq \langle z, y - x + z \rangle = \langle z, y \rangle - \langle z, x \rangle + \|z\|^2$$

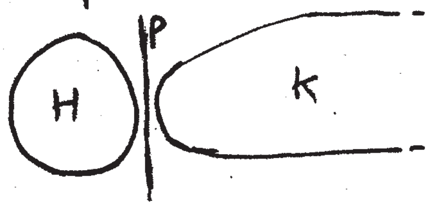
cioè

$$\langle z, x \rangle - \|z\|^2 \geq \langle z, y \rangle \quad \forall y \in K. \ \square$$

<u>Cor.</u> (<u>separazione stretta</u>). X Hilbert, K, H convessi chiusi non vuoti disgiunti con H compatto. Allora $\exists\, z \in X$ tale che

$$\sup_{y \in K} \langle z, y \rangle < \min_{u \in H} \langle z, u \rangle. \quad [\text{scelto } \lambda \text{ intermedio, } P = \{y \in X : \langle z, y \rangle = \lambda\} \text{ separa } H \text{ e } K]$$

<u>dim</u>. $K - H$ è convesso e chiuso, perchè H compatto, e $0 \notin K - H$. Per il teo. di Hahn-Banach $\exists\, z \in X$ tale che

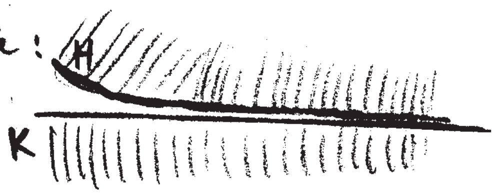


$$\sup_{y \in K - H} \langle z, y \rangle < \langle z, 0 \rangle = 0,$$

Ovvero

$$0 > \sup_{u \in K} \langle z, u \rangle + \sup_{v \in H} \langle z, -v \rangle = \sup_{u \in K} \langle z, u \rangle - \min_{v \in H} \langle z, v \rangle. \ \square$$

<u>Oss.</u> se H, K sono chiusi, il corollario non vale!



Però si può dire che $\exists\, z \in X \setminus \{0\}$ tale che

$$\sup_{y \in K} \langle z, y \rangle \leq \inf_{u \in H} \langle z, u \rangle.$$

<u>Conseguenze</u>:

- <u>Iperpiani di supporto</u>: se $K \subset X$ è convesso $\neq \phi$, un iperpiano affine $H = \{x \in X : \langle z, x \rangle = r\}$ è di supporto a K in $x_0 \in \partial K$ se

$$\langle z, x \rangle \leq r \quad \forall x \in K, \qquad \langle z, x_0 \rangle = r.$$

<u>Prop.</u> Se $K \subset X$ è convesso non vuoto, allora $\forall x \in \partial K$ esiste un iperpiano di supporto a K in x. $\square$

<u>Cor.</u> Se $K \subset X$ è un convesso chiuso non vuoto, allora K è l'intersezione di tutti i semispazi chiusi che lo contengono.

Infatti, detta H tale intersezione, è $K \subseteq H$; se $\exists\, x_0 \in H \setminus K$, potrei separare strettamente $\{x_0\}$ da K con un $z \in X$:

$$\langle z, x_0 \rangle > \lambda > \sup_{y \in K} \langle z, y \rangle .$$

L'iperpiano

$$P = \{x \in X : \langle z, x \rangle \leq \lambda\}$$

contiene K, ma non x_0, contro l'ipotesi $x_0 \in H \subseteq P$. □

- <u>Bipolare di un cono convesso</u>: se K è un cono convesso in uno spazio di Hilbert X, allora $(K^0)^0 = \overline{K}$.

Infatti $K \subset (K^0)^0$ che è chiuso, quindi $\overline{K} \subseteq (K^0)^0$; d'altronde, se $x_0 \in (K^0)^0 \setminus \overline{K}$, potrei separarlo da $\overline{K}$: $\exists\, z \in X$ tale che

$$\langle z, x_0 \rangle > \lambda = \sup_{y \in \overline{K}} \langle z, y \rangle ;$$

siccome $0 \in \overline{K}$, è $\lambda \geq 0$, e scrivendo $y = tx$, $x \in \overline{K}$, per $t \to \infty$ trovo che $\lambda = 0$. Allora $z \in K^0$ (perché $\langle z, y \rangle \leq 0\ \forall y \in K$) e quindi, essendo $x_0 \in (K^0)^0$, dovrebbe essere $\langle x_0, z \rangle \leq 0$: assurdo. □

<u>Cor.</u> Se $K \subseteq X$ è cono convesso chiuso, allora

$$x \in K \iff \langle z, x \rangle \leq 0 \quad \forall z \in K^0 .$$