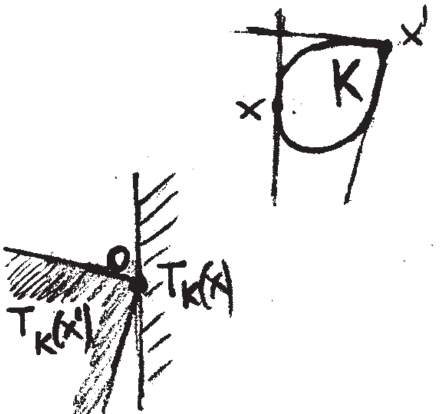
<u>Cono tangente a un convesso</u>: in uno spazio di Hilbert X, sia $K \subseteq X$ un convesso non vuoto. Il cono tangente $T_K(x)$ a K in un punto $x \in K$ è

$$T_K(x) = \overline{\{ z \in X : \ z = \alpha(y-x), \text{ con } y \in K, \alpha \geq 0 \}}.$$

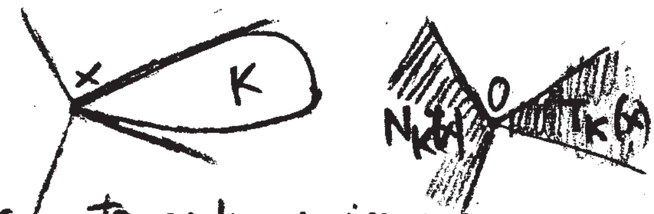
Si tratta dunque di un convesso chiuso. Se x è interno a K, scelti $y = x \pm \varepsilon u$, con $\|u\| = 1$, si trova $T_K(x) = X$. La definizione ha interesse per $x \in \partial K$.



<u>Cono normale a un convesso</u>: il cono $N_K(x)$,

$$N_K(x) = \{ z \in X : \ \langle z, y-x \rangle \leq 0 \ \ \forall y \in K \}$$

è il cono normale a K nel punto $x \in K$.



<u>Prop</u>. Il cono normale è il polare del cono tangente, e viceversa.

<u>dim</u>. Se $z \in X$, la relazione $\langle z, y-x \rangle \leq 0 \ \forall y \in K$ equivale a $\langle z, d \rangle \leq 0$ $\forall d \in T_K(x)$: pertanto $N_K(x) = [T_K(x)]^\circ$.

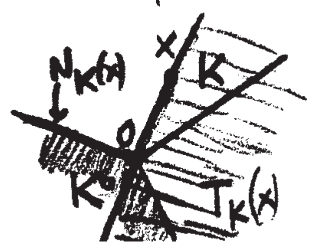
Poiché $T_K(x)$ è un cono convesso chiuso, si deduce

$$[N_K(x)]^\circ = [[T_K(x)]^\circ]^\circ = T_K(x). \ \square$$

<u>Esempio</u>: se K è un cono convesso chiuso, allora $T_K(0) = K$ e $N_K(0) = K^\circ$. Se $x \neq 0$, $x \in K$, si ha $T_K(x) \supseteq \{ \lambda x : \lambda \in \mathbb{R} \} =: M$

quindi $N_K(x) \subseteq \{ z \in X : \ \langle z, x \rangle = 0 \} = M^\perp$;

in effetti $N_K(x) = M^\perp \cap K^\circ$ (facile verifica).



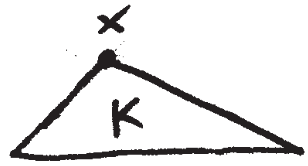
Esempio. In $\mathbb{R}^n$, sia $K=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle z_j, x\rangle \le r_j,\ j=1\dots m\}$ [poliedro convesso chiuso]

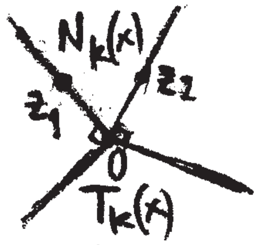
e sia $J(x)=\{j\in\{1,\dots,m\} : \langle z_j,x\rangle = r_j\}$ (vincoli attivi in $x\in K$).

Allora

$$T_K(x)=\{d\in\mathbb{R}^n : \langle z_j,d\rangle \le 0 \quad \forall j\in J(x)\}$$

$$N_K(x)=\Big\{\sum_{j\in J(x)} \alpha_j z_j : \alpha_j\ge 0\Big\}$$





Topologia debole

Se lo spazio X ha dimensione *infinita*, gli insiemi *limitati e chiusi* non sono in generale compatti. Ad esempio, i vettori $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di un sistema ortonormale completo di uno spazio di Hilbert, formano una successione limitata ($\|e_n\|=1$) di punti isolati in X (perché le palle $B(e_n,\delta)$ sono disgiunte se $\delta<\frac{\sqrt{2}}{2}$, essendo $\|e_n-e_m\|=\sqrt{2}$ per $m\neq n$); perciò $E=\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un chiuso limitato di X, che non ha alcuna sottosuccessione convergente in X.

Allora è utile introdurre su X una topologia *più debole* di quella indotta dalla norma, che abbia migliori proprietà di compattezza.

Sia allora X uno spazio di Banach e sia X^* il suo *duale*, ossia l'insieme dei funzionali lineari e continui da X in $\mathbb{R}$ (che è a sua volta uno spazio di Banach con $\|\varphi\|_{X^*}=\sup_{\|x\|_X=1}|\varphi x| \quad \forall\varphi\in X^*$).

La <u>topologia debole</u> su X è quella individuata dalla seguente famiglia di intorni di $x \in X$:

$$U_x(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varepsilon) = \{ z \in X : \; |\varphi_i z - \varphi_i x| < \varepsilon, \; i = 1 \dots m \},$$

al variare di $m \in \mathbb{N}^+$, $\varphi_1 \cdots \varphi_m \in X^*$, $\varepsilon > 0$.

Affinché due punti x, x' siano "vicini" in questa topologia, basta che ci sia un funzionale $\varphi \in X^*$ tale che $|\varphi x - \varphi x'| < \varepsilon$ [perché $x' \in U_x(\varphi, \varepsilon)$].

La topologia debole è <u>meno fine</u> di quella indotta dalla norma, ossia ha "meno aperti": infatti se A è aperto rispetto alla topologia debole, allora $\forall x \in A \; \exists \, U_x(\varphi_1 \dots \varphi_m, \varepsilon) \subseteq A$. Sia $M = \max_{1 \le i \le m} \|\varphi_i\|_{X^*}$; se $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$ si ha $B(x, \delta) \subseteq U_x(\varphi_1 \cdots \varphi_m, \varepsilon)$, perché

$$|\varphi_i x' - \varphi_i x| \le \|\varphi_i\|_{X^*} \|x' - x\|_X \le M\delta < \varepsilon, \quad i = 1 \dots m.$$

Quindi A è aperto nella topologia indotta dalla norma, la quale dunque è "più ricca" di aperti, ossia più fine.

<u>Oss.</u> Se X è uno spazio di Hilbert, allora ogni funzionale $\varphi \in X^*$ è del tipo $\varphi x = \langle z, x \rangle$, con $z \in X$ (e la mappa $\varphi \mapsto z$ è una <u>isometria lineare</u> $[\|\varphi\|_{X^*} = \|z\|_X]$). Quindi la topologia debole di X è determinata dagli intorni

$$U_x(z_1 \cdots z_m, \varepsilon) = \{ u \in X : |\langle z_i, u - x \rangle| < \varepsilon, \; i = 1 \dots m \}.$$

Proprietà della topologia debole:

<u>Teo. (Eberlein-Smulyan)</u> Se X è uno spazio di Hilbert, allora gli insiemi <u>limitati e chiusi</u> sono <u>w-compatti</u> (cioè compatti rispetto alla topologia debole, o <u>debolmente compatti</u>). □

Oss. La stessa cosa vale quando X è uno spazio di Banach riflessivo: ciò significa che l'applicazione $J: X \to (X^*)^*$, definita da $x \longmapsto J_x$, ove $J_x \in (X^*)^*$ è dato da

$$J_x(\varphi) = \varphi x \quad \forall \varphi \in X^*,$$

è surgettiva. Si noti che risulta $\|J_x\|_{(X^*)^*} = \|x\|_X \ \forall x \in X$, quindi J è una immersione fra X e X^{**}; se X è riflessivo tale immersione è un isomorfismo.

Esempi Sono riflessivi gli spazi $L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto; il duale è $L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Non è riflessivo $L^1(\Omega)$, il cui duale è $L^\infty(\Omega)$, e nemmeno $C^0(\bar\Omega)$, Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Sono riflessivi gli spazi di Sobolev $H^{k,p}(\Omega)$ $(k \in \mathbb{N},\ 1<p<\infty)$.

Oss. Il teorema di Hahn-Banach, qui enunciato solo nel caso di spazi di Hilbert (perchè in quel caso la dimostrazione è elementare), vale in ogni spazio di Banach; quindi se X è uno spazio di Banach e $K \subseteq X$ è un convesso non vuoto e chiuso, allora K è l'intersezione dei semispazi chiusi che lo contengono.

Teo. Se X è uno spazio di Banach e $K \subseteq X$ è un convesso, allora K è chiuso se e solo se K è w-chiuso.

dim. Se K è w-chiuso, allora $X \setminus K$ è w-aperto, quindi aperto (nella topologia indotta dalla norma); perciò K è chiuso [qui non si usa il fatto che K è convesso].

Se K è chiuso, allora K è l'intersezione dei semispazi chiusi che la contengono. Ma ciascuno di tali semispazi è della forma

$$E = \{x \in X : \varphi x \leq r\} \quad , \ \varphi \in X^*,$$

cioè $E = \varphi^{-1}([r, +\infty[)$. D'altronde, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ è w-continua: se $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$, si ha

$$x' \in U_x(\varphi, \varepsilon) \implies |\varphi x' - \varphi x| < \varepsilon.$$

Quindi $\varphi^{-1}([r, \infty[)$, controimmagine di un chiuso di $\mathbb{R}$, è w-chiuso in X. Dunque K, intersezione di w-chiusi, è w-chiuso. □

Funzioni convesse

Sia X uno spazio di Banach. Abbiamo già definito le funzioni convesse: $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa se $f((1-t)x + tx') \leq (1-t) f(x) + t f(x')$ $\forall t \in]0,1[$, $\forall x, x' \in X$. Perchè ammettere il valore $+\infty$?

(a) Perchè se $f : K \to \mathbb{R}$ è convessa, ove $K \subset X$ è un convesso, l'estensione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in K \\ +\infty & x \in X \setminus K \end{cases}$$

è convessa su X. Quindi possiamo limitarci a considerare funzioni convesse definite su X;

(b) Perchè se $K \subseteq X$ è un convesso, la funzione <u>indicatrice</u> di K,

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ +\infty & x \in X \setminus K \end{cases}$$

è convessa su X. Quindi tramite le funzioni convesse possiamo studiare gli insiemi convessi e viceversa.

<u>Def</u> Il <u>dominio</u> di f è $D(f) = \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\}$. Se f è convessa, $D(f)$ è convesso. Se $D(f) \neq \emptyset$ la f si dice <u>propria</u> (le uniche interessanti).

Se f è convessa, gli <u>insiemi di sottolivello</u>

$$\{x\in X:\ f(x)\le\lambda\},\quad \lambda\in\mathbb{R},$$

sono convessi; il viceversa è falso, es. $f(x)=x^3$ in $\mathbb{R}$. Se gli insiemi di sottolivello sono tutti convessi, f si dice "quasi-convessa".

<u>Def</u>. L'<u>epigrafico</u> di f è l'insieme

$$\mathrm{epi}(f)=\{(x,t)\in X\times\mathbb{R}:\ f(x)\le t\}.$$

<u>Prop</u>. $f: X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ è convessa se e solo se $\mathrm{epi}(f)$ è convesso in $X\times\mathbb{R}$.

<u>dim</u>. applicando le definizioni. □

<u>Prop</u>. f è convessa se e solo se, per ogni $x\in D(f)$ e $v\in X\setminus\{0\}$, il rapporto incrementale $\dfrac{f(x+tv)-f(x)}{t}$ è crescente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

<u>dim</u> $(\Rightarrow)$ Se $0<s<t$, si ha

$$x+sv=\frac{t-s}{t}x+\frac{s}{t}(x+tv),\quad \text{da cui}\quad f(x+sv)\le\frac{t-s}{t}f(x)+\frac{s}{t}f(x+tv)$$

e quindi $f(x+sv)-f(x)\le\dfrac{s}{t}\left[f(x+tv)-f(x)\right]$, da cui la tesi dividendo per s;

se $s<t<0$, si ha

$$x+tv=\frac{s-t}{s}x+\frac{t}{s}(x+sv),\quad \text{da cui, come sopra,}$$

$$f(x+tv)-f(x)\le\frac{t}{s}f(x+sv)-f(x),\quad \text{da cui la tesi dividendo per } t<0;$$

se $s<0<t$, si ha

$$x=\frac{-t}{s-t}(x+sv)+\frac{s}{s-t}(x+tv),\quad \text{da cui}\quad f(x)\le\frac{-t}{s-t}f(x+sv)+\frac{s}{s-t}f(x+tv)$$

e quindi, essendo $s<0$,

$$\frac{f(x+sv)-f(x)}{s}\le\frac{1}{s}\left[f(x+sv)+\frac{t}{s-t}f(x+sv)-\frac{s}{s-t}f(x+tv)\right]=$$

$$=\frac{s}{s-t}\left[f(x+sv)-f(x)\right]-\frac{t}{s-t}\left[f(x+tv)-f(x)\right],$$

da cui $\dfrac{t}{t-s}\,\dfrac{f(x+sv)-f(x)}{s}\le\dfrac{t}{t-s}\,\dfrac{f(x+tv)-f(x)}{t}$ e la tesi.

($\Leftarrow$) Se $x, x' \in D(f)$ e $t \in]0,1[$, sia $x_t = (1-t)x + tx' = x + t(x'-x)$.

Allora
$$\frac{f(x_t) - f(x)}{t} \leq \frac{f(x') - f(x)}{1},$$
da cui
$$f(x_t) \leq (1-t) f(x) + t f(x'). \quad \square$$

Questa proprietà è importante ma non garantisce la continuità.

<u>Oss.</u> (disuguaglianza di Jensen) $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa se e solo se $\forall m \in \mathbb{N}^+$, $\forall x_1 \dots x_m \in X$ e $\forall \alpha_1 \dots \alpha_m \in]0,1[$ con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ vale
$$f\Big(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i).$$
Infatti, se vale la disuguaglianza, con $m=2$ si ha la convessità. Se f è convessa, e $f(x_i) = +\infty$ per qualche i, non c'è nulla da provare; altrimenti, $(x_i, f(x_i)) \in \mathrm{epi}(f)$ che è convesso, quindi $\sum_{i=1}^m \alpha_i (x_i, f(x_i)) \in \mathrm{epi}(f)$, ossia vale la disuguaglianza.

<u>Prop.</u> Sia X uno spazio di Banach, sia $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Allora $\mathrm{epi}(f)$ è chiuso se e solo se f è semicontinua inferiormente (sci), cioè
$$f(x) \leq \min\lim_{n\to\infty} f(x_n) \qquad \forall \{x_n\} \subseteq X, \text{ con } x_n \to x.$$

<u>dim</u> ($\Leftarrow$) Se $\{(x_n, t_n)\} \subseteq \mathrm{epi}(f)$ e $(x_n, t_n) \to (x, t)$, allora $x_n \to x$ e pertanto $f(x) \leq \min\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} t_n = t$.

($\Rightarrow$) Sia $x_n \to x$. Se $t = \min\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, non c'è nulla da provare. Altrimenti, $(x_n, f(x_n)) \in \mathrm{epi}\, f$ ed esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \to (x, t)$. Quindi $(x, t) \in \mathrm{epi}(f)$, cioè $f(x) \leq t$. $\square$

<u>Morale:</u> f è convessa e sci $\iff$ $\mathrm{epi}(f)$ è convesso chiuso in $X \times \mathbb{R}$.

<u>Esempi</u>: sono funzioni convesse le seguenti:

1) I funzionali <u>lineari</u> su X

2) le funzioni affini $X \to \mathbb{R}$,

3) Le funzioni <u>sublineari</u>, cioè le $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, non $\equiv +\infty$, tali che

$$f(\alpha x + \beta x') \leq \alpha f(x) + \beta f(x') \quad \forall \alpha, \beta \geq 0, \ \forall x, x' \in X,$$

(o, equivalentemente, le f convesse, proprie e positivamente omogenee).

<u>Oss.</u> f è sublineare $\iff$ epi(f) è un cono convesso $\neq \emptyset$.

Tra le funzioni sublineari ci sono:

- le indicatrici di coni convessi non vuoti;
- la distanza da un cono convesso non vuoto, $d_K(x) = \inf\{\|x-y\| : y \in K\}$
- tutte le norme e seminorme [una <u>seminorma</u> è una $p : X \to \mathbb{R}$ tale che $p(\lambda x) = |\lambda| \, \|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $p(x+x') \leq p(x) + p(x')$; in particolare $p(0) = 0$ ma può esistere qualche $x \neq 0$ tale che $p(x) = 0$). Ad es. in $\mathbb{R}^n$ $x \longmapsto \langle Qx, x \rangle$, con Q matrice $n \times n$ simmetrica e semidefinita positiva, è una seminorma];
- le <u>funzioni di supporto</u> di sottoinsiemi E di uno spazio di Hilbert X:

$$\sigma_E(x) = \sup \{ \langle z, x \rangle : z \in E \}.$$

Da notare che $\sigma_E(x) < \infty \ \forall x \in X \iff E$ è limitato. Inoltre $\sigma_E = \sigma_{\overline{co(E)}}$ (ovvio) e $z \in \overline{co(E)} \iff \langle z, x \rangle \leq \sigma_E(x) \ \forall x \in X$ (infatti: ($\Rightarrow$) evidente, ($\Leftarrow$) se $z \notin \overline{co(E)}$ lo separo strettamente da $\overline{co(E)}$: $\exists u \in X$ tale che $\langle u, z \rangle > \sup\{\langle u, x \rangle : x \in \overline{co(E)}\} = \sigma_E(u)$, che contraddice l'ipotesi).

Dunque, possiamo limitarci a considerare funzioni di supporto relative a insiemi convessi chiusi.

C'è una <u>corrispondenza biunivoca</u> fra $\mathcal{C} = \{$convessi chiusi di $X\}$ e $\mathcal{S} = \{$funzioni di supporto$\}$. Infatti $E = F \in \mathcal{C} \Rightarrow \sigma_E = \sigma_F$ (ovvio);

$\sigma_E = \sigma_F \in \mathcal{S} \Rightarrow E = F$ (perché

$z \in E \Leftrightarrow \langle z, x\rangle \le \sigma_E(x) = \sigma_F(x) \ \forall x \in X \Leftrightarrow z \in F$).

<u>Esempi</u>: • $K \subseteq X$ cono convesso chiuso. Allora

$$\sigma_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \langle z, x\rangle \le 0 \ \forall z \in K \\ +\infty & \text{se } \exists z \in K : \langle z, x\rangle > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \sigma_K(x) = I_{K^o}(x).$$

e simmetricamente $\sigma_{K^o} = I_K$ essendo $(K^o)^o = K$.

• $H = \ker A$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare. Allora $\sigma_H = I_{H^\perp}$, ove

$$H^\perp = [\ker A]^\perp = R(A^*) = \{A^* v, \ v \in \mathbb{R}^m\}.$$

Se $H = \ker A = \operatorname{span}\{u_1 \dots u_k\}$, allora $H^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_j\rangle = 0, \ j = 1 \dots k\}$.

<u>Oss</u>. Le funzioni di supporto sono sci. perché estremo superiore di una famiglia di funzioni lineari e continue.

<u>Oss</u>. Se $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa sci., allora f è w-sci (semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole)

[Infatti f convessa sci $\Longrightarrow$ epi(f) convesso chiuso in $X \times \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ epi(f) convesso w-chiuso in $(X \times \mathbb{R}, w) = (X, w) \times \mathbb{R} \Rightarrow f$ w-sci.]

Ed ecco il fondamentale teorema di esistenza del minimo di funzioni convesse sci:

Teo. Sia X uno spazio di Hilbert, o uno spazio di Banach riflessivo. Sia $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa, propria, sci. Se $K \subseteq X$ è un insieme limitato, w-chiuso, con $K \cap D(f) \neq \emptyset$, allora f ha minimo finito su K. Se f è strettamente convessa, il punto di minimo è unico.

dim. Essendo $K \cap D(f) \neq \emptyset$, sarà necessariamente $\lambda = \inf_K f < \infty$; scelta $\{x_n\} \subseteq D(f) \cap K$ tale che $f(x_n) \to \lambda$, essendo K w-compatto per il teorema di Eberlein-Smulyan, esiste $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che x_{n_k} converge debolmente a un $x \in K$, cioè $\varphi x_{n_k} \to \varphi x$ $\forall \varphi \in X^*$. Dato che f è w-sci, otteniamo

$$\lambda \leq f(x) \leq \liminf_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lambda .$$

Se poi f è strettamente convessa, e x_1, x_2 sono punti di minimo in K, allora $\lambda \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda$, assurdo. □

Cor. Sia X uno spazio di Hilbert, o uno spazio di Banach riflessivo. Sia $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa, propria, sci, tale che

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty .$$

Se $K \subseteq X$ è un insieme non vuoto e w-chiuso, con $K \cap D(f) \neq \emptyset$, allora f ha minimo finito in K. Se f è strettamente convessa, il punto di minimo è unico.

dim. Si ha $\lambda = \inf_K f < \infty$. Se $M > \lambda$, sarà $f > M$ per $\|x\| > r$, con r opportuno; quindi $\inf_K f = \inf_{K \cap B(0,r)} f$, e siamo nel caso del teo. precedente. □

I punti di minimo esistono, nelle ipotesi viste, ma come caratterizzarli? Lo vedremo.

Continuità delle funzioni convesse

Lemma $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa. Se f è limitata superiormente in un intorno di $z_0 \in D(f)$, allora f è continua in z_0.

detto $x' = z_0 + \frac{1}{\varepsilon}(x - z_0)$,

dim. Sia $f \le K$ in $B(z_0, \delta)$. Sia $\varepsilon > 0$. Se $x \in B(z_0, \varepsilon\delta)$, si ha

$$f(x) = f\big((1-\varepsilon) z_0 + \varepsilon x'\big) \le (1-\varepsilon) f(z_0) + \varepsilon f(x') \le (1-\varepsilon) f(z_0) + \varepsilon K,$$

da cui $\quad f(x) - f(z_0) \le \varepsilon\big[|f(z_0)| + K\big] \quad \forall x \in B(x_0, \varepsilon\delta).$

Poi,

$$f(z_0) \le \tfrac{1}{2} f(x) + \tfrac{1}{2} f(2z_0 - x),$$

e quindi

$$f(z_0) - f(x) \le f(2z_0 - x) - f(z_0) \le \varepsilon\big(|f(z_0)| + K\big).$$

Perciò

$$|f(x) - f(z_0)| \le \varepsilon\big[|f(z_0)| + K\big] \quad \forall x \in B(x_0, \varepsilon\delta) \quad \square$$

Teo. Se $f: X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ è convessa e propria, sono fatti equivalenti:

(i) $\mathring{D}(f) \neq \emptyset$ e f è continua in $\mathring{D}(f)$;

(ii) $\exists\, z_0 \in \mathring{D}(f)$ tale che f è continua in z_0;

(iii) $\exists\, z_0 \in D(f)$ tale che f è limitata superiormente in un intorno di z_0.

dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) ovvio.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): scelto $\varepsilon = 1$, in un intorno B di z_0 vale $f(y) \le f(z_0) + 1$, quindi in tale intorno f è limitata superiormente.

(iii) $\Rightarrow$ (i): sia $f \le K$ in $B(z_0, \delta)$; allora $z_0 \in \mathring{D}(f)$ e quindi $\mathring{D}(f) \neq \emptyset$.
Sia $z \in \mathring{D}(f)$, e sia $t > 0$ tale che $z' = z + t(z - z_0) \in D(f)$. Se $u \in B\big(z, \frac{t}{t+1}\delta\big)$, si ha, essendo $z = \frac{1}{t+1}(z' + t z_0)$ e posto $y = \frac{t+1}{t}(u - z) \in B(0, \delta)$:

$$f(u) = f\left(\frac{1}{t+1}(z'+tz_0) + \frac{t}{t+1}y\right) = f\left(\frac{1}{t+1}z' + \frac{t}{t+1}(z_0+y)\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{t+1}f(z') + \frac{t}{t+1}f(z_0+y) \leq \frac{1}{t+1}|f(z')| + \frac{t}{t+1}K$$

Quindi f è limitata superiormente in $B(z, \frac{t}{t+1}\delta)$. Per il lemma, f è continua in z. $\square$

<u>Prop.</u> Se $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa, e se f è limitata in $B(z_0, r)$, allora f è <u>localmente lipschitziana</u> in $B(z_0, r)$, ossia per ogni $\rho < r$ esiste $K_\rho > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x')| \leq K_\rho \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in B(z_0, \rho).$$

<u>dim.</u> Sia $0 < \delta < r - \rho$. Posto $N = \sup_{B(z_0,r)} |f|$, siano $x_1, x_2 \in B(z_0, \rho)$. Poniamo $d = \|x_1 - x_2\|$ e $x_3 = x_2 + \frac{\delta}{d}(x_2 - x_1)$. Allora $x_3 \in B(z_0, \rho+\delta)$ e $x_2 = \frac{\delta}{d+\delta}x_1 + \frac{d}{d+\delta}x_3$, da cui

$$f(x_2) \leq \frac{\delta}{d+\delta}f(x_1) + \frac{d}{d+\delta}f(x_3), \quad \text{ovvero}$$

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{d}{d+\delta}\left[f(x_3) - f(x_1)\right] \leq \frac{2N}{\delta}d = \frac{2N}{\delta}\|x_2 - x_1\|.$$

Scambiando x_2 con x_1, si conclude che

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{2N}{\delta}\|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1, x_2 \in B(z_0, \rho). \quad \square$$