Funzioni coniugate

Anzitutto, una ulteriore proprietà delle funzioni convesse.

Prop. Sia X uno spazio di Banach e sia $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa, sci, propria. Allora:

(i) $\exists\, \varphi: X \to \mathbb{R}$, affine, minorante di f, ossia $\exists\, b \in \mathbb{R}$, $\varphi \in X^*$ tali che
$$f(x) \geq \varphi x + b \quad \forall x \in X;$$

(ii) f è l'inviluppo delle proprie funzioni affini minoranti, vale a dire
$$f(x) = \sup\{\psi(x) : \psi: X \to \mathbb{R} \text{ affine},\ \psi \leq f \text{ in } X\}.$$

dim. Per ipotesi, $\mathrm{epi}(f)$ è un convesso chiuso $\neq \emptyset$. Sia $y \in X$ e sia $a \in \mathbb{R}$, $a < f(y)$; proveremo che $\exists\, \psi$ affine, $\psi \leq f$ in X, tale che $a < \psi(y)$ (il che proverà la tesi). So che $(y, a) \notin \mathrm{epi}(f)$. Separiamo strettamente $\{(y,a)\}$ da $\mathrm{epi}(f)$ in $X \times \mathbb{R}$: esistono $\varphi \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che
$$\varphi y + \lambda a < \beta = \inf\{\varphi x + \lambda t : (x,t) \in \mathrm{epi}(f)\}.$$
Deve essere $\lambda \geq 0$, altrimenti l'inf a destra vale $-\infty$. Se $y \in D(f)$, con $x = y$ e $t = f(y)$ si deduce $\lambda a < \lambda f(y)$, quindi $\lambda > 0$. Se $y \notin D(f)$, non si può escludere che sia $\lambda = 0$. Se $\lambda = 0$, si ha $\varphi y < \beta \leq \varphi x$ $\forall x \in D(f)$. Scelto $z \in D(f)$, sia $u \in \mathbb{R}$ tale che $(z,u) \notin \mathrm{epi}(f)$. Come si è visto, trovo $\bar\varphi \in X^*$ e $\varepsilon > 0$ tali che
$$\bar\varphi z + \varepsilon u < \gamma = \inf\{\bar\varphi x + \varepsilon t : (x,t) \in \mathrm{epi}(f)\}.$$
Sia $c > 0$ tale che
$$\varepsilon a < \varepsilon c(\beta - \varphi y) + \gamma - \bar\varphi y.$$
Allora $(\varepsilon c \varphi + \bar\varphi) y + \varepsilon a < \gamma + \varepsilon c \beta \leq (\varepsilon c\varphi + \bar\varphi) x + \varepsilon t \quad \forall (x,t) \in \mathrm{epi}(f)$, con $\varepsilon c \varphi + \bar\varphi \in X^*$ e $\varepsilon > 0$. In ogni caso quindi

$\forall y \in X \ \exists \varphi \in X^*, \lambda > 0$ tali che
$$\varphi y + \lambda a < \beta = \inf\{\varphi x + \lambda t : (x,t) \in \mathrm{epi}(f)\}.$$
Posto
$$\psi(x) = -\frac{1}{\lambda}\varphi x + \frac{1}{\lambda}\beta,$$
otteniamo
$$a < \psi(y), \qquad \psi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X. \ \square$$

<u>Oss.</u> Se f è convessa e propria, ma non s.c.i., allora
$\bar{f}(x) = \sup\{\psi(x) : \psi \text{ affine}, \psi \leq f\}$ è una funzione $\leq f$, $\not\equiv f$, che si chiama "inviluppo sci. di f" o "chiusura di f"; essa è convessa e sci., ed è la massima funzione convessa sci. minorante di f. Si ha anche
$$\mathrm{epi}(\bar{f}) = \overline{\mathrm{epi}(f)}.$$

<u>Def.</u> Sia X uno spazio di Hilbert e sia $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\not\equiv +\infty$ e dotata di una minorante affine. La <u>coniugata</u>, o <u>polare</u>, di f è la funzione
$$f^*(z) = \sup_{x \in X}\{\langle z, x\rangle - f(x)\}, \quad z \in X.$$

<u>Oss.</u> La definizione ha sempre senso e $f^* : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; inoltre f^* è convessa e sci.; è anche propria perché se $\psi(x) = \langle z, x\rangle + b$ è una minorante affine per f, viene $f^*(z) \leq b < \infty$.

<u>Prop.</u> (<u>diseguaglianza di Fenchel-Young</u>) Si ha
$$\langle z, x\rangle \leq f^*(z) + f(x) \quad \forall z, x \in X.$$

<u>dim.</u> Se $x \notin D(f)$ è ovvia. Se $x \in D(f)$, per definizione si ha
$$f^*(z) \geq \langle z, x\rangle - f(x). \ \square$$

Esempi

- $X=\mathbb{R}$, $p\in]1,\infty[$, $f(x)=\frac{|x|^p}{p} \Rightarrow f^*(z)=\frac{|z|^q}{q}$, ove $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
- $X=\mathbb{R}$, $f(x)=|x| \Rightarrow f^*=I_{[-1,1]}$.
- $X=\mathbb{R}$, $f(x)=e^x \Rightarrow f^*(z)=\begin{cases} +\infty & z<0 \\ 0 & z=0 \\ z(\ln z-1) & z>0 \end{cases}$.
- $X=\mathbb{R}^n$, $f(x)=\langle \frac{1}{2}Qx+b,x\rangle$, con Q matrice $n\times n$ simmetrica e definita positiva
  $\Rightarrow \quad f^*(z)=\frac{1}{2}\langle z-b, Q^{-1}(z-b)\rangle \quad \forall z\in\mathbb{R}^n$.
- $X=\mathbb{R}^n$, $f(x)=\langle \frac{1}{2}Qx+b,x\rangle$ con Q $n\times n$ simmetrica semidefinita positiva. Il sup che definisce f^* è finito $\Leftrightarrow$ $z-b\in(\ker Q)^\perp \Leftrightarrow z-b\in R(Q)$, ed è raggiunto in un $x\in\mathbb{R}^n$ tale che $z-b=Qx$. Ergo

$$f^*(z)=\begin{cases} +\infty & \text{se } z\notin b+R(Q) \\ \frac{1}{2}\langle z-b,x\rangle & \text{se } \exists x\in X: \ z-b=Qx. \end{cases}$$

Ovvero

$$f^*(Qx+b)=\frac{1}{2}\langle Qx,x\rangle$$

da cui

$$f(x)+f^*(Qx+b)=\langle Qx+b,x\rangle$$

(la disuguaglianza di Fenchel-Young diventa un'uguaglianza.)

- $E\subseteq X$, $f=I_E \Rightarrow f^*=\sigma_E$.

Se $E=K$ è un cono convesso chiuso, $I_K^*=\sigma_K=I_{K^o}$. In particolare, $I_X^*=I_{X^o}=I_{\{0\}}$.

Proprietà della coniugata:

<u>Prop.</u> Si ha (dalla definizione di coniugata)

(i) $[f(\cdot)+\lambda]^*(z) = f^*(z) - \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) $[\lambda f]^*(z) = \lambda\, f^*(z/\lambda) \quad \forall \lambda > 0$,

(iii) $[f(\lambda\cdot)](z) = f^*(z/\lambda) \quad \forall \lambda \neq 0$,

(iv) se $A: X \to X$ è lineare e invertibile, $(f\circ A)^* = f^* \circ (A^{-1})^*$.

(v) $f(\cdot - x_0)^*(z) = f^*(z) + \langle z, x_0\rangle \quad \forall x_0 \in X$,

(vi) $[f(\cdot) + \langle x_0, \cdot\rangle]^*(z) = f^*(z - x_0) \quad \forall x_0 \in X$,

(vii) $f \leq g \Rightarrow f^* \geq g^*$,

(viii) se $D(f)\cap D(g) \neq \emptyset$, e $\alpha \in]0,1[$, $(\alpha f + (1-\alpha) g)^* \leq \alpha f^* + (1-\alpha) g^*$. □

<u>Def</u>. Sia X uno spazio di Hilbert e sia $f: X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $\not\equiv +\infty$, dotata di una minorante affine. La <u>bipolare</u> di f è la polare di f^*, cioè

$$f^{**}(u) = \sup_{y\in X}\{\langle u, y\rangle - f^*(y)\}, \quad u \in X.$$

Si ha f^{**} convessa e sci.; per la disuguaglianza di Fenchel-Young,

$$f^{**} \leq f$$

e quindi

$$f^{**} \leq \bar{f}.$$

D'altra parte, $\psi(x) = \langle z, x\rangle - r$ è affine minorante f $\Leftrightarrow$

$$r \geq \langle z, x\rangle - f(x) \ \forall x \in X \iff r \geq f^*(z).$$

Quindi $\bar{f}(x) = \sup\{\langle z, x\rangle - r : r \geq f^*(z), z \in X\} = \sup_{z\in X}\{\langle z, x\rangle - f^*(z)\} =$
$= f^{**}(x)$,

cioè f^{**} coincide con l'inviluppo sci di f; $f^{**} = f \Leftrightarrow f$ è convessa sci.

Esempio Si è visto che $I_E^* = \sigma_E$ $\forall E \subseteq X$. Invece

$$I_E^{**} = \overline{I_E} = I_{\overline{co(E)}} \quad (\text{perché } \overline{co(E)} \text{ è il minimo convesso chiuso } \supseteq E),$$

e volendo

$$I_E^{***} = I^*_{\overline{co(E)}} = \sigma_{\overline{co(E)}} = \sigma_E = I_E^* \quad (\text{come è giusto}).$$

Problemi di ottimizzazione

Vogliamo studiare il problema

$$\exists \min_{u \in X} F(u),$$

ove $F: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è una funzione convessa, sci, propria, e X è uno spazio di Hilbert. Cercheremo di caratterizzare i punti di minimo tramite opportune "relazioni di estremalità".

A questo scopo è conveniente "immergere" il nostro problema in una famiglia di problemi del tipo

$$\exists \min_{u \in X} \phi(u,y) \quad , \quad y \in Y,$$

ove $\phi: X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa, sci, propria con $\phi(u,0) = F(u)$, e Y è un altro spazio di Hilbert.

Sia ϕ^* la coniugata di ϕ:

$$\phi^*(v,z) = \sup_{(u,y) \in X \times Y} \left\{ \langle v,u \rangle_X + \langle z,y \rangle_Y - \phi(u,y) \right\} ;$$

chiameremo

$$\exists \min_{u \in X} \phi(u,0) \quad \underline{\text{problema primale}},$$

$$\exists \max_{z \in Y} \left\{ -\phi^*(0,z) \right\} \quad \underline{\text{problema duale}}.$$

Teorema Siano X, Y spazi di Hilbert, e sia $\phi : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa, sci, propria, e tale che

(a) $\lim_{\|u\|_X \to \infty} \phi(u,0) = +\infty$,

(b) $\exists\, u_0 \in X$ tale che $\phi(u_0, \cdot)$ è continua in $0 \in Y$, con $\phi(u_0, 0) \in \mathbb{R}$.

Allora il problema primale ha minimo $\hat{u} \in X$, il problema duale ha massimo $\hat{z} \in Y$, e valgono le relazioni di estremalità

$$\phi(\hat{u}, 0) + \phi^*(0, \hat{z}) = 0 .$$

dim Poniamo

$$h(y) = \inf_{u \in X} \phi(u, y) , \quad y \in Y .$$

Lemma h è convessa.

Osserviamo che può succedere, in linea di principio, che h assuma il valore $-\infty$: ad esempio, se $\phi(u,y) = u - y - e^{u-y}$ (funzione convessa su $\mathbb{R}^2$, che però non verifica (a)) si ha $h(y) \equiv -\infty$. Vedremo comunque fra poco che $h(y) > -\infty$ sempre. Siano $p, q \in X$ tali che non si abbia $h(p) = -h(q) = \pm\infty$ (altrimenti la disuguaglianza di convessità perde senso). Se uno fra $h(p)$ e $h(q)$ fa $+\infty$, tale disuguaglianza è ovvia; supponiamo dunque $h(p) < \infty$, $h(q) < \infty$ e fissiamo $a > h(p)$, $b > h(q)$. Esistono $u, v \in X$ tali che

$$h(p) \le \phi(u,p) < a , \qquad h(q) \le \phi(v,q) < b .$$

Dunque $\forall \lambda \in]0,1[$ vale

$$h((1-\lambda)p + \lambda q) = \inf_{w \in X} \phi(w, (1-\lambda)p + \lambda q) \le \phi((1-\lambda)u + \lambda v, (1-\lambda)p + \lambda q) \le$$

$$\le (1-\lambda)\phi(u,p) + \lambda \phi(u,q) < (1-\lambda)a + \lambda b .$$

Per l'arbitrarietà di $a > h(p)$ e $b > h(q)$, segue la tesi del lemma. $\square$

[**Lemma** $h^*(z) = \phi^*(0,z) \quad \forall z \in Y$.

Infatti
$$h^*(z) = \sup_{y\in Y} \{\langle z,y\rangle_Y - h(y)\} =$$
$$= \sup_{y\in Y} \{\langle z,y\rangle_Y - \inf_{u\in X} \phi(u,y)\} =$$
$$= \sup_{y\in Y} \{\langle z,y\rangle_Y + \sup_{u\in X} \{-\phi(u,y)\}\} =$$
$$= \sup_{y\in Y} \sup_{u\in X} \{\langle z,y\rangle_Y - \phi(u,y)\} =$$
$$= \sup_{(u,y)\in X\times Y} \{\langle u,0\rangle_X + \langle z,y\rangle_Y - \phi(u,y)\} = \phi^*(0,z). \ \square$$

Adesso osserviamo che $\exists \min_{u\in X} \phi(u,0) \in \mathbb{R}$, ossia il problema primale ha minimo, perchè, grazie ad (a), $\phi(\cdot,0)$ verifica le ipotesi del teorema di esistenza della lezione 2. Quindi $h(0)\in\mathbb{R}$. Inoltre, utilizzando (b), esistono $B(0,\delta)\subset Y$ e $K>0$ tali che
$$h(y) \le \phi(u_0,y) \le K \qquad \forall y\in B(0,\delta)$$
per cui h, essendo convessa e limitata superiormente in $B(0,\delta)$, è continua in 0.

[**Lemma** $h > -\infty$.

Le funzioni convesse che in un punto y_0 valgono $-\infty$ hanno questo comportamento, diretta conseguenza della convessità: per ogni $v\in Y\setminus\{0\}$, o si ha $h(y_0+sv) = -\infty$ per ogni $s\geq 0$ oppure esiste $t>0$ tali che
$$h(y_0+sv) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0\le s<t \\ \in[-\infty,+\infty] & \text{se } s=t \\ +\infty & \text{se } s>t. \end{cases}$$
Dunque, supposto $h(y_0) = -\infty$,

ricordando che $h(y) \le K \ \forall y \in B(0,\delta)$ e $h(0) \in \mathbb{R}$, scelto $v = -y_0$ si ha

$$h(y_0 + v) = h(0) \in \mathbb{R},$$

quindi deve essere

$$h(y_0 + sv) = +\infty \quad \forall s > 1,$$

mentre per $1 < s < 1 + \frac{\delta}{\|y_0\|_Y}$ abbiamo $\|y_0 + sv\| = (s-1)\|y_0\|_Y < \delta$ e dunque $h(y_0+sv) \le K$. Ciò è assurdo. $\square$

Poiché $h : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa e limitata superiormente in $B(0,\delta)$, h è continua in 0. Inoltre, $(0, h(0)) \in \partial\, \mathrm{epi}(h)$ in $Y \times \mathbb{R}$. Notiamo anche che $\overset{\circ}{\mathrm{epi}}(h) \neq \emptyset$ perché contiene $B(0,\delta) \times]K, \infty[$. Quindi possiamo separare (non strettamente) $\{(0, h(0))\}$ da $\overset{\circ}{\mathrm{epi}}(h)$, ossia esistono $z_0 \in Y$, $\lambda > 0$ tali che

$$\langle z_0, 0 \rangle_Y + \lambda h(0) \le \langle z_0, y \rangle_Y + \lambda t \quad \forall (y,t) \in \mathrm{epi}(h)$$

da cui

$$\lambda h(0) \le \langle z_0, y \rangle_Y + \lambda t \quad \forall y \in D(h),\ \forall t \ge h(y).$$

Dividendo per λ si ha allora

$$h(0) \le \langle \tfrac{z_0}{\lambda}, y \rangle_Y + h(y) \quad \forall y \in D(h),$$

e quindi h ha una minorante affine:

$$h(y) \ge \langle -\tfrac{z_0}{\lambda}, y \rangle_Y + h(0) \quad \forall y \in X.$$

In particolare $\overline{h}(0) = h(0)$. Ne segue

$$\sup_{z \in Y} \{-\phi^*(0,z)\} = \sup_{z \in Y} \{-h^*(z)\} = h^{**}(0) = \overline{h}(0) = h(0) = \min_{u \in X} \phi(u,0) \in \mathbb{R}.$$

Quindi il massimo del problema duale, se esiste, coincide col minimo del problema primale.

Infine,

$$-\phi^*(0,z) = -h^*(z) \le h(0) \le h(y) + \langle \frac{z_0}{\lambda}, y \rangle_Y \quad \forall y, z \in Y,$$

da cui, posto $\hat{z} = -\frac{z_0}{\lambda}$,

$$-\phi^*(0,z) \le \inf_{y\in Y} \{h(y) - \langle \hat{z}, y \rangle_Y\} = -\sup_{y\in Y} \{\langle \hat{z}, y\rangle_Y - h(y)\} =$$

$$= -h^*(\hat{z}) = -\phi^*(0,\hat{z}) \qquad \forall z \in Y:$$

perciò il problema duale ha massimo.

Verifichiamo le relazioni di estremalità: se $\hat{u}$ minimizza il primale e $\hat{z}$ massimizza il duale, si ha

$$\phi(\hat{u},0) = \min_{u\in X} \phi(u,0) = \max_{z\in Y} \{-\phi^*(0,z)\} = -\phi^*(0,\hat{z}) \in \mathbb{R},$$

cioè

$$\phi(\hat{u},0) + \phi^*(0,\hat{z}) = 0. \quad \square$$

Oss. Se $\hat{u} \in X$ e $\hat{z} \in Y$ verificano $\phi(\hat{u},0), \phi^*(0,\hat{z}) \in \mathbb{R}$ e $\phi(\hat{u},0) + \phi^*(0,\hat{z}) = 0$, allora

$$\phi(\hat{u},0) \ge \inf_{u\in X} \phi(u,0) = h(0) \ge h^{**}(0) = \sup_{z\in Y} \{-\phi^*(0,z)\} \ge -\phi^*(0,\hat{z}) =$$
$$= \phi(\hat{u},0),$$

quindi abbiamo una catena di uguaglianze e pertanto $\hat{u}$ minimizza il primale e $\hat{z}$ massimizza il duale. $\square$

Caso particolare (problema di minimo con vincolo)

Siano X, Y spazi di Hilbert, sia $C \subset Y$ un cono convesso, chiuso, $\ne \emptyset$, con $C \cap (-C) = \{0\}$; esso induce una relazione d'ordine parziale

$$y \le z \iff z - y \in C$$

Si ha per costruzione $C = \{y \in Y : 0 \le y\}$ e $-C = \{y \in Y : y \le 0\}$.

Il polare C^0 di C, come si sa, è

$$C^0 = \{ z \in Y : \langle z, y \rangle_Y \leq 0 \ \forall y \in C \},$$

e

$$C = C^{00} = \{ y \in Y : \langle z, y \rangle \leq 0 \ \forall z \in C^0 \}.$$

Sia $K \subseteq X$ un convesso chiuso non vuoto, e sia $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa, sci, propria, con $D(J) = K$. Sia infine $B : X \to Y$ un operatore (non necessariamente lineare) che sia convesso rispetto alla relazione $\leq$ su Y:

$$B((1-\lambda)y + \lambda z) \leq (1-\lambda) B(y) + \lambda B(z) \quad \forall \lambda \in]0,1[, \ \forall y, z \in Y$$

Supponiamo le seguenti condizioni:

(a) per ogni $z \in Y$, l'applicazione $u \mapsto -\langle B(u), z \rangle_Y$ è sci. in K,

(b) $\{ x \in K : -B(x) \text{ è interno a } C \} \neq \emptyset$,

(c) $\inf \{ J(u) : u \in K, \ B(u) \leq 0 \} \in \mathbb{R}$,

(d) $\lim_{\|u\|_X \to \infty, \ B(u) \leq 0} J(u) = +\infty$.

Il nostro problema primale è

$$\exists \min_{u \in K, \ B(u) \geq 0} J(u),$$

e sceglieremo $\phi(u, y)$ così:

$$\phi(u, y) = J(u) + I_C(y - B(u)) = \begin{cases} J(u) & \text{se } u \in K \text{ e } B(u) \leq y \\ +\infty & \text{altrimenti} . \end{cases}$$

Verifichiamo le ipotesi del teorema di prima.

- <u>ϕ è propria</u>: da (b), (c) segue $\phi(u, 0) = J(u) + I_C(-B(u))$ propria.
- <u>ϕ è convessa sci</u>: $\phi(u, y) = J(u) + I_E(u, y)$, ove $E = \{ (u, y) : u \in K, \ B(u) \leq y \}$,

ed E è converso: se $u,v\in K$, $x,y\in X$ con $B(u)\le x$, $B(v)\le y$,
allora per ogni $\lambda\in]0,1[$ si ha $(1-\lambda)u+\lambda v\in K$, e

$$B((1-\lambda)u+\lambda v)\le(1-\lambda)B(u)+\lambda B(v)\le(1-\lambda)x+\lambda y,$$

Inoltre E è chiuso: se $\{(u_n,y_n)\}\subseteq E$, e $(u_n,y_n)\to(u,y)$ in $X\times Y$,
da $B(u_n)-y_n\le 0$ segue, per ogni $z\in C^0$,

$$\langle z, y_n-B(u_n)\rangle \le 0 \quad \forall n\in\mathbb{N};$$

da (a) deduciamo

$$\langle z, y-B(u)\rangle \le \min\lim_{n\to\infty}\langle z, y_n-B(u_n)\rangle \le 0 \quad \forall z\in C^0,$$

e quindi $y-B(u)\in C^{00}=C$, ossia $B(u)\le y$.
Essendo E un convesso chiuso, I_E è convessa sci. Ne segue
$\phi=J+I_E$ convessa sci.

• $\lim_{\|u\|_X\to\infty}\phi(u,0)=+\infty$: segue da (d).

• $\exists\, u_0\in X$: $\phi(u_0;\cdot)$ continua in 0 con $\phi(u_0,0)\in\mathbb{R}$: scelto, grazie a (b),
$u_0\in K$ tale che $-B(u_0)$ sia interno a C, esiste $B(0,\delta)\le Y$ tale che

$$B(u_0)-y\le 0 \quad \forall y\in B(0,\delta),$$

quindi

$$\phi(u_0,y)=J(u_0) \quad \forall\, y\in B(0,\delta),$$

da cui la tesi.

Quindi i problemi primale e duale hanno soluzione e vale la relazione di estremalità. Ma dobbiamo scrivere ϕ^*.

$$\phi^*(0,z)=\sup_{(u,y)\in X\times Y}\left\{\langle z,y\rangle_Y - J(u) - I_C(y-B(u))\right\} = (\text{con } p=y-B(u))$$

$$=\sup_{(u,p)\in X\times Y}\left\{\langle z, B(u)\rangle_Y+\langle z,p\rangle_Y - J(u)-I_C(p)\right\}=$$

$$= \sup_{u\in K} \left\{ \langle z, B(u)\rangle_Y - J(u) \right\} + (I_C)^*(z) .$$

$$= \sup_{u\in K} \left\{ \langle z, B(u)\rangle_Y - J(u) \right\} + I_{C^\circ}(z) .$$

Quindi il problema duale è

$$\exists \max_{z\in Y} \left\{ \inf_{u\in K} \left\{ J(u) - \langle z, B(u)\rangle_Y \right\} - I_{C^\circ}(z) \right\} =$$

$$= \max_{z\in C^\circ} \ \inf_{u\in K} \left\{ J(u) - \langle z, B(u)\rangle_Y \right\} .$$

La condizione di estremalità è

$$J(\hat u) + I_C(-B(\hat u)) + \sup_{u\in K} \left\{ \langle \hat z, B(u)\rangle_Y - J(u) \right\} + I_{C^\circ}(\hat z) = 0 \ ;$$

essa implica $\hat u \in K$, $B(\hat u) \le 0$, $\hat z \in C^\circ$ (da cui $\langle \hat z, B(\hat u)\rangle_Y \ge 0$)
e $J(\hat u) + \sup_{u\in K} \left\{ \langle \hat z, B(u)\rangle_Y - J(u) \right\} = 0$.

Poichè, per definizione,

$$J(\hat u) + \sup_{u\in K} \left\{ \langle \hat z, B(u)\rangle_Y - J(u) \right\} \ge \langle \hat z, B(\hat u)\rangle_Y \ge 0,$$

si ha di conseguenza anche $\langle \hat z, B(\hat u)\rangle_Y = 0$.

OSS. le condizioni $\hat u \in K$, $B(\hat u) \le 0$, $\hat z \in C^\circ$, $\langle \hat z, B(\hat u)\rangle_Y = 0$ non equivalgono alla condizione di estremalità: esse sono soddisfatte per $\hat z = 0$ e $\hat u$ nell'insieme descritto in (b), che non sono in generale punti di massimo per $-\phi^*(0,\cdot)$ e di minimo per $\phi(\cdot, 0)$.

Esempio (Teorema di Kuhn-Tucker). Sia $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$. Per $k \in \mathbb{N}^+$ sia

$C_k = \{ y \in \mathbb{R}^k : y_i \ge 0, \ i = 1 \dots k \}$ (è cono convesso chiuso con $C_k \cap (-C_k) = \{0\}$),

e sia, per $x, y \in \mathbb{R}^k$, $x \le y \iff y - x \in C_k \iff x_i \le y_i, \ 1 \le i \le k$.

Fissati $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A matrice $m \times n$ reale, consideriamo

<u>Problema primale</u>: $\exists \min_{u\in V} \langle c,u\rangle_n$, $V=\{u\in\mathbb{R}^n : u\geq 0,\ Au\leq b\}$.

Scelgo
$$\phi(u,y)=\langle c,u\rangle_n+I_{C_n}(u)+I_{C_m}(b+y-Au)\ ,\quad u\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^m.$$
Il <u>problema duale</u> è
$$\exists \max_{y\in W}\langle b,y\rangle_m\ ,\quad W=\{y\in\mathbb{R}^m:\ y\leq 0,\ A^t y\leq c\}$$
Infatti si ha $K=C_n$, $J(u)=\langle c,u\rangle_n+I_{C_n}(u)$, $C=C_m$ e $B(u)=Au-b$.
Allora, essendo $C_m^0=-C_m$,
$$-\phi^*(0,y)=\inf_{u\in C_n}\{\langle c,u\rangle_n-\langle y,Au-b\rangle_m\}-I_{-C_m}(y)=$$
$$=\inf_{u\in C_n}\{\langle c-A^t y,u\rangle_n\}+\langle y,b\rangle_m-I_{-C_m}(y)\ ,$$
da cui
$$\max_{y\in\mathbb{R}^m}\{-\phi^*(0,y)\}=\max_{y\in -C_m}\Big\{\langle b,y\rangle_m+\inf_{u\in C_n}\langle c-A^t y,u\rangle_n\Big\};$$
ma se non avessimo $c-A^t y\geq 0$, l'inf a destra sarebbe $-\infty$, per cui
$$\max_{y\in\mathbb{R}^m}\{-\phi^*(0,y)\}=\max_{y\in W}\Big\{\langle b,y\rangle_m+\inf_{u\in C_n}\langle c-A^t y,u\rangle_n\Big\}=$$
$$=\max_{y\in W}\{\langle b,y\rangle_m\}.$$

Le relazioni di estremalità sono
$$\begin{cases}\langle c,\hat u\rangle_n-\langle b,\hat y\rangle_m=0\\ \hat u\geq 0,\ A\hat u\leq b,\ \hat y\leq 0,\ A^t\hat y\leq c.\end{cases}$$
Se $b\leq 0$, se $c_i>0$, $i=1\dots n$, e se $\{u\in C_n:\ (Au)_i<b_i,\ i=1\dots m\}\neq\emptyset$, allora il problema primale ha soluzione $\hat u$, il duale ha soluzione $\hat y$, e per ogni $i=1\dots m$ vale la seguente alternativa: $(A\hat u)_i<b_i$ e $\hat y_i=0$, oppure $(A\hat u)_i=b_i$ e $\hat y_i\leq 0$.
[ogni addendo di $0=\langle c,\hat u\rangle_n-\langle b,\hat y\rangle_m\geq\langle A^t\hat y,\hat u\rangle_n-\langle b,\hat y\rangle_m=\langle\hat y,A\hat u-b\rangle_m\geq 0$ dev'essere nullo]