Differenziabilità

Def. Siano X, Y spazi di Banach. Sia $f: X \to Y$. Sia $x_0 \in X$.
Si dice che f è <u>Fréchet-differenziabile</u> (F-differenziabile) in x_0 se $\exists\, A \in \mathcal{L}(X,Y)$ (cioè $A: X \to Y$ lineare e continuo) tale che

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

In tal caso, A è il <u>differenziale di Fréchet</u> di f in x_0 e si scrive $A = f'(x_0)$.

Oss. Il differenziale di Fréchet, se esiste, è unico.
Vale la regola usuale per il differenziale di una funzione composta: se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ (X, Y, Z spazi di Banach), se f è F-differenziabile in $x_0 \in X$ e g è F-differenziabile in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ è F-differenziabile in x_0 e $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0)$.

Esempi:
- $f: X \to Y$ costante $\Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in X$.
- $f: X \to Y$ lineare e continua $\Rightarrow f'(x_0) = f \quad \forall x_0 \in X$.
- $f: X \times Y \to Z$ bilineare e continua, allora

$$\langle f'(x_0, y_0), (h,k) \rangle = f(h, y_0) + f(x_0, k).$$

Se f è F-differenziabile in X e $f': X \to \mathcal{L}(X,Y)$ è continua, diremo che f è di classe C^1.

Def. Siano X, Y spazi di Banach, sia $f: X \to Y$, sia $x_0 \in X$. Si dice che f è <u>Gâteaux-differenziabile</u> (G-differenziabile) in x_0 se $\exists\, A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tale che $\lim_{t \to 0} \left\| \frac{1}{t}\left[f(x_0+tv) - f(x_0)\right] - Av \right\|_Y = 0 \quad \forall v \in X$.

Oss. Si richiede che non solo esista la derivata direzionale di f in x_0 secondo ogni direzione v, ma anche che la dipendenza di tale derivata da v sia lineare (ciò non è sempre vero, es. in $\mathbb{R}^2$:

$$(x_0,y_0)=(0,0), \quad f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{se } |y|\le|x| \\ \operatorname{sgn}(y)\sqrt{y^2-x^2} & \text{se } |y|>|x| \end{cases} \;.)$$

In tal caso, A è il differenziale di Gâteaux di f in x_0 e si scrive $A=f'_G(x_0)$.

Oss. Se $f:X\to Y$ è G-differenziabile in X, e se $f'_G:X\to\mathcal{L}(X,Y)$ è continua in $x_0\in X$, allora f è F-differenziabile in x_0 con $f'(x_0)=f'_G(x_0)$.

Teo. (Lagrange) Se $f:X\to Y$ è G-differenziabile, e se $x_1,x_2\in X$, allora

$$\|f(x_2)-f(x_1)\|_Y \le \sup_{t\in[0,1]} \|f'_G((1-t)x_1+tx_2)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\cdot\|x_2-x_1\|_X .$$

(ma il sup a 2° membro può valere $+\infty$).

Derivata seconda

Se $f:X\to Y$ è F-differenziabile, e se $f':X\to\mathcal{L}(X,Y)$ è a sua volta F-differenziabile, allora l'applicazione lineare

$[f']'(x_0): X\to\mathcal{L}(X,Y)$ è lineare e continua e si chiama derivata seconda di f in x_0. È facile mostrare che

$\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Y))$ coincide con

$$\mathcal{L}_2(X,Y)=\{\varphi:X\times X\to Y \text{ bilineari e continue}\}.$$

Esempio. $X=L^2(a,b)$, $Y=L^1(a,b)$, $f:X\to Y$, $f(g)=g^2$. La f verifica $\langle f'(g_0),h\rangle=\int_a^b 2g_0h\,dt$, $\langle f''(g_0)h,k\rangle=\int_a^b 2hk\,dt$ $\forall\, h,k\in L^2(a,b)$.

La f si dice di classe C^2 se $f'' \in \mathcal{L}_2(X,Y)$.

Formula di Taylor: se $f: X \to Y$ è di classe C^2, allora per ogni $x_0 \in X$ si ha

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} < f''(x_0)h, h > + o(\|h\|_X^2).$$

Massimi e minimi relativi

Prop. X spazio di Banach, $f: X \to \mathbb{R}$ funzione G-differenziabile. Se x_0 è punto di massimo o di minimo locale, allora $f'_G(x_0) = 0$.

dim. Come in $\mathbb{R}^n$. □

Prop. X spazio di Banach, $f: X \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Se x_0 è punto di massimo locale

$$< f''(x_0)v, v > \leq 0 \quad \forall v \in X;$$

se x_0 è punto di minimo locale,

$$< f''(x_0)v, v > \geq 0 \quad \forall v \in X.$$

dim. Semplice applicazione della formula di Taylor. □

Prop. X spazio di Banach, $f: X \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Se $\exists c > 0$ tale che

$$f'(x_0) = 0, \qquad < f''(x_0)v, v > \leq -c\|v\|_X^2 \quad \forall v \in X$$

allora x_0 è punto di massimo locale; se

$$f'(x_0) = 0, \qquad < f''(x_0)v, v > \geq c\|v\|_X^2 \quad \forall v \in X,$$

allora x_0 è punto di minimo locale.

dim. Ancora dalla formula di Taylor. □

Sottodifferenziale

Def. Sia X uno spazio di Banach, sia $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Diciamo che f è <u>sottodifferenziabile</u> in $x_0 \in X$ se $\exists\, \psi: X \to \mathbb{R}$, affine, tale che
$$f(x) \geq \psi(x) \quad \forall x \in X, \qquad f(x_0) = \psi(x_0).$$

Oss. Naturalmente, f sottodifferenziabile in x_0 implica: (i) $f(x_0) \in \mathbb{R}$, (ii) f è minorata da una funzione affine; in particolare $\exists\, \varphi \in X^*$ tale che
$$f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \forall x \in X$$
[Infatti se $\psi(x) = \varphi x + b$ verifica la definizione, allora
$$f(x) \geq \psi(x) = \varphi(x - x_0) + \varphi x_0 + b = \varphi(x - x_0) + \psi(x_0) = \varphi(x - x_0) + f(x_0).]$$
Ne segue che f è anche sci. in x_0.

Def. Il <u>sottodifferenziale</u> di f è l'insieme $\partial f(x_0) \subseteq X^*$, dato da
$$\partial f(x_0) = \{\varphi \in X^* : \ f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \forall x \in X\}.$$

Oss. Può capitare che $\partial f(x_0) = \emptyset$ (ad es. se $f: X \to \mathbb{R}$ è concava). Infatti la definizione ha interesse essenzialmente per le funzioni <u>convesse</u>.

Es. Se $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è convessa e G-differenziabile, allora
$$\partial f(x_0) = \{f'_G(x_0)\}.$$
[Infatti: se $\varphi \in \partial f(x_0)$, allora $f(x_0) \in \mathbb{R}$ e $f(x_0 + tv) - f(x_0) \geq t\varphi v$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $v \in X$; quindi $\dfrac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} \geq \varphi v$ se $t \to 0^+$, mentre $\dfrac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} \leq \varphi v$ se $t \to 0^-$. Quindi $\varphi = f'_G(x_0)$. D'altronde,

poichè $t \mapsto \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$ è crescente, con $v = x-x_0$ si ha

$$f(x)-f(x_0) = f(x_0+v)-f(x_0) \geq f'_G(x_0)v = f'_G(x_0)(x-x_0)$$

da cui $f'_G(x_0) \in \partial f(x_0)$.]

Proprietà del sottodifferenziale

Ci limitiamo, per comodità, al caso in cui X è uno spazio di Hilbert, cosicchè $X^* \simeq X$ e $\partial f(x_0) \subseteq X$. Supponemo f convessa

Prop. Sia $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Per ogni $x_0 \in X$, $\partial f(x_0)$ è convesso e w-chiuso, quindi chiuso.

dim. Se $f(x_0) = +\infty$, allora $\partial f(x_0) = \emptyset$ (ed è convesso chiuso).

Se $f(x_0) \in \mathbb{R}$, la convessità è facile conseguenza della caratterizzazione

$$z \in \partial f(x_0) \iff f(x_0) \in \mathbb{R} \text{ e } f(x)-f(x_0) \geq \langle z, x-x_0 \rangle \ \forall x \in X.$$

Proviamo che $X \setminus \partial f(x_0)$ è w-aperto: se $z \notin \partial f(x_0)$, esistono $x \in X$ ed $\varepsilon_0 > 0$ tali che $f(x)-f(x_0)-\langle z, x-x_0\rangle \leq -\varepsilon_0 < 0$.

Allora, posto $U = \{u \in X : |\langle z-u, x-x_0\rangle| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}\}$, U è un w-intorno di z in X, e si ha $U \subseteq X \setminus \partial f(x_0)$ poichè

$$u \in U \implies f(x)-f(x_0)-\langle u, x-x_0\rangle \leq f(x)-f(x_0)-\langle z, x-x_0\rangle + \frac{\varepsilon_0}{2} < -\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Dunque $X \setminus \partial f(x_0)$ è w-aperto. $\square$

Prop. Sia $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Se $x_0 \in X$, si ha $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$ se e solo se $0 \in \partial f(x_0)$.

dim. Per definizione di sottodifferenziale. $\square$

Prop. Sia $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si ha:

(i) Se $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ allora $f(x_0) = f^{**}(x_0)$

(ii) Se $f(x_0) = f^{**}(x_0)$ allora $\partial f(x_0) = \partial f^{**}(x_0)$.

dim (i) Se $\psi: X \to \mathbb{R}$ è affine con $\psi(x) \leq f(x)$ $\forall x \in X$ e $\psi(x_0) = f(x_0)$, allora dalla prima relazione segue $\psi(x) \leq f^{**}(x)$ e dalla 2ª la tesi.

(ii) Se $f(x_0) = f^{**}(x_0) = +\infty$ allora $\partial f(x_0) = \emptyset = \partial f^{**}(x_0)$. Se $f(x_0) \in \mathbb{R}$, sia $z \in \partial f(x_0)$: da $f(x) \geq f(x_0) + \langle z, x - x_0 \rangle = f^{**}(x_0) + \langle z, x - x_0 \rangle$ $\forall x \in X$ segue che $f(x) \geq f^{**}(x) \geq f^{**}(x_0) + \langle z, x - x_0 \rangle$ $\forall x \in X$ cioè $z \in \partial f^{**}(x_0)$.

Se, viceversa, $z \in \partial f^{**}(x_0)$, allora

$$f(x) \geq f^{**}(x) \geq f^{**}(x_0) + \langle z, x - x_0 \rangle = f(x_0) + \langle z, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in X,$$

e dunque $z \in \partial f(x_0)$. $\square$

Teo. Sia $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, e siano $z, x_0 \in X$. Si ha

$$z \in \partial f(x_0) \overset{(1)}{\iff} \begin{cases} f(x_0) \in \mathbb{R}, \\ f(x_0) + f^*(z) = \langle z, x_0 \rangle \end{cases} \overset{(2)}{\iff} x_0 \in \partial f^*(z).$$

dim (1) $z \in \partial f(x_0) \iff \begin{cases} f(x_0) \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq f(x_0) + \langle z, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in X \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} f(x_0) \in \mathbb{R} \\ \langle z, x_0 \rangle - f(x_0) \geq \langle z, x \rangle - f(x) \quad \forall x \in X \end{cases} \iff \begin{cases} f(x_0) \in \mathbb{R} \\ f^*(z) = \langle z, x_0 \rangle - f(x_0). \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} f(x_0)\in\mathbb{R} \\ f(x_0)+f^*(z)=\langle z,x_0\rangle \end{cases} \iff (\text{per }(1)) \begin{cases} f(x_0)=f^{**}(x_0)\in\mathbb{R} \\ f^{**}(x_0)=\langle x_0,z\rangle - f^*(z) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} f^*(z)\in\mathbb{R} \\ \langle x_0,z\rangle - f^*(z) \geq \langle x_0,u\rangle - f^*(u) \quad \forall u\in X \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f^*(z)\in\mathbb{R} \\ f^*(u)\geq f^*(z)+\langle x_0, u-z\rangle \quad \forall u\in X \end{cases} \iff x_0\in\partial f^*(z). \quad \square$$

[<u>Teo</u>. Sia $f: X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ convessa. Se $\exists x_0\in D(f)$ tale che f è continua in x_0, allora $\partial f(x)\neq\emptyset$ $\forall x\in \mathring{D}(f)$ (in particolare, $\partial f(x_0)\neq\emptyset$).

<u>dim</u>. Si ha $f(x_0)\in\mathbb{R}$. So che f è continua e limitata in un intorno di ciascun $x\in\mathring{D}(f)$. Se $x\in\mathring{D}(f)$, esistono quindi $V\in\mathcal{U}(x)$ e $K>0$ tali che $|f(\xi)|\leq K$ $\forall\xi\in V$. Quindi $V\times]K,\infty[\subseteq \mathrm{epi}(f)$, che quindi è un convesso con $\mathring{\mathrm{epi}}(f)\neq\emptyset$. Poi, $(x,f(x))\in\partial\,\mathrm{epi}(f)$. Separiamo (non strettamente) $(x,f(x))$ da $\mathring{\mathrm{epi}}(f)$: $\exists z\in X$, $t>0$ tali che

$$\varphi x + t f(x) = \beta \leq \varphi\xi + t\lambda \quad \forall(\xi,\lambda)\in\mathring{\mathrm{epi}}(f)$$

e la relazione si estende per continuità ad ogni $(\xi,\lambda)\in\mathrm{epi}(f)$, quindi ad ogni $(\xi,f(\xi))$ con $\xi\in D(f)$. Perciò

$$\frac{\beta}{t}-\frac{\varphi}{t}\xi \leq f(\xi), \qquad \frac{\beta}{t}-\frac{\varphi}{t}x = f(x),$$

e allora per sottrazione

$$f(\xi)\geq f(x) - \frac{\varphi}{t}(\xi - x), \qquad \forall\xi\in X$$

cioè $-\frac{\varphi}{t}\in\partial f(x)$. $\square$

<u>Teo</u>. Sia $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Definiamo per $x \in D(f)$

$$D^+ f(x,v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}, \qquad D^- f(x,v) = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t};$$

(i) $\forall x \in D(f)$ e $\forall v \in X$ si ha

$$\partial f(x) = \{ z \in X : \langle z, v \rangle \leq D^+ f(x,v) \ \forall v \in X \} =$$
$$= \{ z \in X : \langle z, v \rangle \geq D^- f(x,v) \ \forall v \in X \}.$$

(ii) Se $\exists x_0 \in D(f)$ tale che f è continua in x_0, allora $\forall x \in \mathring{D}(f)$ e $\forall x \in V$ si ha

$$D^+ f(x,v) = \sup_{z \in \partial f(x)} \langle z, v \rangle, \qquad D^- f(x,v) = \inf_{z \in \partial f(x)} \langle z, v \rangle.$$

<u>dim</u> (i) $D^+ f(x,v)$ e $D^- f(x,v)$ esistono e $D^+ f(x,v) \geq D^- f(x,v)$ per la crescenza dei rapporti incrementali.

Sia $x \in D(f)$ e sia $z \in \partial f(x)$: da $f(\xi) - f(x) \geq \langle z, \xi - x \rangle \ \forall \xi \in X$ segue

$$f(x+tv) - f(x) \geq t \langle z, v \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall v \in X,$$

da cui per $t \to 0^\pm$

$$D^+ f(x,v) \geq \langle z, v \rangle \geq D^- f(x,v) \quad \forall v \in X.$$

Viceversa, se $z \in X$ verifica la prima disuguaglianza, allora a maggior ragione

$$f(x+v) - f(x) \geq D^+ f(x,v) \geq \langle z, v \rangle \quad \forall v \in X,$$

da cui, con $v = \xi - x$, $f(\xi) - f(x) \geq \langle z, \xi - x \rangle$ $\forall \xi \in X$ cioè $z \in \partial f(x)$.

Se $z \in X$ verifica la seconda, allora

$$\langle z, v \rangle \geq D^- f(x,v) \geq \frac{f(x-v) - f(x)}{-1} = f(x) - f(x-v),$$

da cui, con $v = \xi - x$, si ha la stessa conclusione.

(ii) Come già sappiamo, si ha $\partial f(x) \neq \emptyset$ $\forall x \in \mathring{D}(f)$, e

$$D^+ f(x,v) \geq \sup_{z \in \partial f(x)} \langle z, v \rangle \geq \inf_{z \in \partial f(x)} \langle z, v \rangle \geq D^- f(x,v).$$

D'altra parte, f è continua in ogni $x \in \mathring{D}(f)$, quindi lipschitziana in $B(x,\delta)$, cioè $\exists K>0$ tale che, $\forall v \in B(0,\delta)$,

$$-K\|v\|_X \le f(x-v)-f(x) \le D^-f(x,v) \le D^+f(x,v) \le f(x+v)-f(x) \le K\|v\|_X$$

Ma $v \mapsto D^\pm f(x,v)$ sono sublineari, perchè convesse e positivamente omogenee; quindi

$$-K\|v\|_X \le D^-f(x,v) \le D^+f(x,v) \le K\|v\|_X \quad \forall v \in X.$$

Sia ora $v \neq 0$: se troviamo $z_0 \in \partial f(x)$ che verifichi $\langle z_0, v\rangle = D^+f(x,v)$, otterremo $D^+f(x,v) \le \sup_{z\in\partial f(x)} \langle z, x\rangle$.

Consideriamo $\text{epi}(D^+f(x,\cdot)) = K$ convesso chiuso in $X\times\mathbb{R}$. Si ha $(v, D^+f(x,v)) \in \partial K$, quindi lo separiamo (non strettamente) da K: cioè $\exists \bar{z} \in X$, $\lambda > 0$ tali che $\langle \bar{z}, v\rangle + \lambda D^+f(x,v) \le \langle \bar{z}, \xi\rangle + \lambda t \ \ \forall (\xi,t) \in K$.
Poichè $(0,0) \in K$, si ha $\langle \bar{z}, v\rangle + \lambda D^+f(x,v) \le 0$, ossia, posto $z_0 = -\frac{\bar{z}}{\lambda}$, $\langle z_0, v\rangle \ge D^+f(x,v)$. Ma se scelgo $\xi = \tau v$, $t = \tau D^+f(x,v)$, con $\tau > 1$ si ottiene $(\tau-1)\langle z_0, v\rangle \le (\tau-1)D^+f(x,v)$, da cui $\langle z_0, v\rangle = D^+f(x,v)$. Perciò $0 \le -\langle z_0, \xi\rangle + t \ \ \forall (\xi,t) \in K$, da cui $\langle z_0, \xi\rangle \le D^+f(x,\xi) \ \ \forall \xi \in X$, quindi $z_0 \in \partial f(x)$ per (i).

Infine, siccome $D^-f(x,v) = -D^+f(x,v)$, sia $v \in V$ e scegliamo $z_0 \in \partial f(x)$ in modo che

$$D^+f(x,-v) = \langle z_0, -v\rangle;$$

allora

$$\langle -z_0, v\rangle = -D^+f(x,-v) = D^-f(x,v)$$

e quindi

$$D^-f(x,v) = \inf_{z\in\partial f(x)} \langle z, v\rangle. \quad \square$$

Cor. Sia $f: X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ convessa e propria; sia $x_0 \in D(f)$. Se f è continua in x_0, e $\partial f(x_0) = \{z_0\}$, allora f è G-differenziabile in x_0 con $f'_G(x_0) = z_0$.

Infatti $D^+f(x_0,v) = \langle z_0, v\rangle = D^-f(x_0,v)$ per il teorema precedente (ii) $\square$

Cor. 2. Sia $f: K \to \mathbb{R}$ una funzione G-differenziabile, ove $K \subseteq X$ è un convesso non vuoto. Allora f è convessa se e solo se

$$f(x) \geq f(y) + \langle f'_G(y), x-y \rangle \quad \forall x, y \in K.$$

Infatti il prolungamento di f, che vale $+\infty$ su $X \setminus K$, soddisfa in K le condizioni del 1° esempio (pag. 4). Quindi $\partial f(y) = \{f'_G(y)\}$. Ne segue la diseguaglianza.

Viceversa: applico la diseguaglianza a $(u, (1-\lambda)u+\lambda v)$ e $(v, (1-\lambda)u+\lambda v)$, con $u, v \in K$, $\lambda \in [0,1]$:

$$f(u) \geq f((1-\lambda)u+\lambda v) + \lambda \langle f'_G((1-\lambda)u+\lambda v), u-v \rangle$$
$$f(v) \geq f((1-\lambda)u+\lambda v) + (1-\lambda) \langle f'_G((1-\lambda)u+\lambda v), v-u \rangle$$

Moltiplicando la 1ª per $1-\lambda$, la 2ª per λ, e sommando, viene fuori la definizione di convessità. □

Cor. 3 $f: K \to \mathbb{R}$ G-differenziabile, $K \subseteq X$ convesso non vuoto. Allora f è convessa se e solo se f'_G è un operatore monotono in K, cioè

$$\langle f'_G(u) - f'_G(v), u-v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in K.$$

dim. Da $f(u) \geq f(v) + \langle f'_G(v), u-v \rangle$, $f(v) \geq f(u) + \langle f'_G(u), v-u \rangle$, sommando viene la tesi. Viceversa: posto $\phi(\lambda) = f((1-\lambda)u+\lambda v)$, $\lambda \in [0,1]$, viene $\phi'(\lambda) = \langle f'_G((1-\lambda)u+\lambda v), v-u \rangle$ e, per ipotesi di monotonia,

$$\phi'(\mu) - \phi'(\lambda) = \langle f'_G((1-\mu)u+\mu v) - f'_G((1-\lambda)u+\lambda v), v-u \rangle =$$

$$= \frac{1}{\mu-\lambda} \langle f'_G((1-\mu)u+\mu v) - f'_G((1-\lambda)u+\lambda v), (1-\mu)u+\mu v - (1-\lambda)u - \lambda v \rangle$$

$$\geq 0 \iff \mu > \lambda.$$

cioè ϕ' crescente, da cui ϕ convessa. Ergo $\phi(\lambda) \leq (1-\lambda)\phi(0) + \lambda\phi(1)$ che dà esattamente la convessità di f. ■

Esempi • X spazio di Hilbert, $\partial\|\cdot\|(x) = \begin{cases} \overline{B(0,1)} & \text{se } x=0 \\ \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\} & \text{se } x\neq 0. \end{cases}$

• $X=\mathbb{R}^n$, $f(x)=\sqrt{\langle Qx, x\rangle}$

con Q matrice $n\times n$ semi-definita positiva.

Si ha

$$\partial f(x) = \begin{cases} \left\{\frac{Qx}{f(x)}\right\} & \text{se } x\notin \ker Q, \\ Q^{1/2}\left(\overline{B(0,1)}\right) & \text{se } x\in \ker Q. \end{cases}$$

• $X=\mathbb{R}^n$, $f(x)=\mathrm{dist}(x,K)$, K convesso chiuso. Allora

$$\partial f(x) = \begin{cases} N_K(x)\cap B(0,1) & \text{se } x\in K \\ \left\{\frac{x-P_K(x)}{\|x-P_K(x)\|}\right\} & \text{se } x\notin K. \end{cases}$$

• $X=\mathbb{R}^n$, $f(x)=\max\limits_{1\leq j\leq m}\{\psi_j(x)\}$ con $\psi_j(x)=b_j+\langle z_j, x\rangle$ (affine).

Allora $\partial f(x) = \mathrm{co}\{z_j : j\in J(x)\}$, ove $J(x)=\{j\in\{1,\dots,m\} : \psi_j(x)=f(x)\}$

• $\partial(\lambda f)(x) = \lambda\,\partial f(x) \quad \forall \lambda\geq 0$.

• f,g convesse proprie $\Rightarrow \partial(f+g)(x) \supseteq \partial f(x)+\partial g(x)$;

se in più $x\in D(f)\cap D(g)$ e f è continua in x, allora $\partial f(x)+\partial g(x)=\partial(f+g)(x)$.

Calcolo delle variazioni

Obiettivo principale del c.d.v. è la minimizzazione di funzionali che dipendono da variabili che si muovono in spazi di funzioni. La scelta degli spazi in cui cercare la soluzione di un problema di minimo è spesso obbligata ma talvolta è parte integrante del problema stesso.

I tipici funzionali che si incontrano sono della forma

- $J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$,

dove u appartiene a una classe di funzioni definite su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, dotate di derivate parziali prime, soggette eventualmente a vincoli ulteriori (ad esempio, $u|_{\partial\Omega} = g$ assegnata). Si assume che l'integrando F abbia adeguate proprietà di regolarità.

- $J(u) = \int_a^b F(t, u(t), v(t), u'(t), v'(t))\, dt$

(qui l'incognita $U(t) = (u(t), v(t))$ è vettoriale).

Supponiamo $J(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx$ con $F(x, u, p)$ continua in $\bar\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e tale che $F_u, F_{p_1}, \dots, F_{p_n} \in C(\bar\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Allora J è F-differenziabile in $C^1(\bar\Omega)$ e, per ogni $v \in C^1(\bar\Omega)$ si ha

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_\Omega \left[F_u(x, u(x), \nabla u(x))\, v(x) + \sum_{i=1}^n F_{p_i}(x, u(x), \nabla u(x))\, D_i v(x) \right] dx$$

[Si scrive l'incremento $J(u+v) - J(u)$ come

$$\int_\Omega \int \frac{d}{dt} F(x, u+tv, \nabla(u+tv))\, dt\, dx ,$$

si calcola la derivata, e utilizzando il teorema della media si isola la parte che è lineare in v. Il resto si mette tutto insieme e si prova che è $\leq C\varepsilon \|v\|_{C^1(\bar\Omega)}$, se $\|v\|_{C^1(\bar\Omega)}$ è sufficientemente piccola].

Se, in più, $F_{uu}, F_{p_i u}, F_{p_i p_j} \in C(\bar\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, allora J ha la derivata seconda in $C^1(\bar\Omega)$, e $\forall v, w \in C^1(\bar\Omega)$ vale

$$\langle J''(u) v, w \rangle = \int_\Omega \left[F_{uu}(x, u, \nabla u)\, v w + \sum_{i=1}^n F_{u p_i}(x, u, \nabla u)\, v D_i w + \sum_{i,j=1}^n F_{p_i p_j}(x, u, \nabla u)\, D_i v D_j w \right] dx.$$

Il punto principale del c.d.v. è che i punti stazionari del funzionale J, cioè quelli dove $J'(u)=0$, sono soluzioni di una equazione differenziale legata soltanto all'integrando F: l'equazione di Eulero.

Teo. Sia $F\in C^2(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, e sia $g\in C(\partial\Omega)$ fissata. Consideriamo il funzionale $J(u)=\int_\Omega F(x,u,\nabla u)\,dx$. Se u_0 è un punto stazionario per J nella classe $X=\{u\in C^1(\overline{\Omega}):\ u|_{\partial\Omega}=g\}$, allora u_0 risolve

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} F_{p_i}(x,u(x),\nabla u(x)) = F_u(x,u(x),\nabla u(x)) \quad ,\ x\in\Omega.$$

dim. Sappiamo che

$$<J'(u_0),v> = \int_\Omega \left[F_u(x,u,\nabla u)\,v + \sum_{i=1}^n F_{p_i}(x,u,\nabla u)\,D_i v\right] dx,\quad \forall v\in C^1(\overline{\Omega}).$$

Se scegliamo $v\in C^1_0(\Omega)$, allora $u_0+v\in X$ se $u_0\in X$: Quindi

$$0=<J'(u_0),v> = \int_\Omega \left[F_u\, v + \sum_{i=1}^n F_{p_i}\cdot D_i v\right]dx,\ \forall v\in C^1_0(\Omega).$$

Qui interviene il lemma fondamentale del c.d.v.:

Lemma Siano $g\in C(\overline{\Omega})$, $h_1 \dots h_n \in C^1(\overline{\Omega})$ tali che

$$\int_\Omega \left[g(x)\varphi(x) + \sum_{i=1}^n h_i(x)\, D_i\varphi(x)\right] dx = 0 \quad \forall \varphi\in C^1_0(\Omega).$$

Allora si ha $\operatorname{div} \underline{h}(x) = \sum_{i=1}^n D_i h_i(x) = g(x)$ in Ω.

[lo dimostriamo dopo].

Dal lemma segue immediatamente che $\frac{d}{dx} F_{p_i}(x,u_0,\nabla u_0) = F_u(x,u_0,\nabla u_0)$ in Ω.

$\square$

<u>dim. del lemma:</u>

Se $h_1 \equiv \dots \equiv h_n \equiv 0$, si ha $\int_\Omega g\varphi\, dx = 0 \ \forall \varphi \in C^1_0(\Omega)$. Se in un punto $x_0 \in \Omega$ si ha $g(x_0) \neq 0$, possiamo supporre $g(x_0) > 0$. Per continuità esiste $B(x_0,\delta) \subset \Omega$ tale che $g>0$ in $B(x_0,\delta)$. Scelta

$$\varphi(x) = \begin{cases} (\delta^2 - \|x-x_0\|^2)^2 & \text{se } \|x-x_0\| < \delta \\ 0 & \text{se } \|x-x_0\| \geq \delta \end{cases},$$

la φ è di classe $C^1_0(\Omega)$ e $0 = \int_\Omega g\varphi\, dx = \int_{B(x_0,\delta)} g\cdot\varphi\, dx > 0$, assurdo.

Dunque $g \equiv 0$.

Nel caso generale, possiamo integrare per parti:

$$0 = \int_\Omega g\varphi\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega h_i D_i\varphi\, dx = \int_\Omega g\varphi\, dx + \cancel{\sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} h_i \nu_i \varphi\, d\sigma} - \sum_{i=1}^n \int_\Omega D_i h_i \varphi\, dx$$

$$= \int_\Omega \left[g - \sum_{i=1}^n D_i h_i \right] \varphi\, dx, \quad \forall \varphi \in C^1_0(\Omega).$$

Per quanto già provato, segue $g \equiv \sum_{i=1}^n D_i h_i$. □

<u>Osservazione</u> Le soluzioni dell'equazione di Eulero del funzionale J si dicono <u>estremali</u> di J nella classe X. Ogni estremale $u_0 \in X$ è un punto stazionario di J, e vale $\langle J'(u_0), v\rangle = 0 \ \forall v \in C^1_0(\Omega)$, ma non è detto che sia punto di minimo (né di massimo) per J.

Se però J, oltre che F-differenziabile, è anche <u>convesso</u>, allora ogni estremale u_0 di J è punto di minimo <u>assoluto</u> per J: infatti

$$J(u_0+v) \geq J(u_0) + J'(u_0)v = J(u_0) \quad \forall v \in C^1_0(\Omega)$$

Se inoltre J è strettamente convesso il punto di minimo è unico.

Affinché J sia convesso basta che F sia convessa rispetto alle variabili (u,p).

Se $F(x,u,p)$ soddisfa condizioni del tipo

$$|F(x,u,p)| \le c\,(1+|u|^2+|p|^2)$$

$$|F_u(x,u,p)| + \sum_{i=1}^{n} |F_{p_i}(x,u,p)| \le c\,(1+|u|+|p|),$$

allora il funzionale $J(u)=\int_\Omega F(x,u,\nabla u)\,dx$ è ben definito anche nello spazio di Hilbert $H^{1,2}(\Omega)$, chiusura di $C^1(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma hilbertiana $\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}=\sqrt{\int_\Omega |u|^2dx+\int_\Omega |\nabla u|^2dx}$. Posto $X=\{u\in H^{1,2}(\Omega) : u|_{\partial\Omega}=g\}$, g funzione adeguata nello spazio delle tracce $H^{1/2,2}(\partial\Omega)$, si può mostrare che J è F-differenziabile in $H^{1,2}(\Omega)$, e che se $u_0\in X$ è punto stazionario per J, allora vale l'equazione di Eulero

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} F_{p_i}(x,u,\nabla u) = F_u(x,u,\nabla u) \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Esempi:

- $J(u)=\int_\Omega |Du|^2dx$ (integrale di Dirichlet o dell'energia)

$$\Rightarrow \text{eq. di Eulero} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{(in senso debole)} \\ u|_{\partial\Omega}=g \end{cases} \quad \text{(problema di Dirichlet)}$$

Poichè J è strettamente convesso, il minimo è unico ed è dato dalla soluzione $u\in H^{1,2}(\Omega)$ del problema di Dirichlet, che esiste unica (a patto che l'aperto Ω soddisfi qualche condizione di regolarità).

- $J(u)=\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}\,dx$ (funzionale dell'area). È ben definito nello spazio di Banach $H^{1,1}(\Omega)$ (chiusura di $C^1(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{H^{1,1}(\Omega)} = \int_\Omega |u|\,dx + \int_\Omega |Du|\,dx.)$$

J è strettamente convesso e F-differenziabile; l'equazione di Eulero è

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n D_i\left(\dfrac{D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

che ha soluzione unica a patto che Ω sia convesso. È il problema di determinare una ipersuperficie di area n-dimensionale minima fra quelle che sul bordo di Ω si attaccano al grafico di g.

- $J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\langle A(x)Du, Du\rangle_n + f(x)u\right] dx$ [A matrice $n\times n$ definita positiva, con $A_{ij} \in C(\bar\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$]

è strettamente convesso e F-differenziabile. Sia $X = H_0^{1,2}(\Omega)$ = chiusura di $C_0^1(\Omega)$ in $H^{1,2}(\Omega)$.

Eq. Eulero:
$$\begin{cases} \sum_{ij=1}^n D_i(A_{ij}(x) D_j u) = f(x) \quad \text{q.o.} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$
(problema di Dirichlet per un'eq. ellittica)

serve un lemma fondamentale del c.d.v. più generale, valido per funzioni $g \in L^2(\Omega)$.

Il problema ha soluzione unica $u \in H^{1,2}(\Omega)$; basterebbe anzi prendere $f \in H^{-1}(\Omega) := [H_0^{1,2}(\Omega)]^*$, il che equivale a sostituire nel funzionale fu con $-\sum_{i=1}^n f_i(x) D_i u$, $f_i \in L^2(\Omega)$.