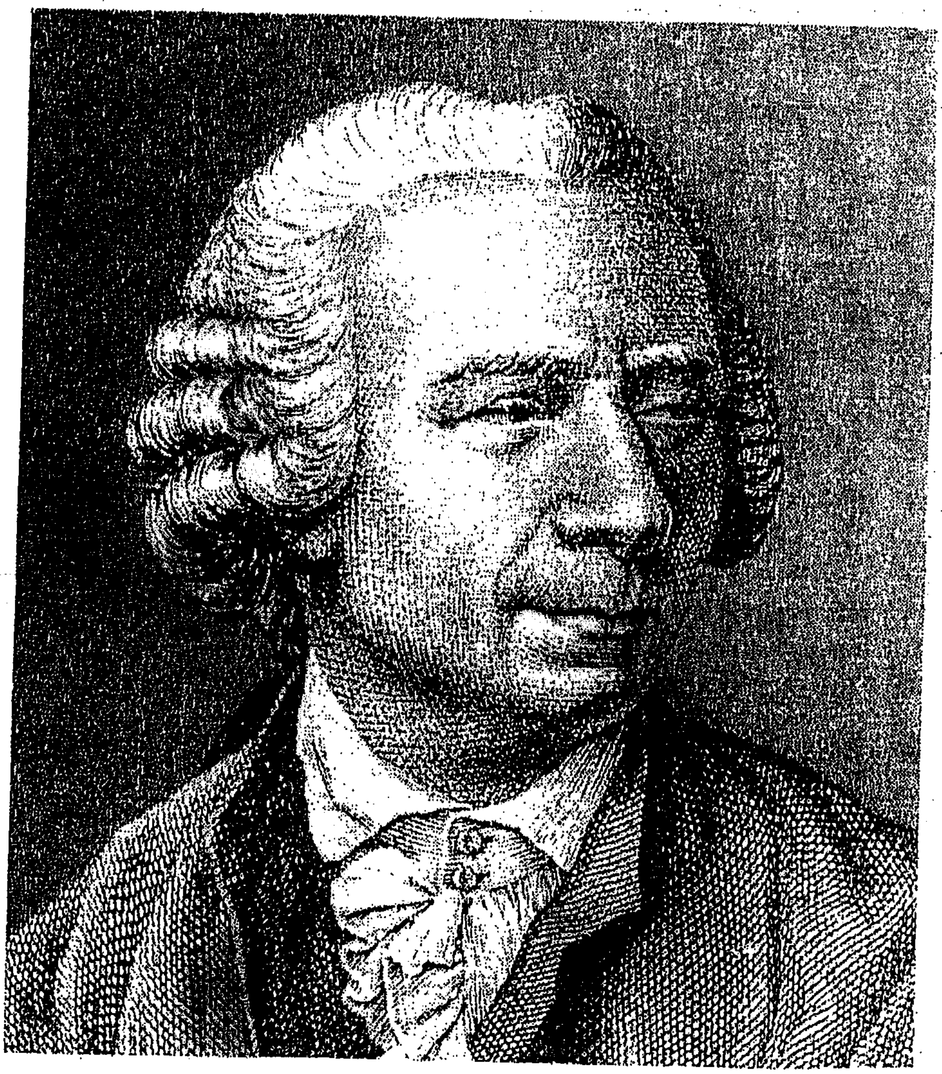
POICHE' LA COSTRUZIONE DELL'UNIVERSO E' LA PIU' PERFETTA ED E' IL LAVORO DEL PIU' SAGGIO CREATORE, NULLA ESISTE NELL'UNIVERSO SENZA CHE VI SIA UNA QUALCHE REGOLA DI MASSIMO O MINIMO

Leonhard Euler, 1701-1783



LEONHARD EULER (1707–1783)

PÍERRE de FERMAT
(1601 – 1665)

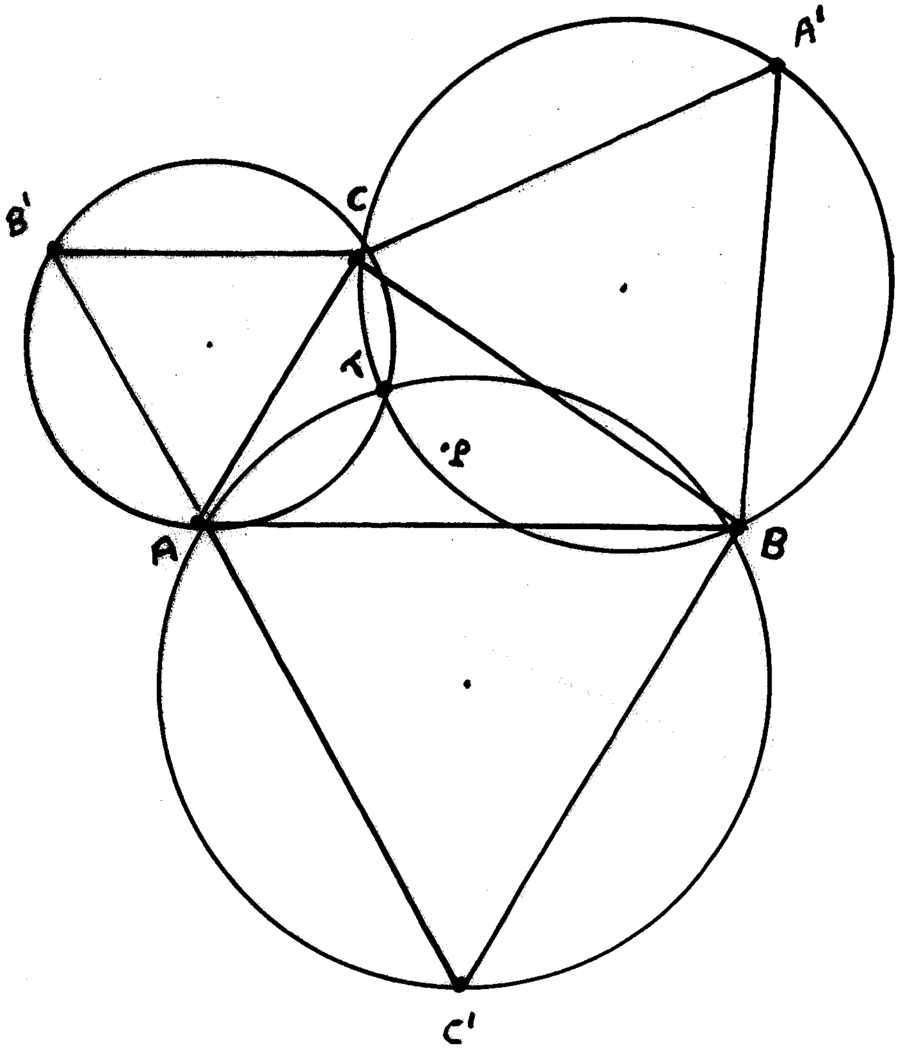
PROBLEMA DI FERMAT $\min(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})$ (1643)
(ISPIRATO DA CARTESIO, 1638)

MERSENNE → ITALIA

RISOLUZIONE DI TORRICELLI (≃ 1644)

T = PUNTO DI TORRICELLI

B. CAVALIERI (≃ 1647)
M. RICCI (ROMA)
V. VIVIANI (FIRENZE)
V. RANIERI (PISA)



J. STEINER (1796-1863)
A. WEBER
⋮
P. ERDÖS
⋮

PROBLEMA DI FERMAT min ($\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$) (1643)
(ISPIRATO DA CARTESIO, 1638)

MERSENNE → ITALIA

RISOLUZIONE DI TORRICELLI (≃1644)

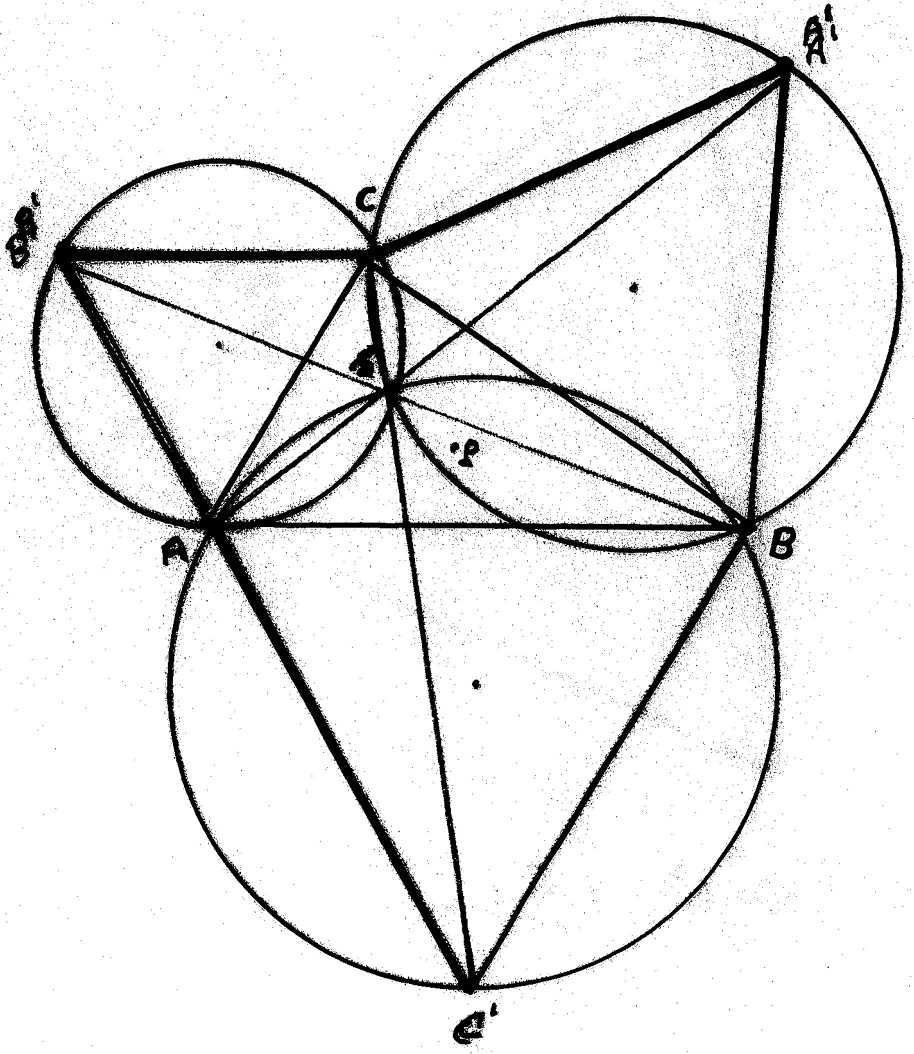
RISOLUZIONE DI T. SIMPSON (1710-1761) IN 1750

B. CAVALIERI (≃1647)
M. RICCI (ROMA)
V. VIVIANI (FIRENZE)
V. RANIERI (PISA)

T = PUNTO DI TORRICELLI

$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$ = LINEE DI SIMPSON

S = PUNTO DI SIMPSON ≡ PUNTO DI TORRICELLI



J. STEINER (1796-1863)
A. WEBER
⋮
P. ERDÖS
⋮

$$\overline{AA'} = \min(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})$$

Simpson "Doctrine and Application of fluxions"
London, 1750

↓
≈ NEWTON

PROBLEMA DI FERMAT (ISPIRATO DA CARTESIO, 1638) $\min(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})$ (1643)

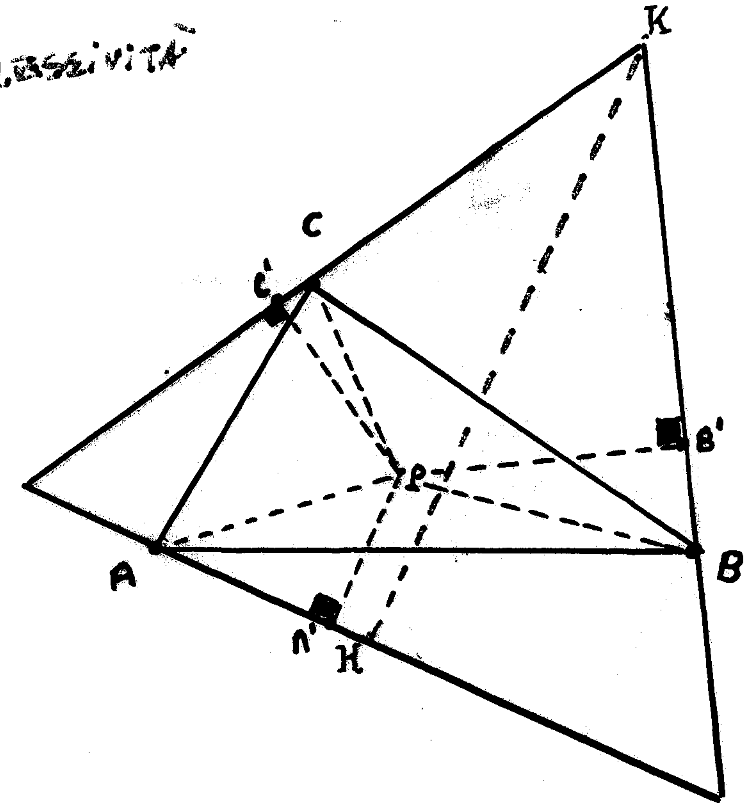
MERSENNE → ITALIA

PROBLEMA DUALE $\max \overline{HK}$

E. FASBENDER NEL 1846

RIFLESSIVITÀ

DUALITÀ LAGRANGIANA



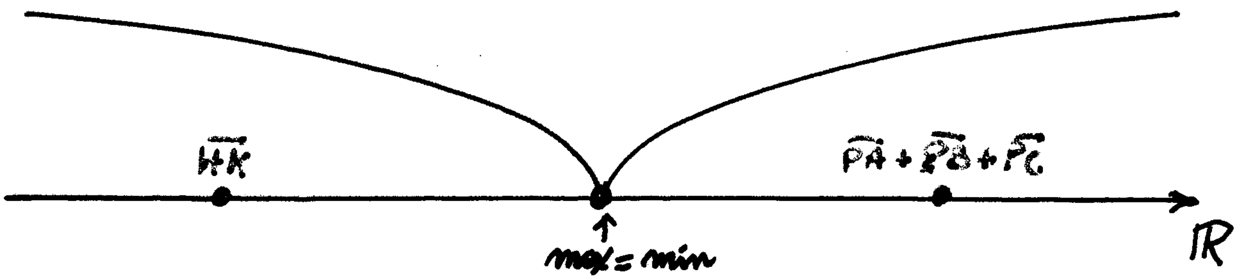
$\overline{PA'} \leq \overline{PA}$

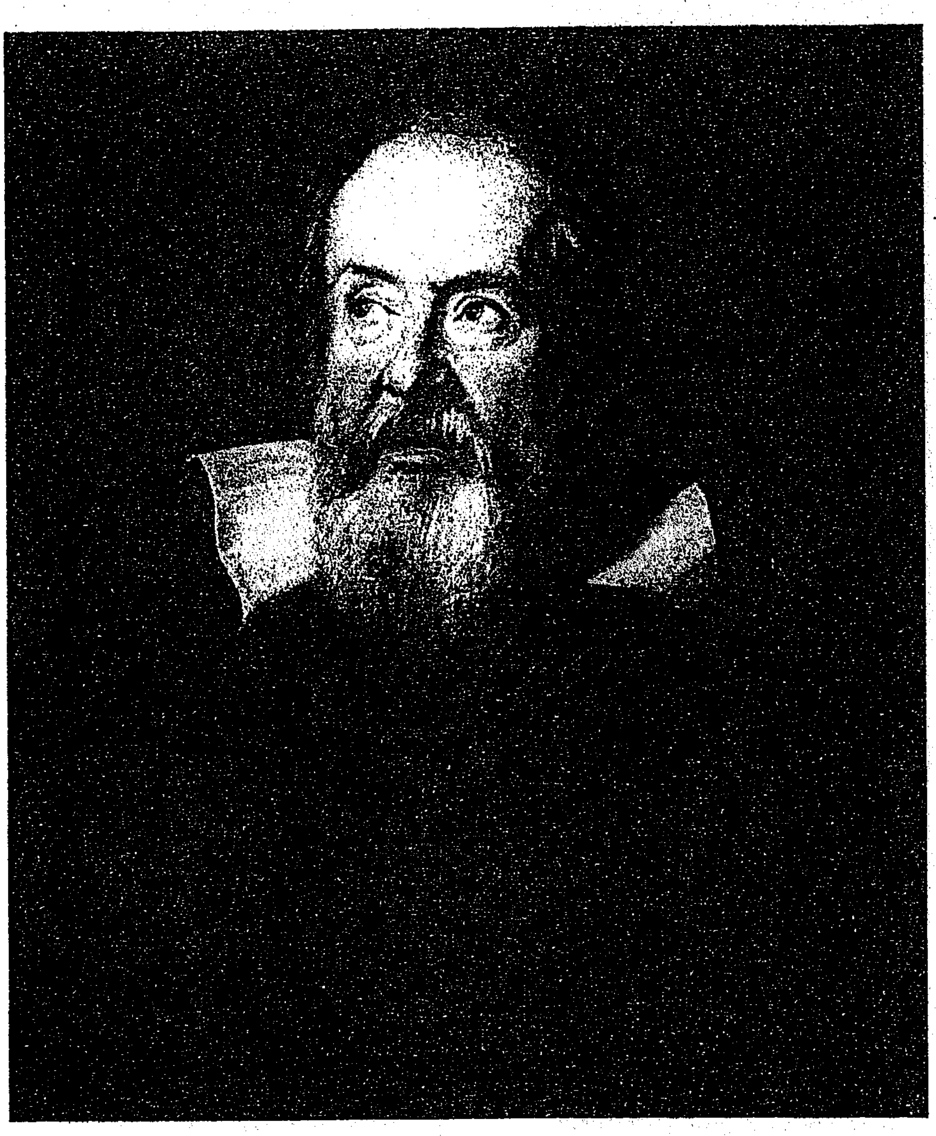
$\overline{PB'} \leq \overline{PB}$

$\overline{PC'} \leq \overline{PC}$

$$\overline{HK} = \overline{PA'} + \overline{PB'} + \overline{PC'} \leq \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$$

$$\max \overline{HK} = \min(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC})$$





Galileo Galilei

Ritratto di Giusto Sustermans (Firenze, Uffizi).

OPERE

DI

EVANGELISTA TORRICELLI

EDITE IN OCCASIONE DEL III CENTENARIO DELLA NASCITA
COL CONCORSO DEL COMUNE DI FAENZA

DA

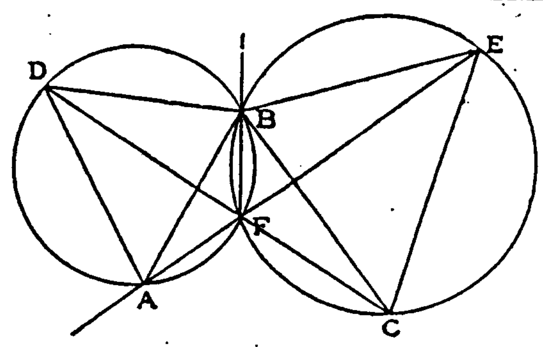
GINO LORIA E GIUSEPPE VASSURA

VOLUME I: GEOMETRIA
PUBBLICATO PER CURA DI GINO LORIA

PARTE I.
CON IL RITRATTO DI E. TORRICELLI E 373 FIGURE

FAENZA
STABILIMENTO TIPO-LITOGRAFICO G. MONTANARI
AMMINISTRATO DALL'ORFANOTROFIO MASCHI
1919.

[22] Quod promisimus ad initium, peragemus sic. Sint data [Fig. 28] tria puncta A, B, C, coniungantur ipsa puncta vel tribus, vel saltem duobus rectis lineis AB, BC, et factis triangulis aequilateris ADB, BEC, fiant circa ipsa duo circuli quorum peripheriae se mutuo secent in F. Dico iunctas AF, BF, CF tres angulos aequales inter se efficere. Anguli enim oppositi D et F quadrilateri ADBF in circulo descripti sunt aequales duobus rectis; sed angulus D est gr. 60, ergo AFB erit gr. 120. Eodem modo erit angulus BFC gr. 120, ergo et reliquus AFC erit gr. 120.



[Fig. 28].

Poterant etiam super rectis AP, BC describi segmenta

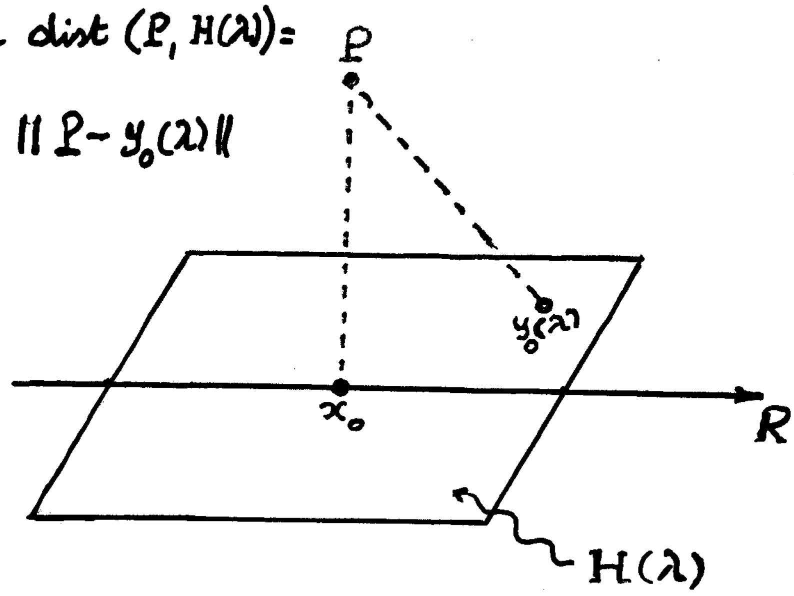
EVANGELISTÆ
TORRICELLII

DUALITÀ NEI PROBLEMI DI ESTREMO

$H(\lambda)$ FASCIO DI PIANI PASSANTI PER R

Problema dato (primale): $\min\limits_{x \in R} \| P - x \|$

Problema duale: $\max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \operatorname{dist}(P, H(\lambda)) = \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \| P - y_0(\lambda) \|$



$$\boxed{\forall x \in R,\ \forall y_0(\lambda) \quad \| P - y_0(\lambda) \| \leq \| P - x \|}$$

$$\boxed{\max_{\lambda \in \mathbb{R}} \| P - y_0(\lambda) \| = \min_{x \in R} \| P - x \|}$$

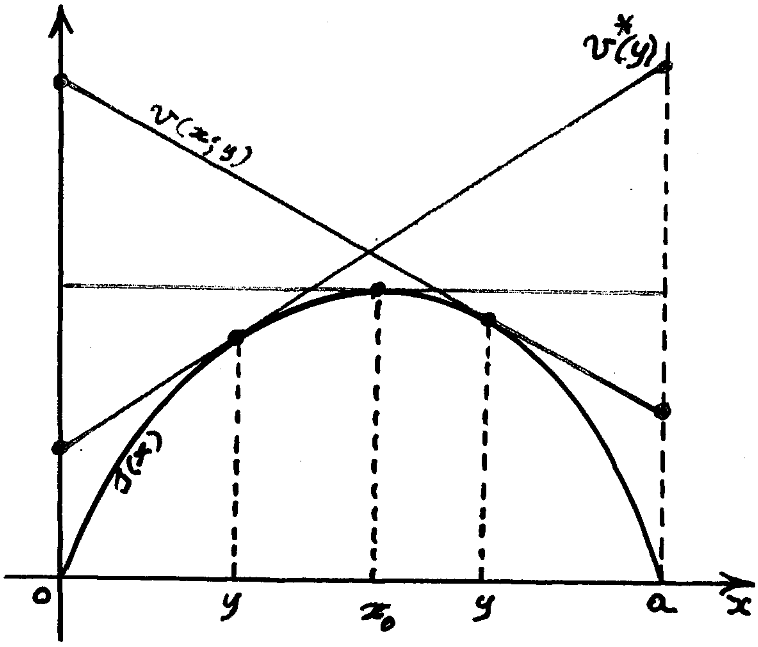
TEO. FONDAMENTALE DI DUALITÀ

J. von NEUMANN (1903-1957)

$s(x)$ = altezza del proiettile

$v(x;y) = s(y) + s'(y)(x-y)$

$v^*(y) = \max\limits_{x \in [0,a]} v(x;y)$



PRIMALE: $\max\limits_{x \in [0,a]} s(x)$

DUALE: $\min\limits_{y \in [0,a]} v^*(y)$

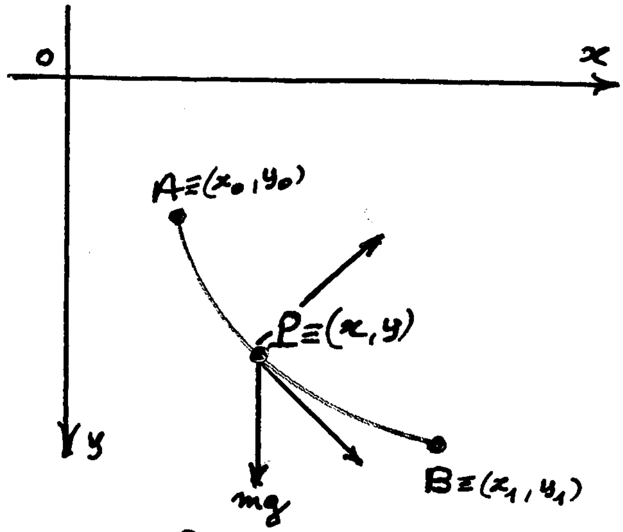
$$\boxed{\forall x \in [0,a],\ \forall y \in [0,a] \quad s(x) \leq v^*(y)}$$

$$\boxed{\max_{x \in [0,a]} s(x) = \min_{y \in [0,a]} v^*(y)}$$

CONSIDERARE UNA PARABOLA COME INVILUPPO DELLE SUE TANGENTI È UNA FORMA DUALE

BRACHISTOCRONA

Trovare la curva $\widehat{AB}$, tale che un punto P materiale, che la percorra senz'attrito, partendo da A con velocità iniziale v_0, giunga in B nel minimo tempo possibile.



Al tempo t: v = velocità di P

$E = \frac{1}{2} m v^2$ = energia cinetica di P

$\Pi = -mgy$ = " potenziale di P in un campo uniforme

$E + \Pi = \text{cost.}$ (TEO. FORZE VIVE)

Ipotesi: asse x t.c. $\frac{1}{2} v_0^2 - g y_0 = 0 \Rightarrow \text{cost.} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \text{tempo impiegato da P per } ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$\min T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}\, dx$$

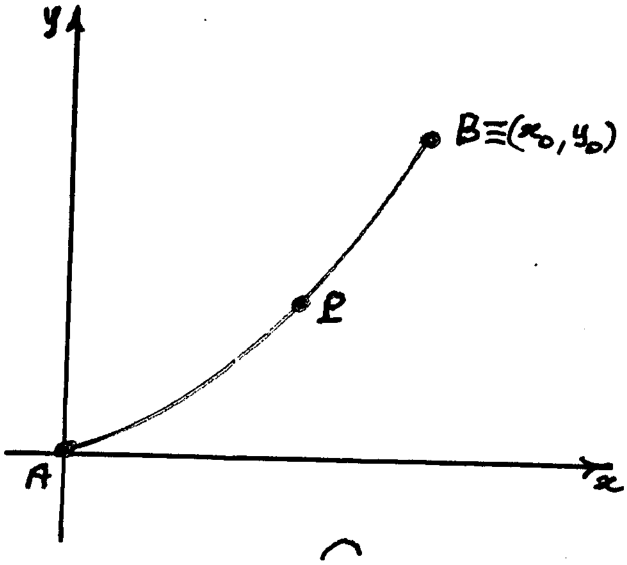
$$x = a \arccos \frac{a - y}{a} + \sqrt{2ay - y^2} \qquad \text{CICLOIDE}$$

Nel 1638 GALILEI PONE IL PROBLEMA (UTET, pp. 766-767 del Vol. II, TEORIE)
"Se in un cerchio, eretto sull'orizzonte, dal suo punto più basso si innalza un piano inclinato, il quale sottenda un arco non maggiore di un quadrante, e se dagli estremi di tale piano si conducono 2 altri piani inclinati a un qualsiasi punto dell'arco, la discesa lungo (il sistema di) questi 2 ultimi piani inclinati si compirà in minor tempo che lungo il solo primo piano inclinato, o che lungo 1 soltanto di questi 2 ultimi piani, e precisamente l'inferiore."

Nel 1696 JAKOB e JOHANN BERNOULLI DÀNNO LA SOLUZIONE

TAUTOCRONA

Sono dati i punti A e B, con B di quota maggiore di quella di A, e B non sulla verticale di A.



Trovare una curva, che congiunga B ad A, in modo tale che un punto materiale P, partendo da B con velocità iniziale nulla, la percorra senz'attrito, giungendo su A in un tempo indipendente da B.

$s = \widehat{AP}$

$s = \varphi(y)$

φ incognita

Al tempo t: $v =$ velocità di P

$E = \frac{1}{2}mv^2 =$ energia cinetica di P

$\Pi = mgy =$ " potenziale di P

$E + \Pi = \text{cost.} = mgy_0$ (TEO. FORZE VIVE)

$\Rightarrow v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0-y)}}$$ = tempo impiegato da P per $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$T = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0-y)}} = c \iff \int_0^{y_0} \frac{\varphi'(y)}{\sqrt{y_0-y}}\,dy = c\sqrt{2g}$$

EQUAZIONE INTEGRALE (LA PRIMA AD ESSERE STATA INCONTRATA)

ABEL (1802-1829)

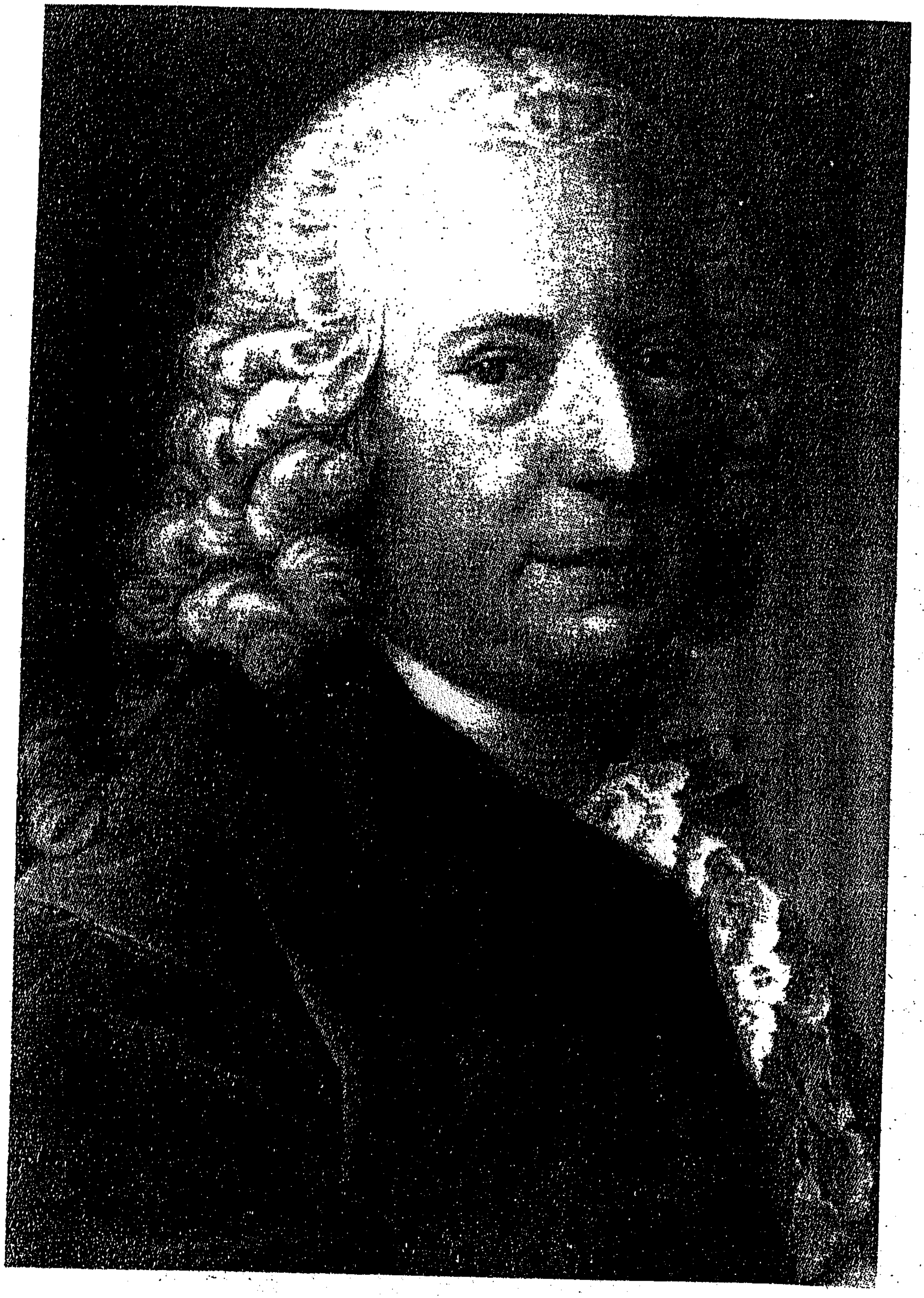
$$\begin{cases} x = \frac{k}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

CICLOIDE

PENDOLO CICLOIDALE ISOCRONO

$k = 2g\frac{c^2}{\pi^2}$ $\qquad \theta = 0 \leftrightarrow A$

Johann Bernoulli (1667–1748)



DANIEL BERNOULLI (1700 - 1782)

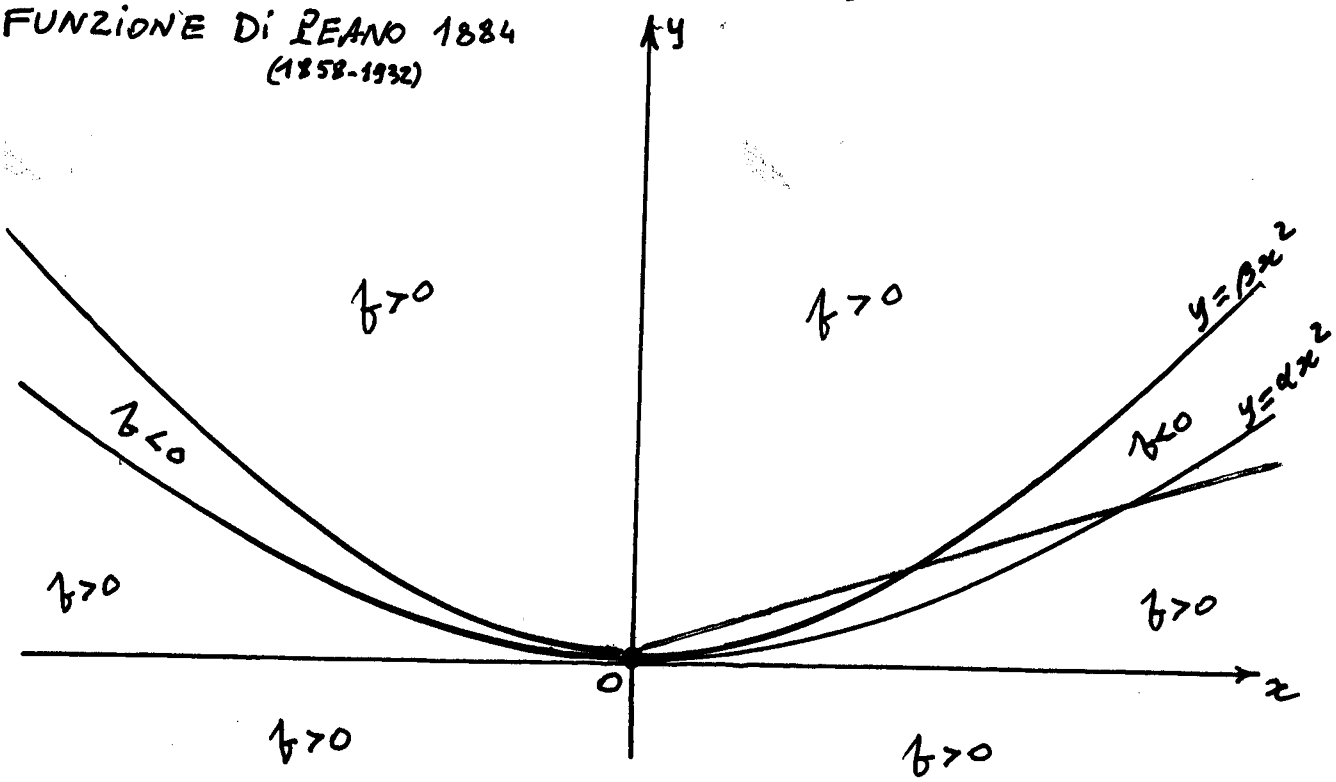
FIGLIO DI JOHANN

Jakob Bernoulli (1654–1705)

GIUSEPPE LUIGI LAGRANGE
(1736 – 1813)

ERRORE DI LAGRANGE.

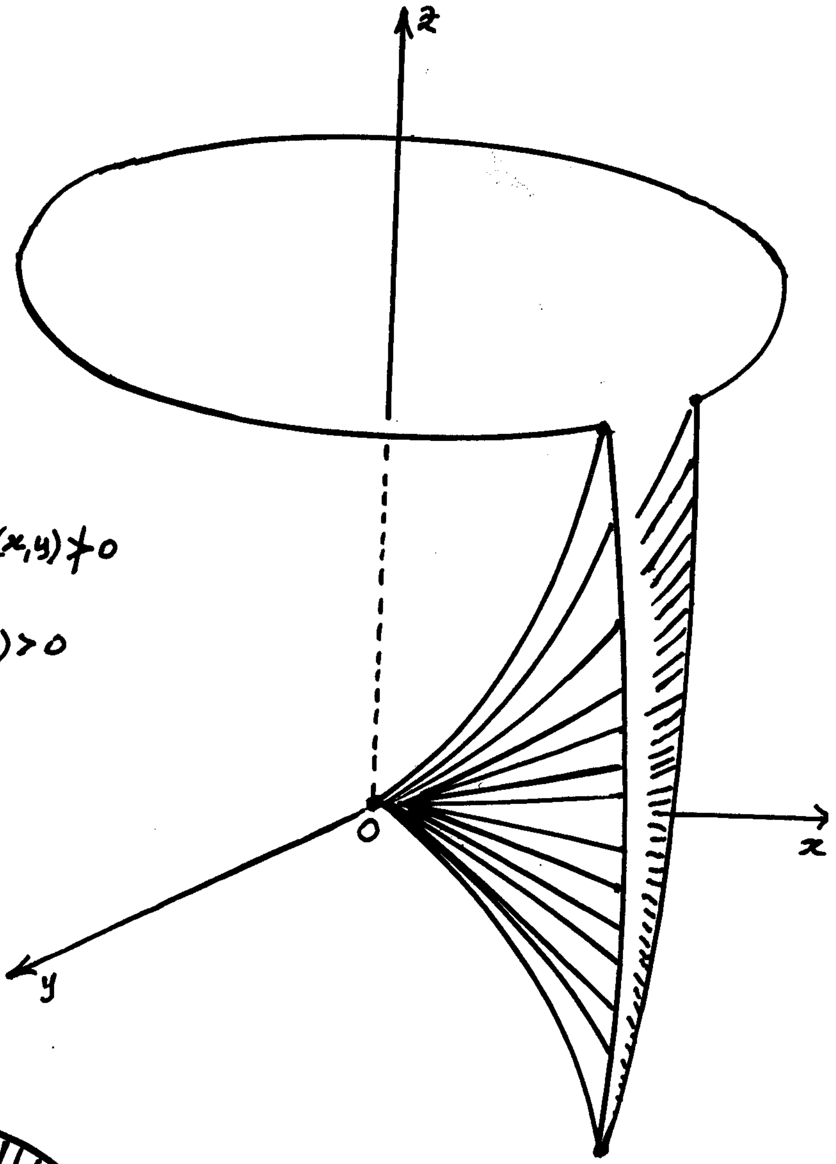
FUNZIONE DI PEANO 1884
(1858-1932)



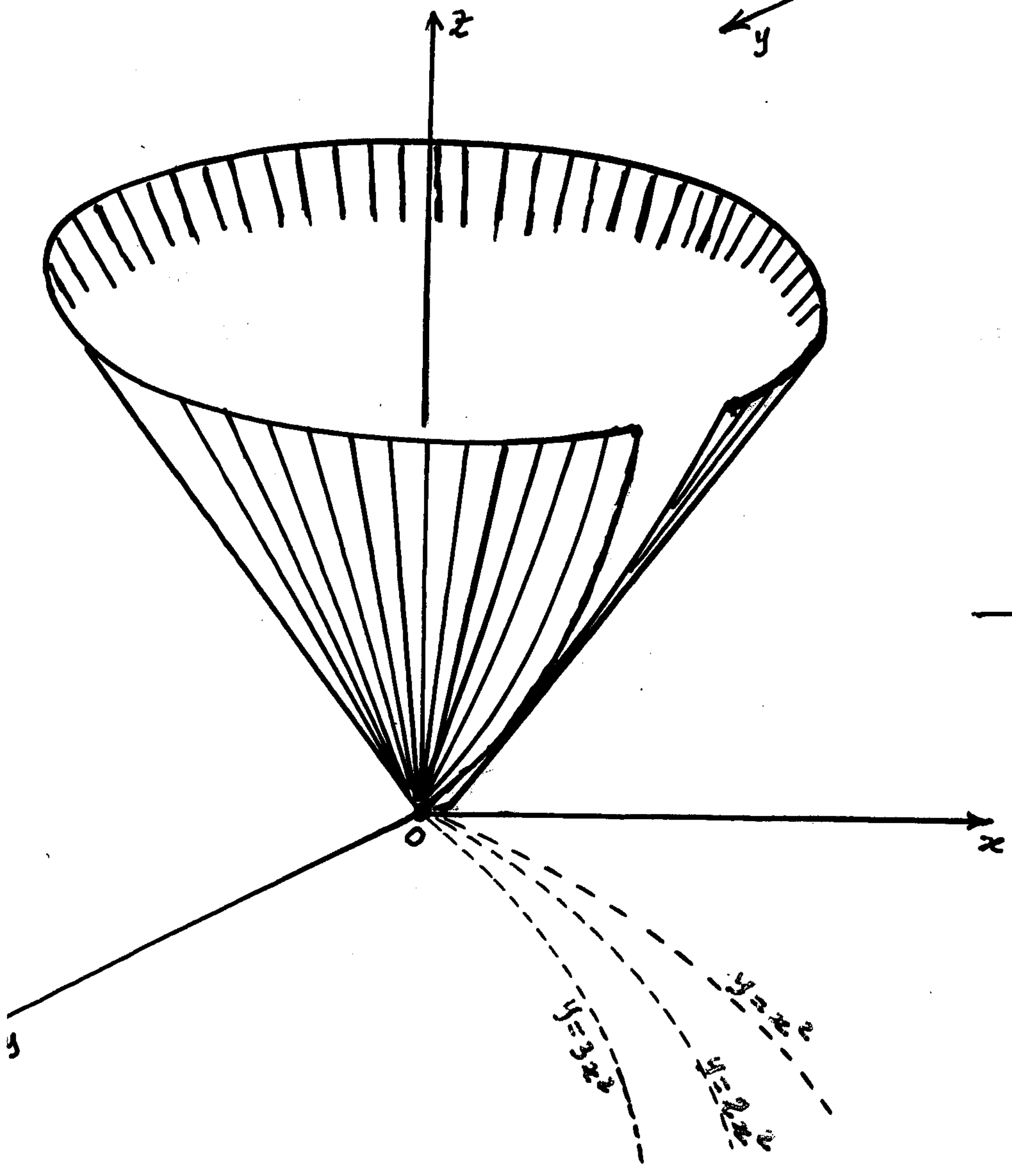
$$f(x,y) = (y-\alpha x^2)(y-\beta x^2) \qquad 0<\alpha<\beta$$

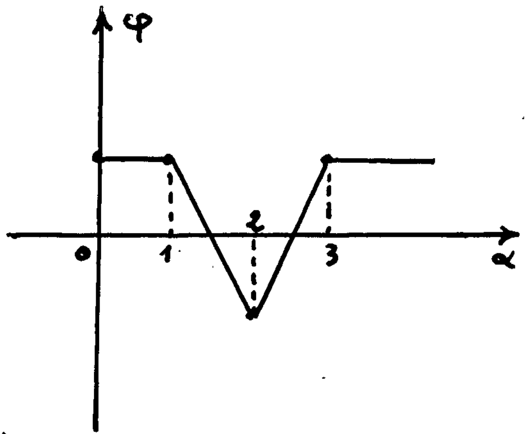
QUALUNQUE MATEMATICO PUÒ FARE
UN "TEOREMA VERO"
SOLO UN GENIO PUÒ FARE
UN ERRORE IMPORTANTE!

ESTENSIONE DELLA FUNZIONE DI PEANO



$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y)\neq 0,\ (x,y)\not>0\\ \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y)>0\\ 0\,, & \text{se } (x,y)=0\end{cases}$$

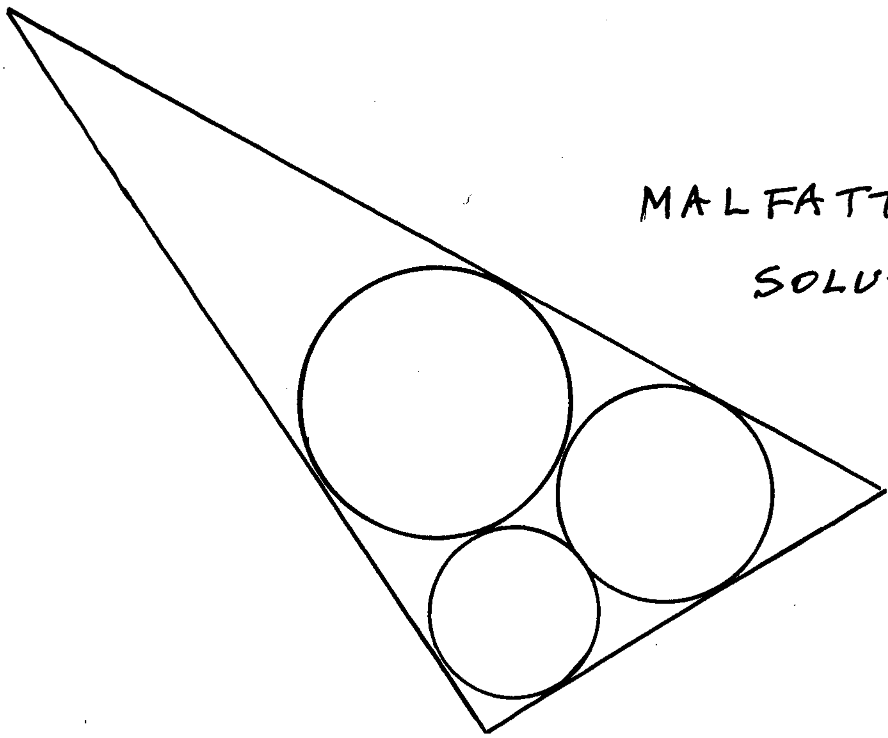




$$\varphi(\alpha)=\begin{cases}1\,, & 0<\alpha\leq 1,\ \alpha\geq 3\\ 3-2\alpha\,, & 1<\alpha\leq 3\\ 2\alpha-5\,, & 2<\alpha<3\end{cases}$$

MALFATTI PROBLEM (1803)

"GIVEN A RIGHT PRISM OF ANY RAW MATERIAL LIKE MARBLE, TO EXTRACT FROM IT 3 RIGHT-CIRCULAR CYLINDERS WITH THE SAME ALTITUDE OF THE PRISM AND HAVING AS MUCH TOTAL BIGNESS AS POSSIBLE AND HENCE WITH AS SMALL RESIDUE OF RAW MATERIAL AS POSSIBLE CORRESPONDING TO THE ACHIEVED BIGNESS"



MALFATTI SOLUTION

TWO TANGENCIES