CLASSIFICATION WITH RESPECT TO THE GIVEN SPACE

CLASSIFICATION WITH RESPECT TO THE IMAGE SPACE

FINITE DIMENSIONAL

CONSTRAINED EXTREMUM PROBLEMS IN $\mathbb{R}^n$

FINITE DIMENSIONAL

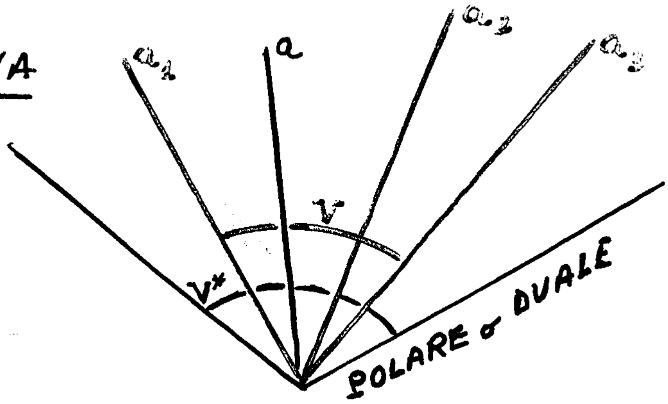
CONSTRAINED EXTREMUM PLOBLEMS OF ISOPERIMETRIC TYPE

INFINITE DIMENSIONAL

CONSTRAINED EXTREMUM PROBLEMS OF GEODESIC TYPE

INFINITE DIMENSIONAL

TEOREMI DI ALTERNATIVA



$\{S_1 \text{ VERO}\} \Leftrightarrow \{S_2 \text{ FALSO}\}$

J. FARKAS, 1902

$$\boxed{\{Ax \geq 0 \Rightarrow \langle a, x \rangle \geq 0\} \Leftrightarrow \{\exists y \geq 0 \text{ t.c. } yA = a\}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

FORMULAZIONE EQUIVALENTE:

TRA i SISTEMI

$$\begin{cases} Ax \geq 0 \\ \langle a, x \rangle < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} uA = a \\ u \geq 0 \end{cases}$$

1 ED 1 SOLO E' POSSIBILE

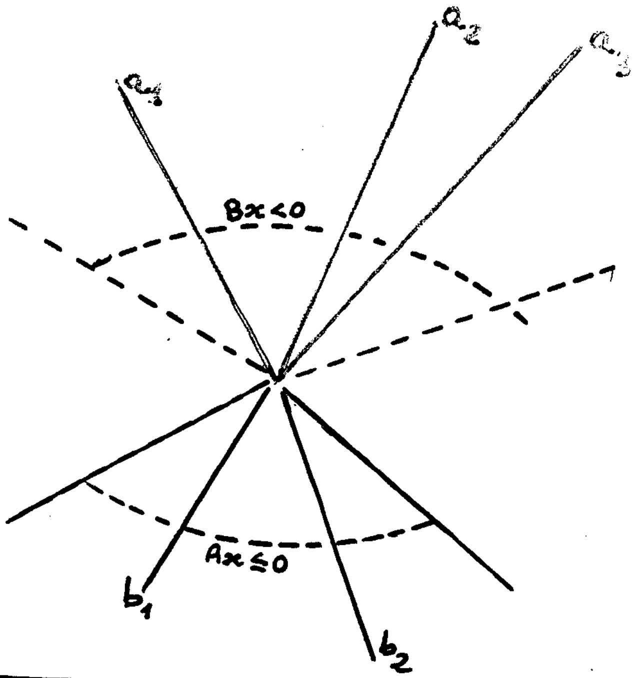
INTRODUCE UN NUOVO SPAZIO, QUELLO DELLE y, DUALE DI QUELLO DELLE x, E RIFLESSIVO: $(V^*)^* = V$

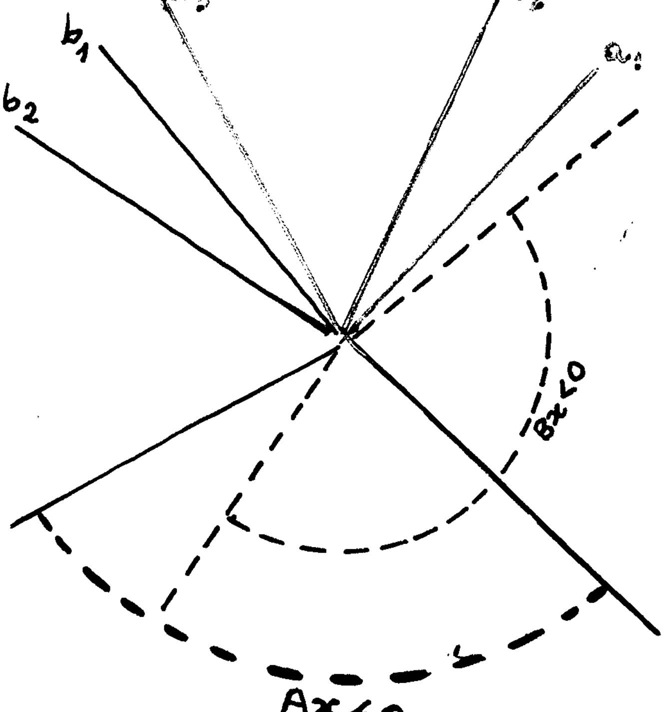
GENERIZZAZIONE:

TRA i SISTEMI:

$$\begin{cases} Ax \leq 0 \\ Bx < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} uA + vB = 0 \\ u \geq 0 \quad v \geq 0 \quad v \neq 0 \end{cases}$$

1 ED 1 SOLO E' POSSIBILE





PROBLEMI AI LIMITI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE LINEARI

COND. NEC. E SUFF. AFFINCHE' ESSA, CONGIUNTA CON LE CONDIZ. AI LIMITI, AMMETTA UNA SOLUZIONE (CHE RISULTA UNICA), E' CHE IL CORRISPONDENTE PROBLEMA OMOGENEO ABBIA SOLO LA SOLUZIONE BANALE.

TRICOMI, EQ. DIFFERENZIALI, p. 126

I MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) = 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$L(x;\lambda) = f(x) - \langle \lambda, g(x) \rangle = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(x)$$

f e g derivabili

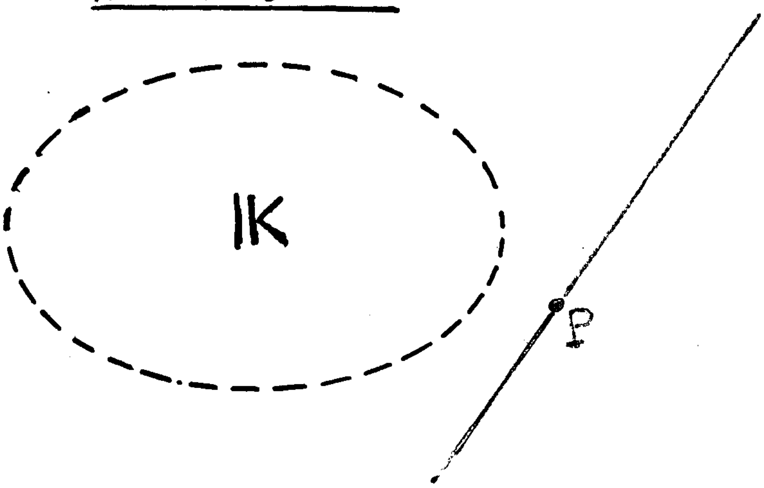
$$\begin{cases} L'_x = f'(x) - \lambda g'(x) = 0 \\ L'_\lambda = -g(x) = 0 \end{cases}$$

TEO. DI LAGRANGE

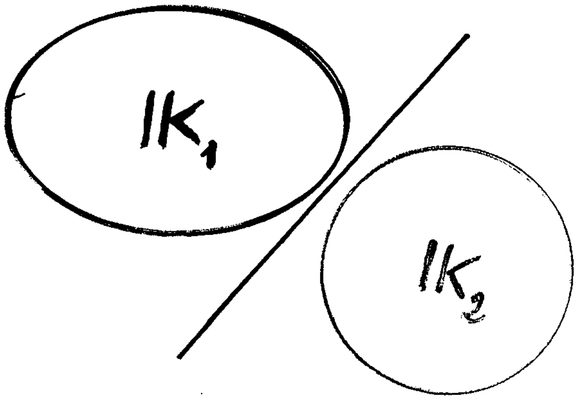
TEO. DEL DINI (FUNZ. IMPLICITA)

TEO. DI LIUSTERNIK

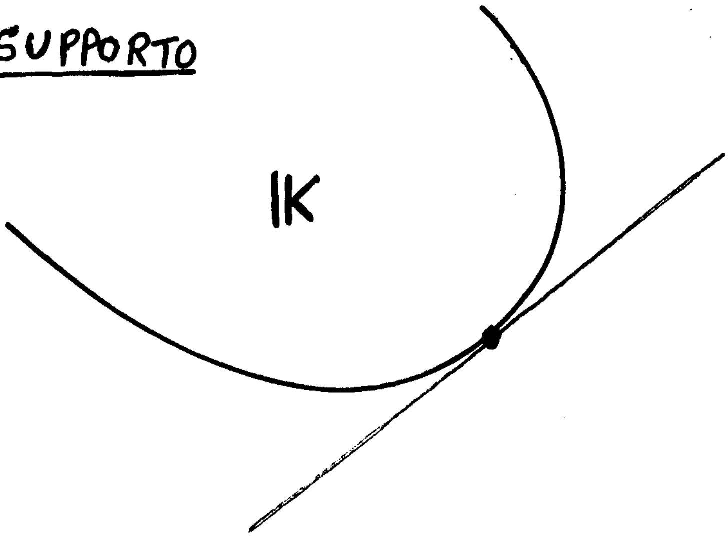
HAHN-BANACH



SEPARAZIONE



SUPPORTO

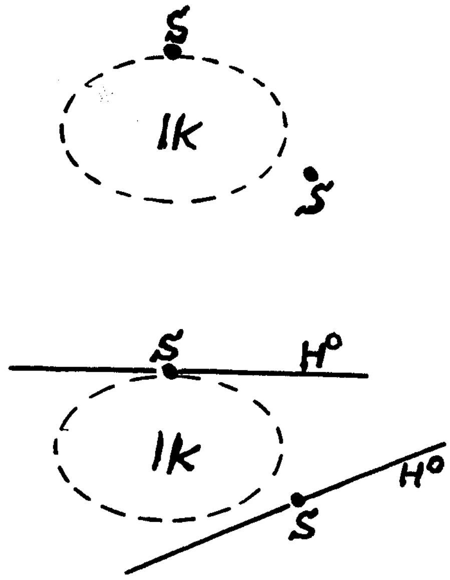


3 DIFFERENTI LINGUAGGI PER ESPRIMERE LO STESSO CONCETTO

TUTTI E 3 UTILI!

TEOREMI DI SEPARAZIONE

H. HAHN, 1927 – S. BANACH, 1925



Ip. X spazio lineare reale; $M \subseteq X$, $M \neq X$

$p : X \to \mathbb{R}$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$

$p(\alpha x) = \alpha\, p(x)$, $\forall \alpha \geq 0$, $\forall x \in X$

$f : M \to \mathbb{R}$ lineare, $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in M$

T. $\exists\, g : X \to \mathbb{R}$ lineare, tale che:

$g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$

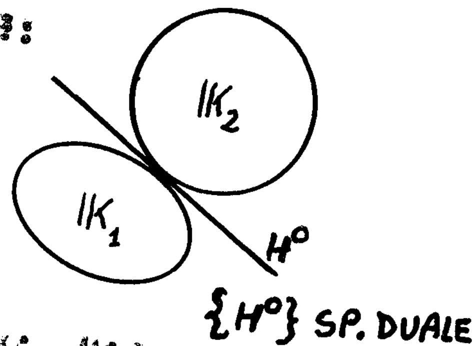
g è detta estensione lineare di f.

Ip. $\mathbb{K}, S \subset X$, $\mathbb{K}$ relativamente aperto e convesso

S affine $\quad \mathbb{K} \cap S = \emptyset \quad \mathbb{K}, S \neq \emptyset$

T. $\exists\, H^0 \subset X$ H^0 iperpiano, tale che:

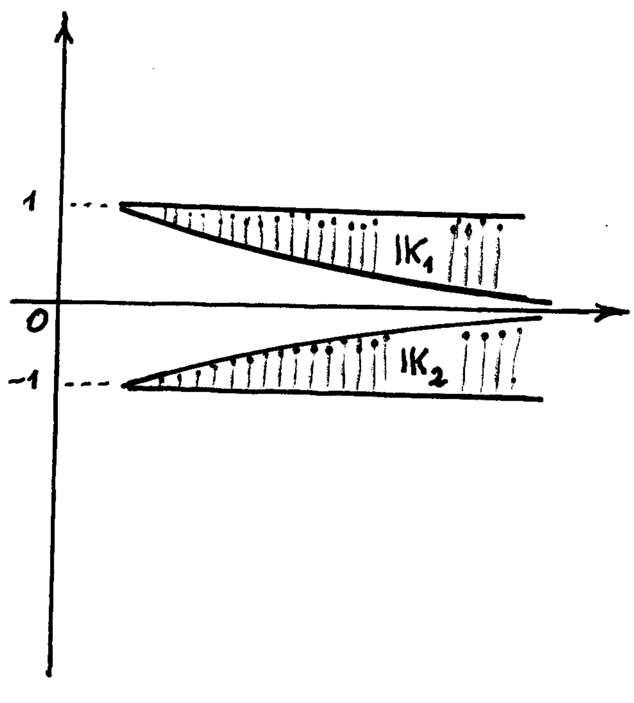
$$S \subseteq H^0 \qquad \mathbb{K} \cap H^0 = \emptyset$$

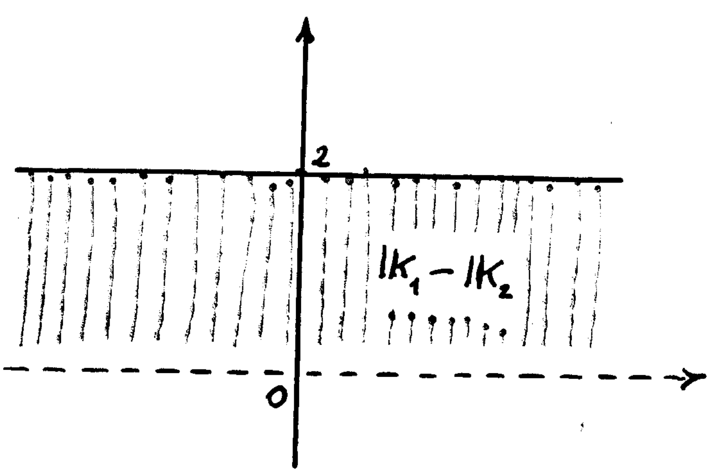


Ip. $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ non vuoti, convessi

T. $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ sono separabili $\Leftrightarrow$ $0 \notin \operatorname{int}(\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2)$

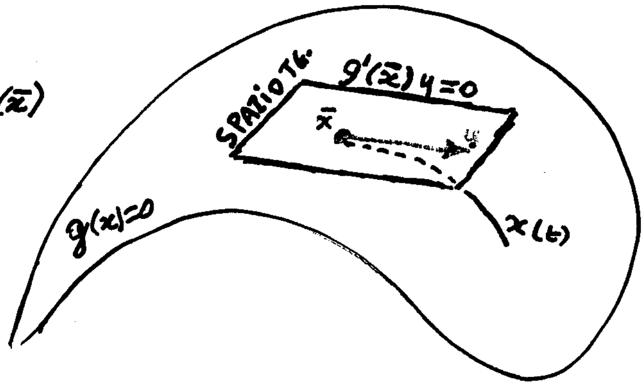
Se, inoltre, $\operatorname{int}(\mathbb{K}_1 - \mathbb{K}_2) \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ separazione propria





P: $\min f(x)$, $x \in R := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ DIFFERENZ.

(Ip.) $g'(\bar{x})$ HA RANGO MASSIMO ED ELEMENTI CONTINUI IN $N(\bar{x})$



(T.) (i) $\forall y \in \mathbb{R}^n$, TALE CHE

(*) $g'(\bar{x})\,y = 0$,

$\exists\, x(t) \subseteq R$, $t \in [0,1]$, $x(0) = \bar{x}$, DIFFERENZIABILE, TALE CHE y È TANGENTE AD $x(t)$ IN $\bar{x}$, CIOÈ: $\exists\, \alpha > 0$ TALE CHE $x'(0) = \alpha y$.

(ii) $\forall x(t) \subseteq R$, $t \in [0,1]$, $x(0) = \bar{x}$, DIFFERENZIABILE, SI HA CHE $y := x'(0)$ SODDISFA LA (*)

LA DIM. È BASATA SUL TEO. DINI FUNZ. IMPLICITA (LIUSTERNIK)

(iii) $\bar{x}$ È PUNTO STAZIONARIO, SSE $\exists\, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ TALE CHE:

$$f'(\bar{x}) - \bar{\lambda}\, g'(\bar{x}) = 0$$

G.L. LAGRANGE, 1761

NELL'IPOTESI PRECEDENTE, CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÈ $\bar{x}$ SIA PUNTO DI MINIMO È CHE ESISTA $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, TALE CHE $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ SIA SOLUZIONE DEL SISTEMA:

(∇) $\quad f'(x) - \lambda g'(x) = 0 \qquad g(x) = 0$

E TALE CHE, PER OGNI y CHE SODDISFA (*), RISULTI:

(**) $\quad \left\langle y, \left[f''(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i\, g_i''(\bar{x})\right] y \right\rangle \geq 0.$ $\qquad$ OCCORRE DOPPIA DIFFERENZ.

ESEMPIO $n=2,\ m=1,\ f(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\ ,\ g(x)=x_2^{\,2}-(x_1-1)^3$

$$g'(x)=\left(-3(x_1-1)^2\ ,\ \ 2x_2\right)$$

$$\bar{x}=(1,0)\qquad g'(\bar{x})=(0,0)$$

TEO. LAGRANGE NON APPLICABILE

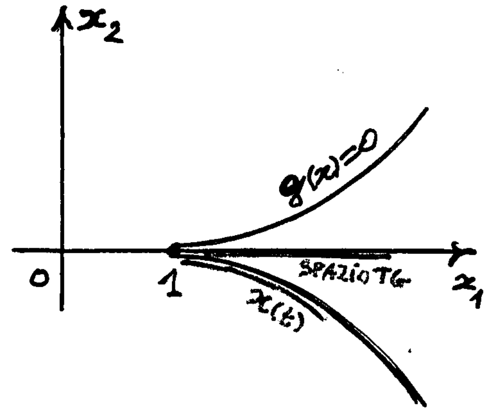


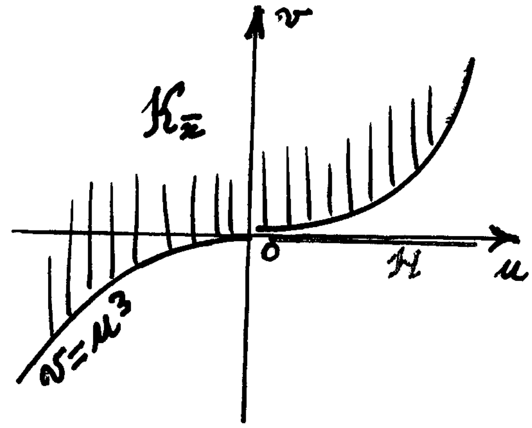
IMMAGINE: PER $\bar{x}=(1,0) \leftrightarrow (\bar{u}=0,\bar{v}=0)$

$$\mathcal{K}_{\bar{x}}:\begin{cases} u = 1-\sqrt{x_1^2+x_2^2} \\ v = x_2^2-(x_1-1)^2 \end{cases}$$

PONGO:

$$\boxed{\begin{matrix} c\geq 0 \quad x_1^2+x_2^2=c^2 \\ -c\leq x_1\leq c \end{matrix}}$$

$$\mathcal{K}_{\bar{x}}:\begin{cases} u = 1-c \\ v = -x_1^3+2x_1^2-3x_1+c^2+1 \end{cases}$$



$\mathcal{H}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u>0,\ v=0\}$

INFATTI, $\forall c$, u È COSTANTE E v RAGGIUNGE IL MIN. PER $x_1=c$, IN QUANTO v È DECRESCENTE IN x_1. TALE MIN. SI HA PER

$$v(c)=-(c-1)^3$$

ALLORA DA

$$\begin{cases} u=1-c \\ v=-(c-1)^3 \end{cases}$$

SI OTTIENE

$$v=u^3$$

ESEMPIO $n=4,\ m=2$

$$f(x)=x_1+x_2 \qquad g_1(x)=x_1^3-x_2-x_3^2$$
$$\bar{x}=(0,0,0,0) \qquad g_2(x)=\qquad x_2 \qquad -x_4^2$$

$$g'(x)=\begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 & -2x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2x_4 \end{pmatrix} \quad g'(\bar{x})=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

TEO. LAGRANGE NON APPLICABILE

IMMAGINE PER $\bar{x}$

$$\begin{cases} u=-x_1-x_2 \\ v_1=x_1^3-x_2-x_3^2 \\ v_2=\qquad x_2 \qquad -x_4^2 \end{cases}$$

LA REGIONE AMMISSIBILE SI CORRISPONDE BIUNIVOCAMENTE CON UNA IN $\mathbb{R}^2$

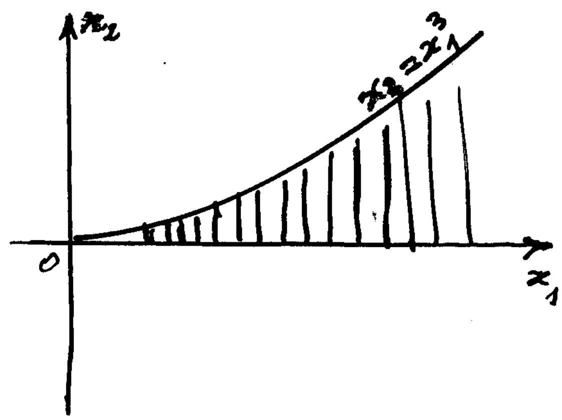


IMMAGINE PER $\bar{x}=(0,0,0,0)$

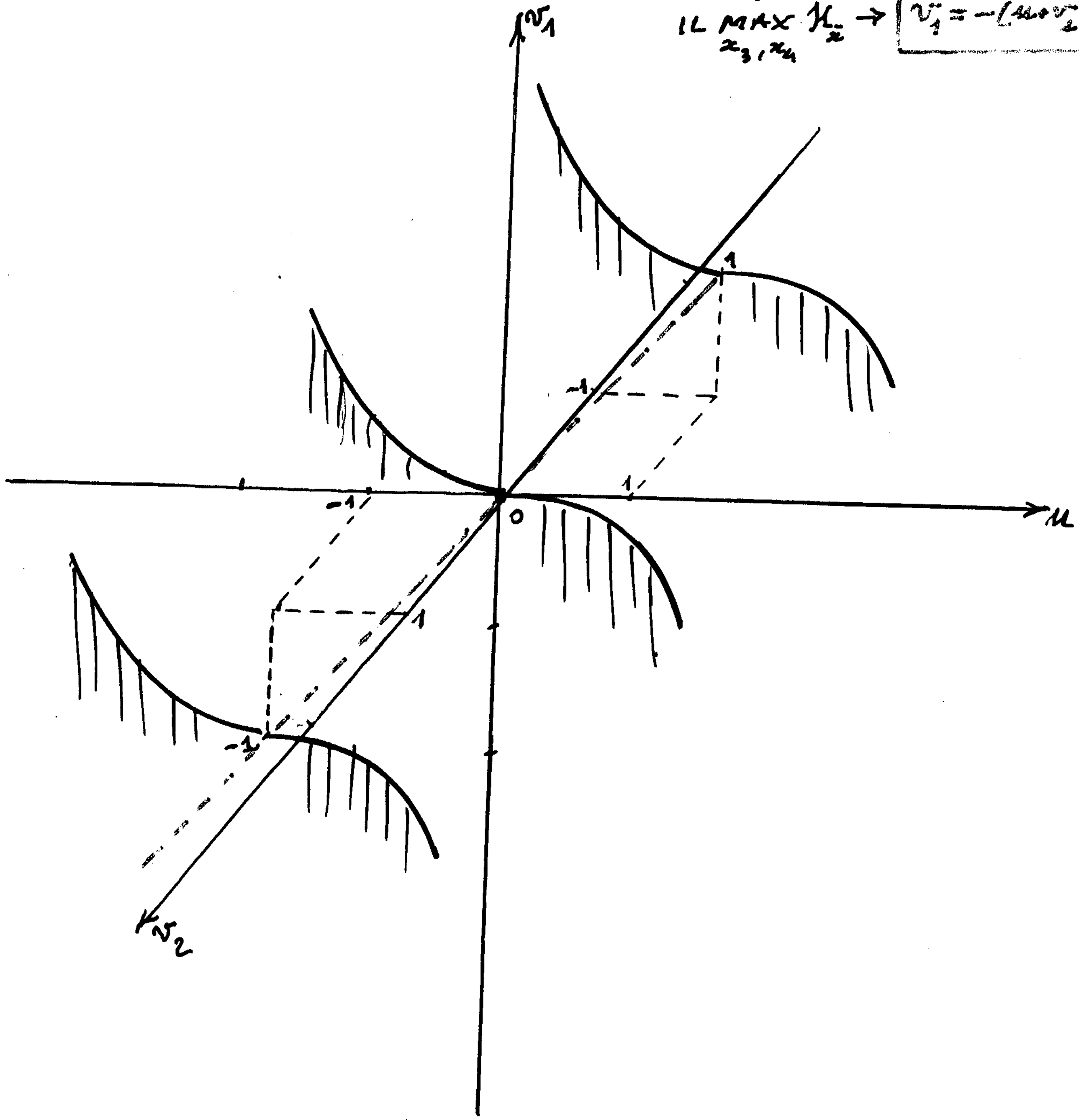
$$\mathcal{K}_{\bar{x}}\begin{cases} u=-x_1-x_2 \\ v_1=x_1^3-x_2-x_3^2 \\ v_2=x_2-x_4^2 \end{cases}$$

RICAVANDO x_1 ED x_2 SI TROVA:

$$\mathcal{K}_{\bar{x}}:\ v_1=-(u+v_2+x_4^2)^3-v_2-(x_3^2+x_4^2)$$

ESSENDO:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3^2}=-1 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_4^2}=-3(u+v_2+x_4^2)^2<0 \end{cases}$$

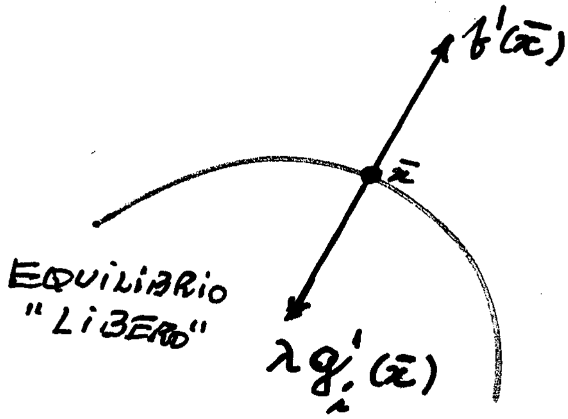
$$\text{IL}\ \max_{x_3,x_4}\mathcal{K}_{\bar{x}}\rightarrow\boxed{v_1=-(u+v_2)^3-v_2}$$



f = POTENZIALE, CHE GENERA LA FORZA f'

$$L(x;\lambda) = f(x) - \langle \lambda, g(x) \rangle$$

$$L'_x(x;\lambda) = 0$$



PERTURBAZIONE:

$$f^{\downarrow}(\xi) = \min f(x), \quad x \in R(\xi) := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = \xi\} \qquad \xi \in \mathbb{R}^m$$

LA 1ª CONDIZIONE DI LAGRANGE DIVIENE:

$$f'(x) - \lambda g'(x) = 0 \qquad g(x) = \xi$$

SOLUZIONE: $(\bar{x}(\xi), \bar{\lambda}(\xi))$

Ip. IPOTESI COME PER IL TEO. DI LAGRANGE.
INOLTRE LA MATRICE JACOBIANA DEL SISTEMA

$$\begin{cases} f'(x) - g'(x)^T \lambda = 0 \\ g(x) - \xi = 0 \end{cases}$$

ABBIA I SUOI ELEMENTI CONTINUI ED UN MINORE NON NULLO NELLE PRIMA $n+m$ RIGHE E COLONNE.

T. $$\nabla f^{\downarrow}(\xi) = \bar{\lambda}(\xi)$$

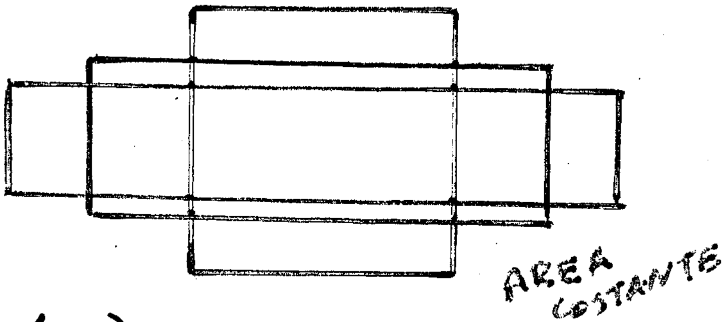
ESEMPIO

$$f^*(\xi) = \min f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad g(x;\xi) = \prod_{j=1}^{n} x_j - \xi = 0 \quad (x_j \geq 0,\ \xi > 0)$$

LA 1ª CONDIZ. DI LAGRANGE (SI TRASCURANO $x_j > 0$):

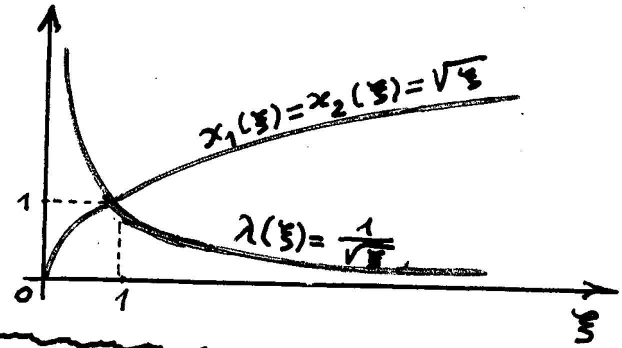
$$\begin{cases} 1 - \lambda \prod_{j \neq i}^{j=1,\dots,n} x_j = 0,\ i = 1,\dots,n \\ \prod_{j=1}^{n} x_j = \xi \end{cases}$$

$n=2$



PUNTO STAZIONARIO:

$$\left(x_i(\xi) = \sqrt[n]{\xi},\ i = 1,\dots,n\ ;\ \lambda = \frac{1}{\sqrt[n]{\xi^{n-1}}} \right) \text{ IPERCUBO}$$



2ª CONDIZ. DI LAGRANGE:

LA (*) DIVIENE:

$$\sqrt[n]{\xi^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} y_j = 0$$

EQUIV. A:

$$(\square) \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 0$$

LA (**) DIVIENE:

$$-\frac{1}{\sqrt[n]{\xi}} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)^2 - \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right] \geq 0$$

ED E' VERIFICATA <u>STRETTAMENTE</u> DALLE y CHE SODDISFANO LA ($\square$). QUINDI $x(\xi)$ E' p. minimo <u>ISOLATO</u> E <u>GLOBALE</u>, ESSENDO LA CONDIZ. LAGRANGE NECESSARIA. ESSENDO $x(\xi) > 0$, SI E' RISOLTO IL PROBLEMA ANCHE RISPETTO AI VINCOLI $x_1 > 0 \ \dots\ x_n > 0$

$$L''_{xx}(x;\lambda) = -\lambda\xi \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x_1 x_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 x_n} \\ \frac{1}{x_2 x_1} & 0 & \cdots & \frac{1}{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n x_1} & \frac{1}{x_n x_2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$L''_{xx}(x(\xi);\lambda(\xi)) = -\frac{1}{\sqrt[n]{\xi}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

MEDIE ARMONICA, GEOMETRICA, ARITMETICA

$$A = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}} \qquad G = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j} \qquad M = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n} \qquad a_1, \dots, a_n > 0$$

$$\boxed{A \leq G \leq M, \; \forall a_1 \dots a_n > 0}$$

L' = VALE, SSE $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

DIM. $\hat{x} = \left(\frac{a_1}{G}, \dots, \frac{a_n}{G}\right)$ SODDISFA IL VINCOLO ISOPERIMETRICO PER $\xi = 1$,

POICHÈ $\prod_{j=1}^{n} \frac{a_j}{G} = \frac{\prod_{j=1}^{n} a_j}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j}} = 1$. QUINDI:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{G} = f(\hat{x}) \geq \min_{g(x;1)=0} f(x) = n.$$

SEGUE LA 2ª DISUGUAGLIANZA.

NEL PROBLEMA ISOPERIMETRICO SI RIMPIAZZA

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad \text{CON} \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}.$$

CON LO STESSO METODO, SI TROVA ORA LA SOLUZIONE:

$$x(\xi) = \left(\sqrt[n]{\xi}, \dots, \sqrt[n]{\xi}\right) \qquad \lambda(\xi) = \frac{1}{\sqrt[n]{\xi^{n+1}}}$$

IL PRECEDENTE $\hat{x}$ CONTINUA, OVVIAMENTE, A SODDISFARE IL VINCOLO PER $\xi = 1$. QUINDI:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\frac{a_j}{G}} = f(\hat{x}) \geq \min_{g(x;1)=0} f(x) = n,$$

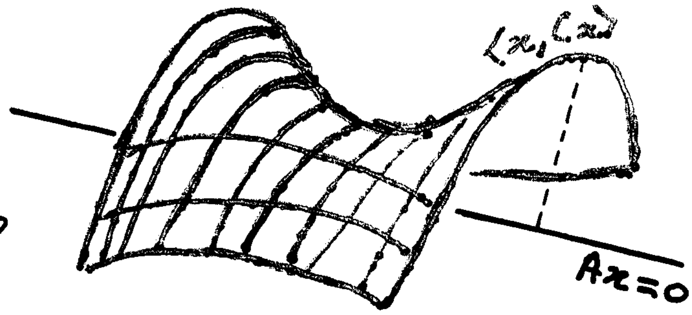
COSICCHÈ $$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\frac{a_j}{G}} \geq n, \quad \text{CIOÈ} \quad G \geq \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}},$$

CHE È LA 1ª DISUGUAGLIANZA.

RESTRIZIONE FORMA QUADRATICA

$\phi(x) = \langle x, Cx \rangle\big|_{Ax=0}$ $\quad C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SIMMETRICA, NON NESSARIAMENTE DEFINITA
$\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

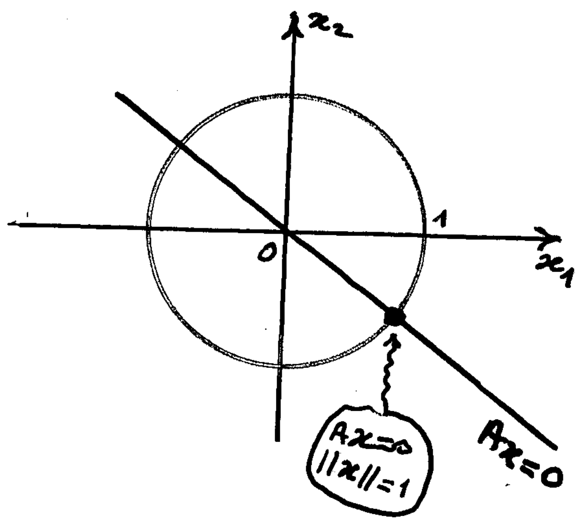
LA RESTRIZIONE È (STRETTAMENTE) CONVESSA, SSE IL MINIMO (CHE $\exists$)



P: $\min \langle x, Cx \rangle, \; -2Ax = 0, \; \langle x, x \rangle - 1 = 0$

È ≥ 0 (OPPURE > 0).

$\phi(x) \geq 0$ (opp. > 0) $\Rightarrow$ min in P ≥ 0 (opp. > 0)



SE IL min IN P È ≥ 0 (opp. > 0),
E SE $\hat{x}$ È UN P. DI MINIMO, ALLORA:

$$\phi(x) = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, C\frac{x}{\|x\|} \right\rangle\bigg|_{Ax=0} \cdot \|x\|^2 \geq$$

$$\geq \langle \hat{x}, C\hat{x} \rangle \cdot \|x\|^2 \geq 0 \quad (\text{opp.} > 0).$$

LA 1ª PARTE DEL TEOREMA DI LAGRANGE DIVIENE:

$$x^T C + \lambda A - \mu x^T = 0 \qquad Ax = 0 \qquad \langle x, x \rangle - 1 = 0 \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

POSTMOLTIPLICANDO LA 1ª PER x, SI TROVA $\boxed{\mu = \langle x, Cx \rangle}$

NON È RESTRITTIVO SUPPORRE $x \neq 0$.

ESSENDO ORA $\langle x, x \rangle - 1 = 0$ SUPERFLUO, IL SISTEMA DIVIENE:

$$(\sim) \quad \begin{pmatrix} C - \mu I_n & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(P. STAZIONARI)}$$

OVE μ È CONSIDERATO PARAMETRO.

./.

·/·

POICHÈ IL MIN. $\exists$ E LA COND. DI LAGRANGE È NECESSARIA, $(\sim)$ DEVE AVERE SOLUZIONI (PER QUALCHE VALORE DI μ) E, TRA QUESTE SI DEVE TROVARE UN P. DI MIN. DEL PROBLEMA P.

CIÒ ACCADE, SSE μ È RADICE REALE DELL'EQUAZIONE:

$$(\approx) \qquad \det M(\mu) = 0$$

DOVE $M(\mu)$ È LA MATRICE DI $(\sim)$.

SIANO $(x(\mu), \lambda(\mu))$ LE SOLUZIONI DI $(\sim)$ CORRISPONDENTI ALLE RADICI REALI DI $(\approx)$.

SIAMO QUINDI RICONDOTTI A CERCARE LE RADICI REALI DI $(\approx)$ DI MINIMO VALORE. CIÒ POICHÈ $\mu = \langle x, Cx \rangle$.

LA RESTRIZIONE È (STRETTAMENTE) CONVESSA, SSE IL VALORE MINIMO DELLE RADICI REALI DELL'EQUAZIONE $(\approx)$ È $(>0)\ \geq 0$.

TALE CONDIZIONE PUÒ ESSERE ESPRESSA IN TERMINI DEI MINORI PRINCIPALI DELLA MATRICE

$$M(0) = \begin{pmatrix} C & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

E COINCIDE CON LA CLASSICA COND. DI CONVESSITÀ DI UNA FORMA QUADRATICA, QUANDO $m = 0$.

SEMPRE PER $m = 0$, P È EQUIVALENTE A:

$$\min.\ Q(x) =: \frac{\langle x, Cx \rangle}{\langle x, x \rangle} \qquad \text{(RAYLEIGH)}$$

SE x È AUTOVETTORE DI C, $Q(x)$ UGUAGLIA IL CORRISPONDENTE AUTOVALORE, CHE, PER QUATO PRECEDE, UGUAGLIA IL MOLTIPLICATORE μ. SEGUE:

IL MINIMO DEL QUOZIENTE DI RAYLEIGH UGUAGLIA IL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE ASSOCIATO AL PROBLEMA P.

PRINCIPIO DI SNELL (1591-1626) - FERMAT (1601-1665)

La luce impiega il minimo tempo possibile per propagarsi da un punto A ad un punto B qualsiasi (1621, Snell)

CONSEGUENZA:

Legge di propagazione rettilinea in un mezzo otticamente omogeneo

$\boxed{\min T(x)}$

dove

$$T(x) = \frac{\overline{AP}}{v_1} + \frac{\overline{PB}}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2+k^2}}{v_2}$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{a-x}{v_2\sqrt{(a-x)^2+k^2}}$$

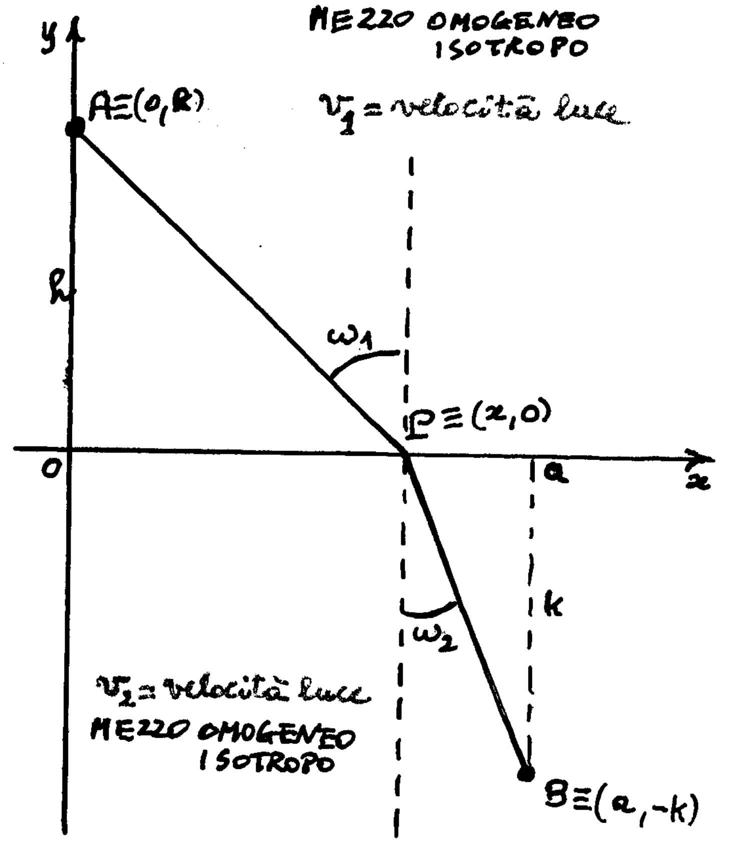
$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{sen}\omega_2} = \frac{v_1}{v_2} = \text{cost.}$$

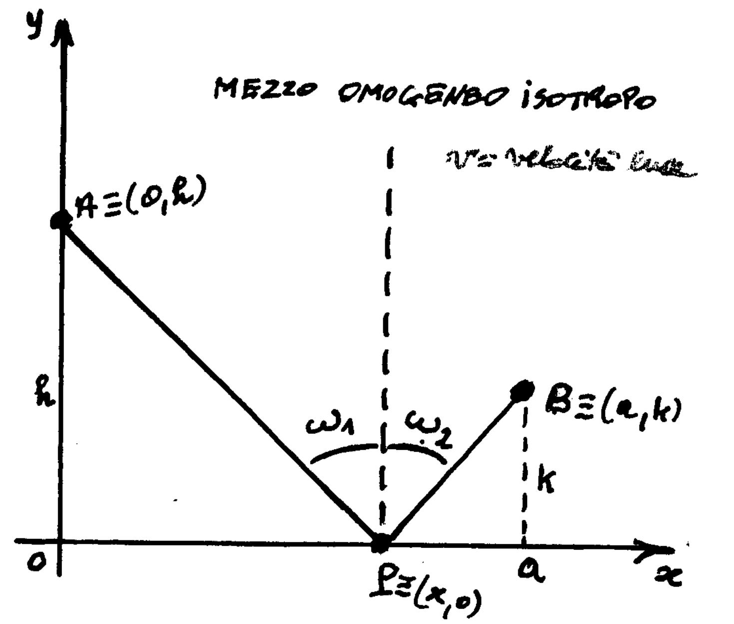
LEGGE DEI SENI

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{h^2}{v_1(x^2+h^2)^{3/2}} + \frac{k^2}{v_2[(a-x)^2+k^2]^{3/2}} > 0$$

$v_1 \neq v_2$ RIFRAZIONE

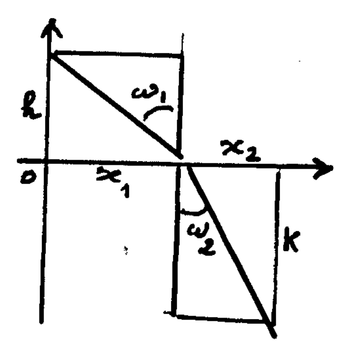
$v_1 = v_2 = v$ RIFLESSIONE
$\omega_1 = \omega_2$





$x \to x_1 \quad a-x \to x_2 \qquad \min\left(\frac{\sqrt{x_1^2+h^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{x_2^2+k^2}}{v_2}\right) \qquad x_1+x_2 = a$

COND. DI LAGRANGE: $\frac{x_1}{v_1\sqrt{x_1^2+h^2}} - \lambda = 0, \quad \frac{x_2}{v_2\sqrt{x_2^2+k^2}} - \lambda = 0$

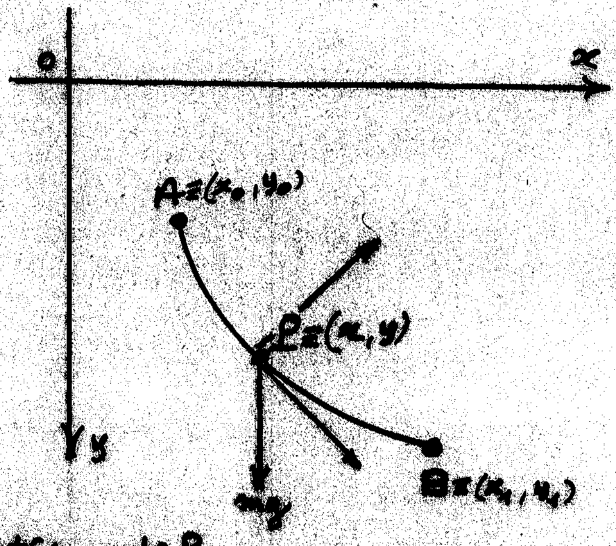


IL MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE È LA DERIVATA DEL MINIMO TEMPO, VISTO COME FUNZIONE DI a.

$$\boxed{\lambda = \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\omega_2}{v_2}}$$

BRACHISTOCRONA

Trovare la curva $\overset{\frown}{AB}$,
tale che un punto P materiale,
che la percorra senz'attrito,
partendo da A con velocità
iniziale v_0, giunga in B
nel minimo tempo possibile.



Al tempo t: v = velocità di P

$E = \frac{1}{2} m v^2$ = energia cinetica di P

$\Pi = -mgy$ = " potenziale di P in un campo uniforme

$E + \Pi = \text{cost.}$ (TEO. FORZE VIVE)

Ipotesi: asse x t.c. $\frac{1}{2} v_0^2 - g y_0 = 0 \Rightarrow \text{cost.} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \text{tempo impiegato da } P \text{ per } ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

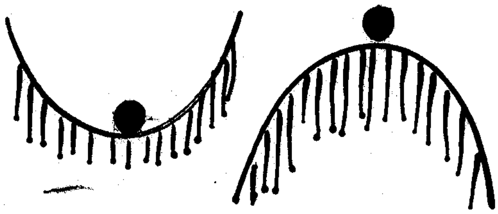
$$\min \ T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$$

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} + \sqrt{2ay - y^2} \qquad \text{CICLOIDE}$$

NEL 1638 GALILEI PONE IL PROBLEMA (UTET, pp. 766-767 del Vol. II, Teoremi)
"Se in un cerchio, eretto sull'orizzonte, dal suo punto più basso si innalza un piano inclinato, il quale sottenda un arco non maggiore di un quadrante, e se dagli estremi di tale piano si conducono 2 altri piani inclinati a un qualsiasi punto dell'arco, la discesa lungo (il sistema di) questi 2 ultimi piani inclinati si compirà in minor tempo che lungo il solo primo piano inclinato, o che lungo 1 soltanto di questi 2 ultimi piani, e precisamente l'inferiore."

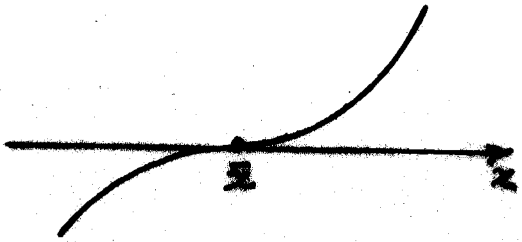
NEL 1696 JAKOB e JOHANN BERNOULLI DÀNNO LA SOLUZIONE

DISEQUAZIONE VARIAZIONALE G. STAMPACCHIA (1922-1978)



$$\langle F(\bar{x}), x-\bar{x}\rangle \geq 0, \ \forall x \in K$$

$F(x) = \nabla f(x)$

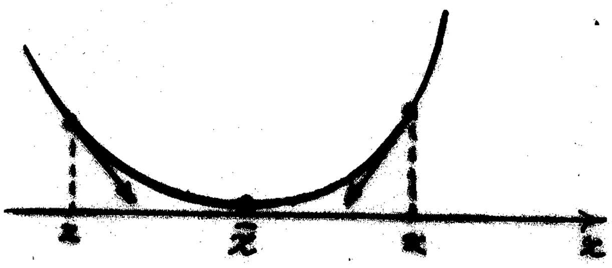


PROBLEMI DI CONTATTO
A. SIGNORINI

DISEQUAZIONE VARIAZIONALE, G. J. MINTY

$$\langle F(x), \bar{x}-x\rangle \leq 0, \ \forall x \in K$$

$F(x) = \nabla f(x)$



PRINCIPIO DEL MASSIMO

BELLMAN / PONTRYAGIN
($\simeq$ 1950-60)