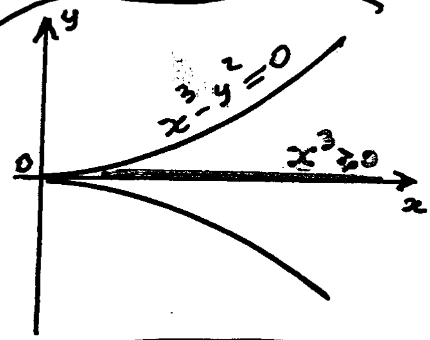
P: $\min f(x)$, $x \in R = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq 0\}$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ DIFFERENZ.

TRASFORMAZ. EQUIVALENTE

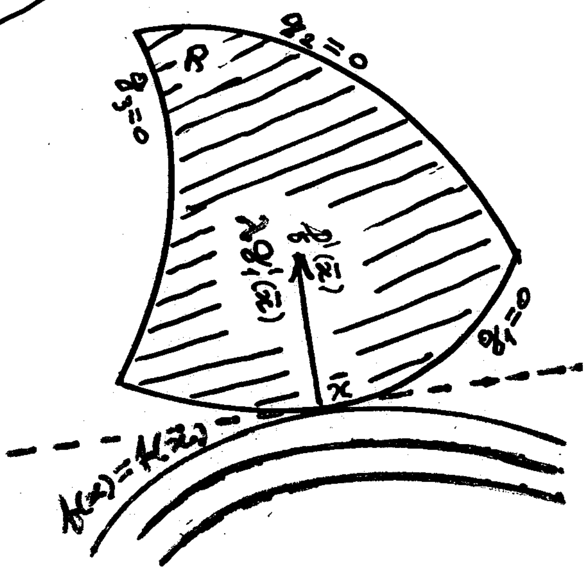
$g_i(x) - y_i^2 = 0$ $g(x) = x^3 \leftrightarrow x^3 - y^2 = 0$



COND. DI LAGRANGE:

$$\begin{cases} f'(x) - \lambda g'(x) = 0 \\ 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ OPPURE } y = 0 \\ g(x) - y^2 = 0 \end{cases}$$

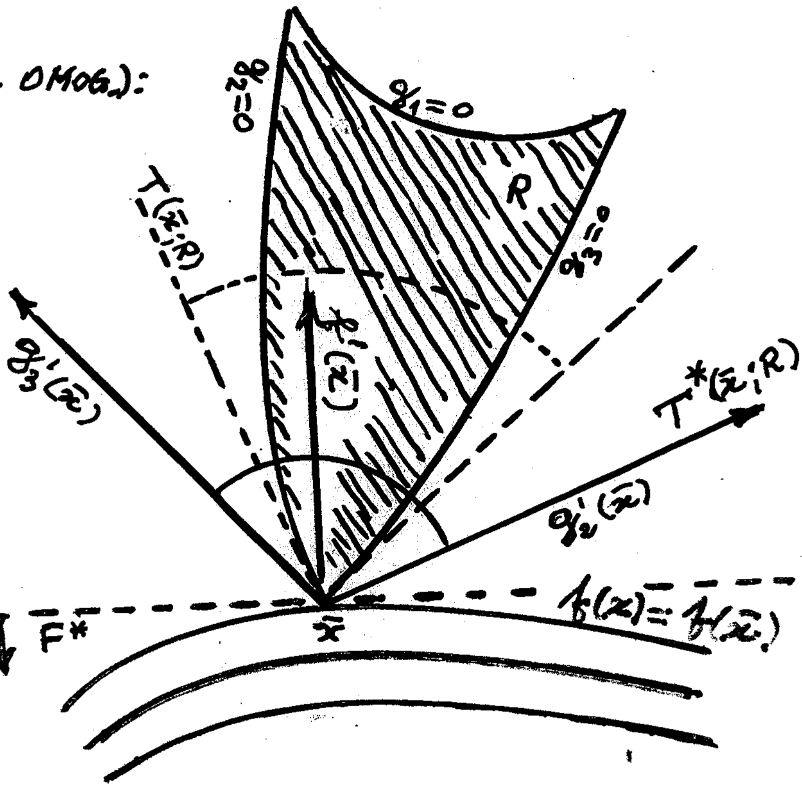
$I = \{1, \dots, m\}$ $I^0 = \{i \in I : g_i(\bar{x}) = 0\}$
$N^0 = \{i \in I^0 : g_i$ È NON LINEARE IN $\bar{x}\}$
$L^0 = \{i \in I^0 : g_i$ È LINEARE IN $\bar{x}\}$
DIPENDONO DA $\bar{x}$



LEMMA (J. ABADIE, 1967)

SE $\bar{x}$ È PUNTO DI MINIMO DI P, E SE IN ESSO f E LE g_i, $i \in I^0$ SONO DIFFERENZIABILI, E LE g_i, $i \in I \setminus I^0$ SONO CONTINUE, ALLORA È IMPOSSIBILE IL SISTEMA (LIN. OMOG.):

$$S: \boxed{\begin{array}{l} \langle f'(\bar{x}), y \rangle < 0 \\ \langle g_i'(\bar{x}), y \rangle > 0, \ i \in N^0 \\ \langle g_i'(\bar{x}), y \rangle \geq 0, \ i \in L^0 \end{array}}$$



LA DIMOSTRAZIONE È BASATA SULLO SVILUPPO AL 1° ORDINE DELLE FUNZIONI.

S IMPOSSIBILE $\Leftrightarrow$ $F^* \cap T(\bar{x}; R) = \emptyset$

APERTI

T^* POLARE

F. JOHN, 1948

f, g SIANO DIFFERENZIABILI IN $\bar{x}$. CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÈ $\bar{x}$ SIA PUNTO DI MINIMO PER P È CHE ESISTANO $\bar{\theta} \in \mathbb{R}$ E $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, TALI CHE $(\bar{\theta}, \bar{\lambda}) \neq 0$ E CHE $(\bar{x}, \bar{\theta}, \bar{\lambda})$ SIA SOLUZIONE DEL SISTEMA:

$$(J) \quad \boxed{\begin{array}{lll} \theta f'(x) - \lambda g'(x) = 0 & & \\ \langle \lambda, g(x) \rangle = 0 & & \\ g(x) \geq 0 & \theta \geq 0 & \lambda \geq 0 \end{array}}$$

ORTOGONALITÀ!

DIM. PER ASSURDO, SUPP. CHE LA TESI NON SUSSISTA. ALLORA IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO

$$(+) \quad \theta f'(\bar{x}) - \sum_{i \in I^0} \lambda_i g_i'(\bar{x}) = 0 \qquad \theta \geq 0 \qquad \lambda_i \geq 0, i \in I^0$$

HA SOLO LA SOLUZIONE NULLA (SE (+) AVESSE UNA SOLUZIONE $(\bar{\theta}, \bar{\lambda}_i, i \in I^0)$ NON NULLA, ALLORA $(\bar{\theta}, \bar{\lambda}_i, i \in I^0, \bar{\lambda}_i = 0, i \in I \setminus I^0)$ SAREBBE UNA SOLUZIONE NON NULLA DI (J)). PER IL TEOREMA DI ALTERNATIVA DI FARKAS (GENERALIZZATO) CON $A=0$, RISULTA POSSIBILE IL SISTEMA:

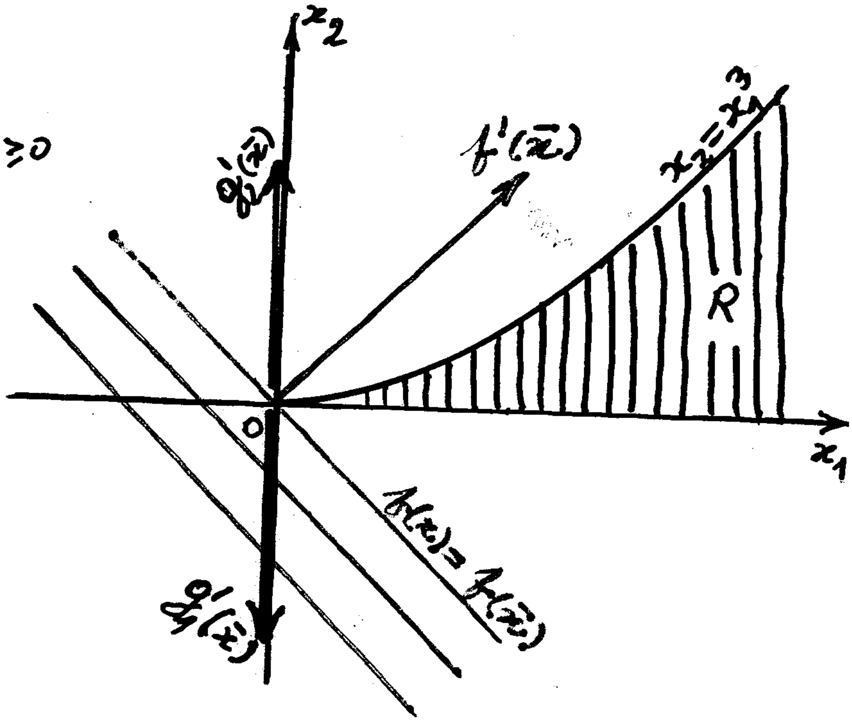
$$\langle f'(\bar{x}), y \rangle < 0 \qquad \langle g_i'(\bar{x}), y \rangle > 0, i \in I^0$$

IL QUALE, A NORMA DEL LEMMA DI LINEARIZZAZIONE DI ABADIE, CONTRADDICE L'IPOTESI CHE $\bar{x}$ SIA PUNTO DI MINIMO. $\square$

ESEMPIO

$\min(x_1+x_2) \quad x_1^3-x_2\geq 0 \quad x_2\geq 0$

$\bar{x}=(0,0)$



$f'(\bar{x}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$g_1'(\bar{x}) = \begin{pmatrix}3x_1^2\\-1\end{pmatrix}$

$g_2'(\bar{x}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

LA CONDIZIONE DI JOHN DIVIENE:

$$\begin{cases}\theta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\lambda_1\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}-\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0=0\\ \theta,\lambda_1,\lambda_2\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta=0\\ \theta+\lambda_1+\lambda_2=0\\ \theta,\lambda_1,\lambda_2\geq 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\theta=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1,\lambda_2\geq 0\end{cases} \qquad \theta=\lambda_1=\lambda_2=0$$

LA CONDIZIONE È SODDISFATTA.

CONFRONTARE CON L'ESEMPIO IN $\mathbb{R}^4$.

REGOLARITÀ

CONDIZIONI AFFINCHÈ, IN UN P PUNTO DI MINIMO, RISULTI $\theta > 0$ E QUNDI $\theta = 1$

SE LE FUNZIONI g_i, $i \in I^0$ SONO AFFINI, SI PUÒ ASSUMERE $\theta = 1$

SE I VETTORI $g_i'(\bar{x})$, $i \in I^0$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, SI PUÒ ASSUMERE $\theta = 1$

W.E. KARUSH, 1939 / H.W. KUHN E A.W. TUCKER, 1951

f, g SIANO DIFFERENZIABILI IN $\bar{x}$, E P SIA IVI REGOLARE.
CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÈ $\bar{x}$ SIA PUNTO DI MINIMO PER P E' CHE ESISTA $\bar{\lambda}$, TALE CHE $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ SIA SOLUZIONE DEL SISTEMA:

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x) - \lambda g'(x) = 0 \\ \langle \lambda, g(x) \rangle = 0 \\ g(x) \geq 0 \quad \lambda \geq 0 \end{array}}$$

ORTOGONALITÀ

J.W. GIBBS, 1875

$$\min \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = b \qquad x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n$$

COND. NECESSARIA AFFINCHÈ $\bar{x}$ SIA P. DI MINIMO È CHE $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, TALE CHE:

$$f_i'(\bar{x}_i) = \lambda, \text{ SE } \bar{x}_i > 0 \qquad f_i'(\bar{x}_i = 0) \geq \lambda, \text{ SE } \bar{x}_i = 0$$

DIM. KKT DIVIENE:

$$f_i'(x_i) - (\lambda_1 - \lambda_2) - \mu_i = 0 \qquad \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \dots, \mu_n \geq 0 \qquad (\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

CAUSA ORTOGONALITÀ:

$$x_i > 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \Rightarrow f_i'(x_i) = \lambda \qquad x_i = 0 \Rightarrow \mu_i \geq 0 \Rightarrow f_i'(x_i) \geq \lambda$$

CASO QUADRATICO

$f(x) = \langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle \qquad g(x) = Ax - b \geq 0$

SUI PUNTI STAZIONARI (CHE SODDISFANO KKT) LA FUNZIONE DI LAGRANGE RISULTA **LINEARE**, CIOÈ:

$$\boxed{L(x;\lambda) = f(x) - \langle \lambda, g(x)\rangle = f(x) = \frac{1}{2}\langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\langle b, \lambda\rangle}$$

DIM:
L'ORTOGONALITÀ $\Rightarrow L(x;\lambda) = f(x)$

LA 1ª PARTE DI KKT $\Rightarrow c + Cx - A^T\lambda = 0 \Rightarrow Cx = A^T\lambda - c$; DA QUESTA, TENENDO CONTO ANCORA DELL'ORTOGONALITÀ ($\langle \lambda, Ax-b\rangle = 0$), SI HA:

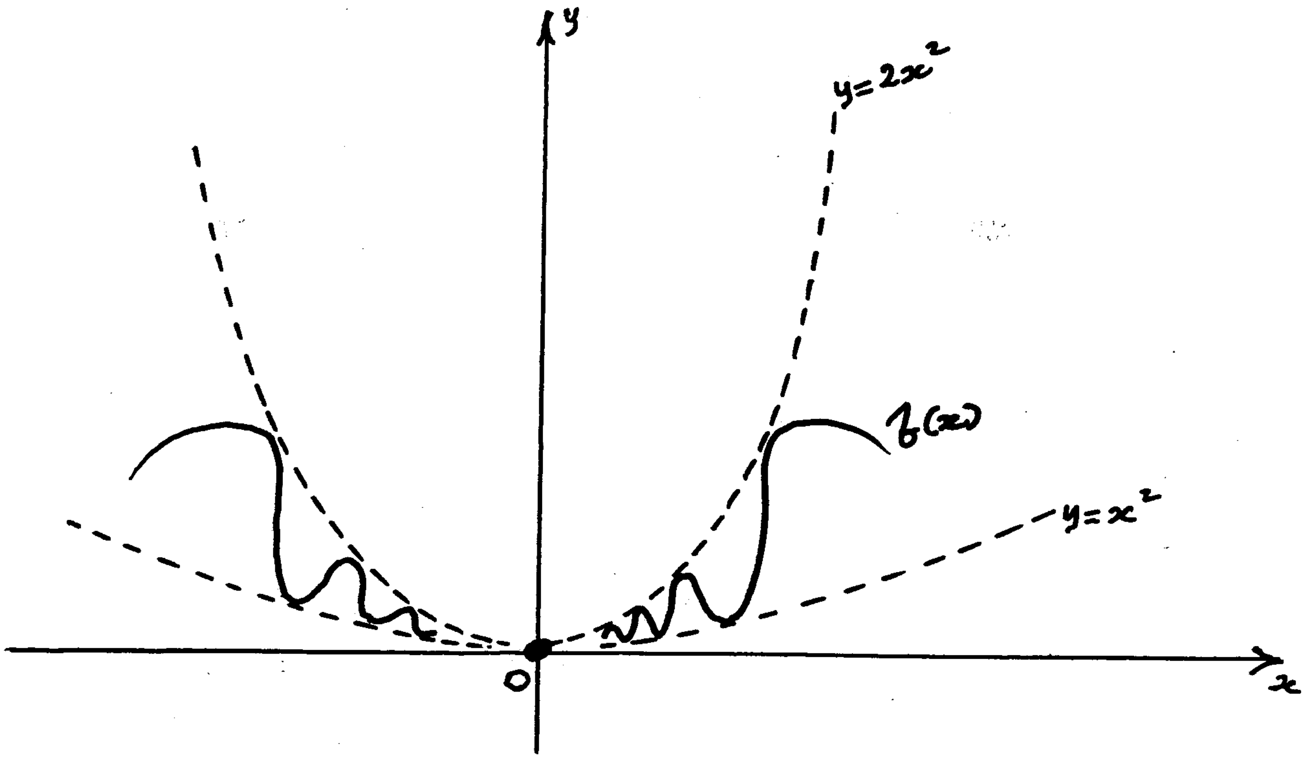
$$f(x) = \langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle = \langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\langle x, A^T\lambda - c\rangle = \frac{1}{2}\langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\langle x A^T, \lambda\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\langle \lambda, A^T x\rangle = \frac{1}{2}\langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\langle b, \lambda\rangle .$$

SIA $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. SE $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ È PUNTO DI MINIMO UNICO DI f, ALLORA ESISTE UN INTORNO COMPLETO DI $\bar{x}$, SIA $N(\bar{x})$, TALE CHE f È CONVESSA SU $N(\bar{x})$.

CONTROESEMPIO:

$n=1$

$$f(x) = [1+\alpha(x)\,x^2] \qquad \alpha(x) := \begin{cases} 0, & \text{SE } x=0 \\ \dfrac{1+\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{2}, & \text{SE } x \neq 0 \end{cases}$$



CONDIZIONI SUFFICIENTI

CON RIFERIMENTO A P CON VINCOLI BILATERI ED ALLA CONDIZIONE DI LAGRANGE, SI HA (f, g DIFF. CON CONTINUITÀ ALMENO 2 VOLTE):

SIA $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. SE $\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, TALE CHE $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ SODDISFI LA (∇), E TALE CHE OGNI SOLUZIONE $y \neq 0$ DELLA (*) VERIFICHI LA (**) IN SENSO STRETTO, ALLORA $\bar{x}$ È PUNTO DI MINIMO LOCALE ISOLATO PER P.

LA TESI SI OTTIENE, FACENDO VEDERE CHE, IN UN INTORNO DI $\bar{x}$, SI HA
$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \varepsilon \|x - \bar{x}\|^2$$

ESEMPIO ISOPERIMETRICO.

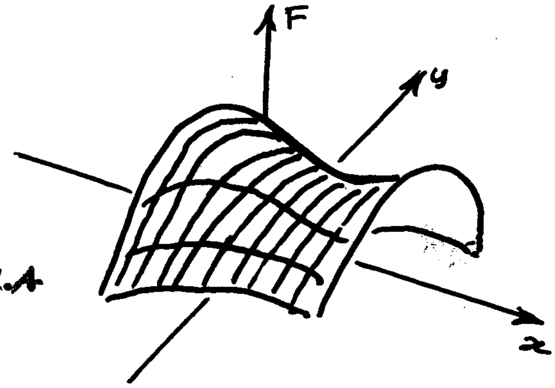
PRINCIPIO DI SNELL-FERMAT:

$\forall y$ CHE SODDISFA LA (*), CHE ORA DIVIENE $y_1 + y_2 = 0$, TENUTO CONTO DELLA (∇), LA (**) DIVIENE:
$$\bar{\lambda}\left(\frac{h^2 y_1^2}{\bar{x}_1^2(\bar{x}_1^2 + h^2)} + \frac{k^2 y_2^2}{\bar{x}_2^2(\bar{x}_2^2 + k^2)}\right) \geq 0$$
ED È VERIFICATA IN SENSO STRETTO.

LA CONVESSITÀ DI f E DI $-g$ RENDE LA CONDIZIONE DI KARUSH/KUHN-TUCKER SUFFICIENTE. OGNI SOLUZIONE DEL SISTEMA KKT È UN PUNTO DI SELLA DELLA LAGRANGIANA.

L'INSIEME DEI PUNTI DI MINIMO DI UN PROBLEMA CONVESSO È UNA FACCIA DELLA REGIONE AMMISSIBILE

CONDIZIONI DI SELLA



$F : X \times Y \to \mathbb{R} \qquad X \subseteq \mathbb{R}^n \quad Y \subseteq \mathbb{R}^m$

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ E' DETTO PUNTO DI SELLA DI F SU $X \times Y$, SSE RISULTA:

$$\text{(SE)} \quad F(\bar{x}, y) \leq F(\bar{x}, \bar{y}) \leq F(x, \bar{y}), \; \forall x \in X, \forall y \in Y$$

ESEMPIO: $F(x,y) = x^2 - y^2 + 1$, $X = Y = \mathbb{R}$ $\bar{x} = \bar{y} = 0$

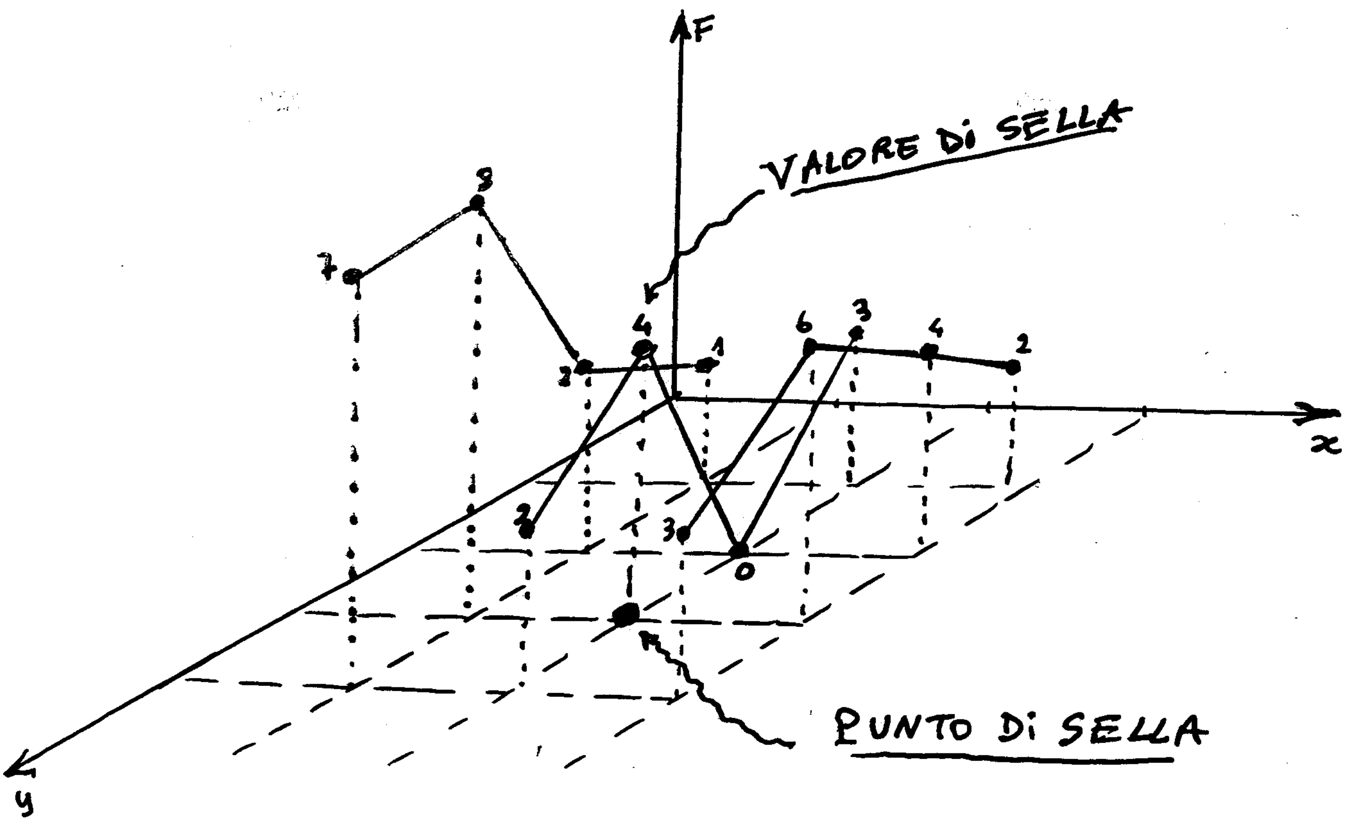
LA CONDIZ. (SE) DIVIENE:

$\bar{x}^2 - y^2 + 1 \leq \bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 1 \leq x^2 - \bar{y}^2 + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ CIOE' $-y^2 \leq 0 \leq x^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (VERA)

ESEMPIO: $X = \{1, 2, 3\}$ $Y = \{1, 2, 3, 4\}$

$$F(x,y) = (F_{ij}, i \in X, j \in X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F_{34} = \max_j \min_i F_{ij} = \min_i \max_j F_{ij} = 4$$



QUALUNQUE SIA $F: X\times Y \to \mathbb{R}$, RISULTA:

$$(-)\qquad \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} F(x,y) \le \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F(x,y)$$

<u>DIM</u>. $\inf_{x\in X} F(x,\bar y) \le F(\bar x,\bar y),\ \forall \bar x\in X,\ \forall \bar y\in Y \Rightarrow \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} F(x,y) \le \sup_{y\in Y} F(\bar x,y),\ \forall \bar x\in X \ldots$

<u>ESEMPIO</u>: $X=\mathbb{R}$ $\quad Y=[0,+\infty[$ $\quad F(x,y)=(x-1)^3-xy+2$

I DUE MEMBRI DI $(-)$ RISULTANO RISPETT. $-\infty$ ed 1.

SE $(\bar x,\bar y)$ È PUNTO DI SELLA DI F SU $X\times Y$, ALLORA RISULTA:

$$(=)\qquad \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} F(x,y) = F(\bar x,\bar y) = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F(x,y)$$

<u>DIM</u>. $(SE) \Rightarrow \sup_{y\in Y} F(\bar x,y) \le F(\bar x,\bar y) \le \inf_{x\in X} F(x,\bar y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F(x,y) \le F(\bar x,\bar y) \le \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} F(x,y)$$

QUESTA E $(-) \Rightarrow (=)$.

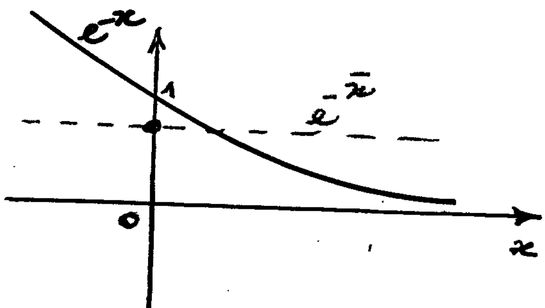
<u>ESEMPIO</u>: $X=\mathbb{R}$ $\quad Y=[0,+\infty[$ $\quad F(x,y)=e^{-x}-xy$

I 2 MEMBRI DI $(-)$ SONO $=0$. PERÒ F NON HA PUNTI DI SELLA:
LA 2^a DISUGUAGLIANZA DI (SE) DIVIENE:

$$(0)\quad e^{-x}-e^{-\bar x}-(x-\bar x)\bar y \ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

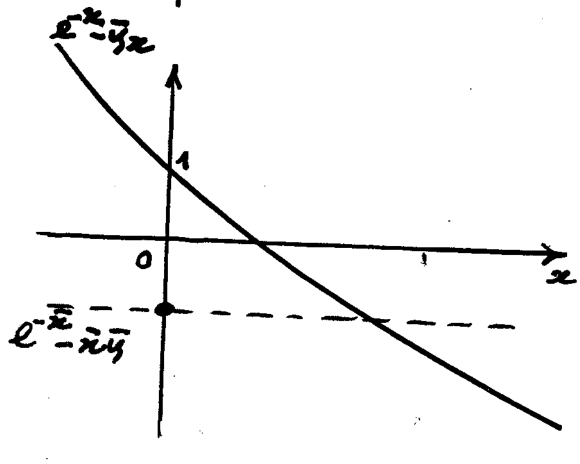
$$e^{-x}-\bar y x \ge e^{-\bar x}-\bar x\bar y \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\bar y=0 \quad e^{-x} \ge e^{-\bar x},\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\quad$ (0) È FALSA



$\bar y>0 \quad \lim_{x\to+\infty}(e^{-x}-\bar y x) = -\infty$

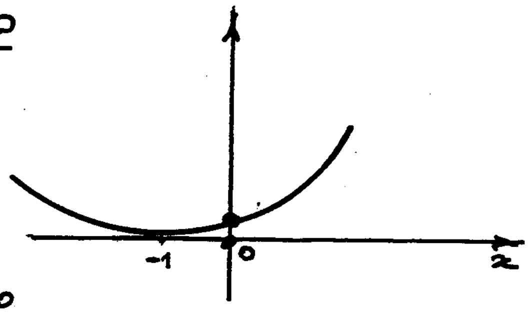
(0) È FALSA



Ip. $(\bar{x},\bar{\lambda})$ È PUNTO DI SELLA DI $L(x;\lambda)=f(x)-\langle\lambda,g(x)\rangle$ SU $X\times\mathbb{R}^m_+$, CIOÈ

$$(SE_L)\qquad L(\bar{x};\lambda)\le L(\bar{x},\bar{\lambda})\le L(x;\bar{\lambda}),\ \forall x\in X,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}^m_+$$

T. $\bar{x}$ È PUNTO DI MINIMO GLOBALE PER P



ESEMPIO: $\min (x+1)^2,\ x\ge 0$

$L(x;\lambda)=(x+1)^2-\lambda x$ $\quad(SE_L)$ DIVIENE:

$$(\bar{x}+1)^2-\lambda\bar{x}\le(\bar{x}+1)^2-\bar{\lambda}\bar{x}\le(x+1)^2-\bar{\lambda}x,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall\lambda\ge 0$$

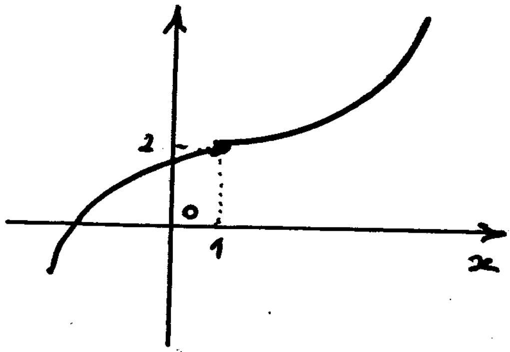
$$(\lambda-\bar{\lambda})\bar{x}\ge 0,\quad (x+1)^2-\bar{\lambda}x-(\bar{x}+1)^2+\bar{\lambda}\bar{x}\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \forall\lambda\ge 0$$

$\bar{x}=0\Rightarrow x^2-(\bar{\lambda}-2)x\ge 0\Rightarrow\bar{\lambda}=2\Rightarrow(\bar{x}=0,\bar{\lambda}=2)$ P. SELLA

$\bar{x}>0\Rightarrow\bar{\lambda}=0\Rightarrow(x+1)^2\ge(\bar{x}+1)^2$ IMPOSSIBILE

$\bar{x}<0\Rightarrow\lambda\le\bar{\lambda}$ IMPOSSIBILE

$\bar{x}=0$ È PUNTO DI MINIMO GLOBALE



ESEMPIO: $\min (x-1)^3+2,\ x\ge 0$

$L(x;\lambda)=(x-1)^3-\lambda x$ $\quad(SE_L)$ DIVIENE:

$$(\bar{x}-1)^3+2-\lambda\bar{x}\le(\bar{x}-1)^3+2-\bar{\lambda}\bar{x}\le(x-1)^3+2-\bar{\lambda}x,\ \forall x,\ \forall\lambda\ge 0$$

$$(\lambda-\bar{\lambda})\bar{x}\ge 0\qquad (x-1)^3-(x-\bar{x})\bar{\lambda}-(\bar{x}-1)^3\ge 0,\ \forall x,\ \forall\lambda\ge 0$$

$\bar{x}=0\Rightarrow(x-1)^3-\bar{\lambda}x+1\ge 0,\ \forall x$ IMPOSSIBILE

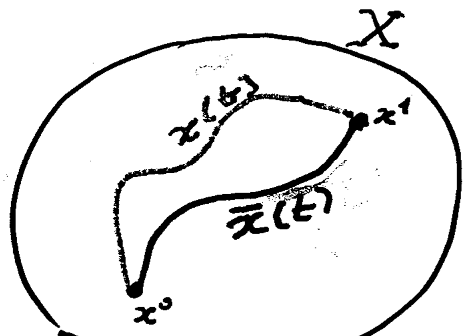
$\bar{x}>0\Rightarrow\bar{\lambda}=0\Rightarrow(x-1)^3\ge(\bar{x}-1)^3,\ \forall x$ IMPOSSIBILE

$\bar{x}<0\Rightarrow\lambda\le\bar{\lambda},\ \forall\lambda\ge 0$ IMPOSSIBILE

NON CI SONO PUNTI DI SELLA, NONOSTANTE CHE $\exists$ MINIMO

$$\min \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x'(t))\, dt$$

$$x(t_0)=x^0,\ x(t_1)=x^1$$



X APERTO $\quad \dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \dfrac{\partial F}{\partial x'}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'^2} \in C^0(X)$

$x(t) = \bar{x}(t) + \alpha\, y(t)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\left[\frac{d}{d\alpha}\int_{t_0}^{t_1} F(t, \bar{x}+\alpha y, \bar{x}'+\alpha y')\, dt\right]_{\alpha=0} = 0$$

CONDIZIONE NECESSARIA PER ESTREMO LOCALE

CIOÈ

$$\int_{t_0}^{t_1} [F'_x(t, x, x')\, y + \underbrace{F'_{x'}(t,x,x')\, y'}]\, dt = 0$$

α VOLTE IL 1° MEMBRO È LA VARIAZIONE PRIMA

INTEG. PER PARTI: $\underbrace{\left[F'_{x'}(t,x,x')\, y\right]_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} y \dfrac{d}{dt}\left[F'_{x'}(t,x,x')\right] dt$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{F'_x(t,x,x') - \frac{d}{dt}\left[F'_{x'}(t,x,x')\right]\right\} y(t)\, dt = 0\,, \quad \forall y$$

$$\boxed{F'_x(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} F'_{x'}(t, x(t), x'(t)) = 0}$$

EULERO 1744

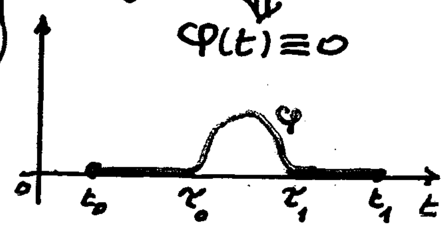
$$\boxed{F'_x(t,x,x') - F''_{x't}(t,x,x') - F''_{x'x}(t,x,x')\, x' - F''_{x'x'}(t,x,x')\, x'' = 0}$$

$\varphi \in C^0\,,\ y \in C^1$

$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\, y(t)\, dt = 0, \forall y$

$\Downarrow$

$\varphi(t) \equiv 0$



LEMMA FONDAMENTALE DEL CALC. DELLE VARIAZ.

(1) F NON DIPENDE DA t $\quad F''_{x't}=0$

L'EQ. DI EULERO, MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER x', DIVIENE:

$$\frac{d}{dt}\left(F-x'F'_{x'}\right)=0 \Rightarrow \boxed{F-x'F'_{x'}=\text{COST.}}$$

(2) F NON DIPENDE DA x

L'EQ. DI EULERO DIVIENE:

$$\frac{d}{dt}F'_{x'}(t,x')=0 \Rightarrow \boxed{F'_{x'}(t,x')=C_1}$$

(3) F NON DIPENDE DA t E DA x

L'EQ. DI EULERO DIVIENE:

$$\frac{d}{dt}F'_{x'}(x')=0 \quad \boxed{F''_{x'x'}\,x''=0} \Rightarrow$$

$x''=0 \Rightarrow x=C_1t+C_2$

OPPURE

$F''_{x'x'}=0 \Rightarrow x=k_jt+k$, se k_j è radice di $F''_{x'x'}=0$

ESEMPIO: $F=\sqrt{1+x'^2}$ (arco più breve tra 2 punti del piano)

(4) F È LINEARE IN x' $\quad F=M(t,x)+N(t,x)x'$

L'EQ. DI EULERO DIVIENE:

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}=0}$$

IN GENERALE NON SODDISFA LE COND. AL CONTORNO

(5) F NON DIPENDE DA x'

L'EQ. DI EULERO DIVIENE:

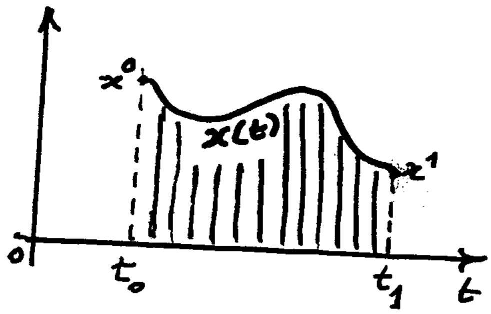
$$\boxed{F_x(t,x)=0}$$

COME SOPRA

ESEMPIO

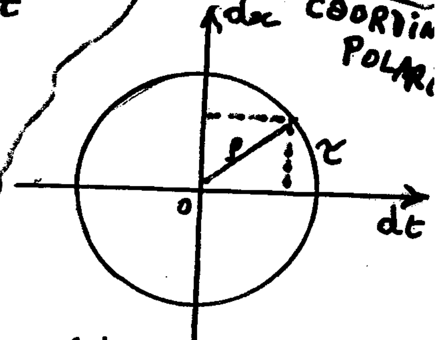
$$f^1(\ell) = \max \int_{t_0}^{t_1} x(t)\,dt\,, \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+x'^2(t)}\,dt = \ell > 0$$

$$x(t_0)=x^0,\ x(t_1)=x^1$$



$$L(x;\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} [\underbrace{x(t) + \lambda\sqrt{1+x'^2(t)}}_{F}]\,dt$$

F INDIP. DA t
CASO 1



$$\begin{cases} dx = \rho\,\mathrm{sen}\,\tau \\ dt = \rho\cos\tau \end{cases}$$

$$x' = \mathrm{tg}\,\tau$$

$$dt = \frac{dx}{\mathrm{tg}\,\tau}$$

EQ. EULERO $\quad x + \lambda\sqrt{1+x'^2} - \dfrac{\lambda x'^2}{\sqrt{1+x'^2}} = C_1$

$$\begin{cases} x - C_1 = -\lambda\cos\tau \\ dt = \lambda\cos\tau\,d\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - C_1 = -\lambda\cos\tau \\ t = \lambda\,\mathrm{sen}\,\tau + C_2 \end{cases}$$

ESTREMALI: $\quad (t - C_2)^2 + (x - C_1)^2 = \lambda^2$

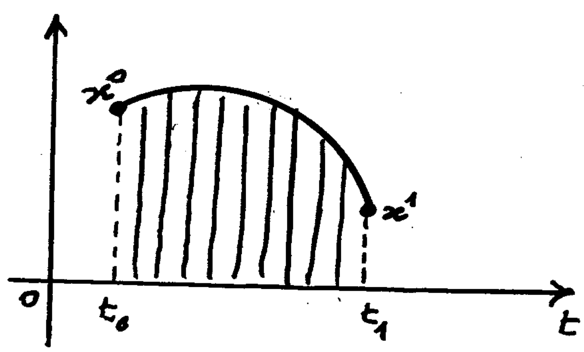
IL VINCOLO E LE CONDIZ. AL CONTORNO DETERMINANO λ, C_1, C_2.

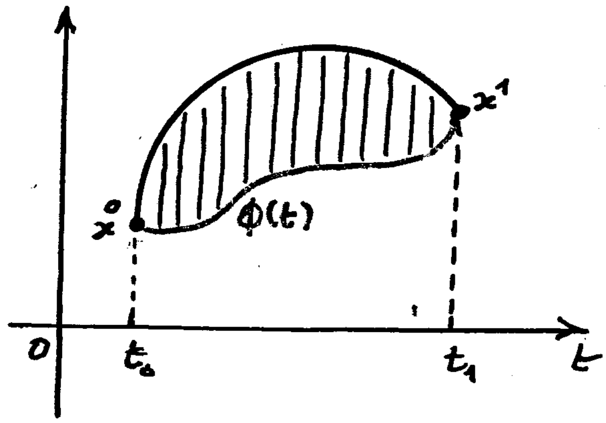
CONDIZ. SUFFICIENTI $\quad \lambda = \nabla f^1(\ell)$ SOTTO OPP. IPOTESI

IL PROBLEMA

$$\max \int_{t_0}^{t_1} [x(t) - \phi(t)]\,dt$$

SOGGETTO ALLE STESSE CONDIZIONI HA LA STESSA EQUAZIONE DI EULERO, E QUINDI LE STESSE ESTREMALI



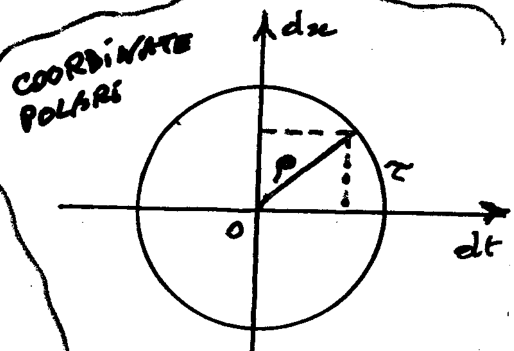


ESEMPIO

$$\min \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+x'^2(t)}}{t}\, dt$$

L'INTEGRANDA NON DIPENDE DA x
CASO 2

L'EQ. DI EULERO DIVIENE



$$dx = \rho \,\text{sen}\, \tau$$
$$dt = \rho \cos \tau$$
$$x' = \text{tg}\, \tau$$
$$dt = \frac{dx}{\text{tg}\, \tau}$$

$$\frac{x'}{t\sqrt{1+x'^2}} = C_1$$

$$t = \frac{x'}{C_1\sqrt{1+x'^2}}$$

$$\begin{cases} dx = \text{tg}\, \tau \, dt = \dfrac{\text{sen}\, \tau}{C_1} d\tau \\ dt = d\left(\dfrac{x'}{C_1\sqrt{1+x'^2}}\right) = d\left(\dfrac{\text{sen}\, \tau}{C_1}\right) = \dfrac{\cos \tau}{C_1} d\tau \end{cases}$$

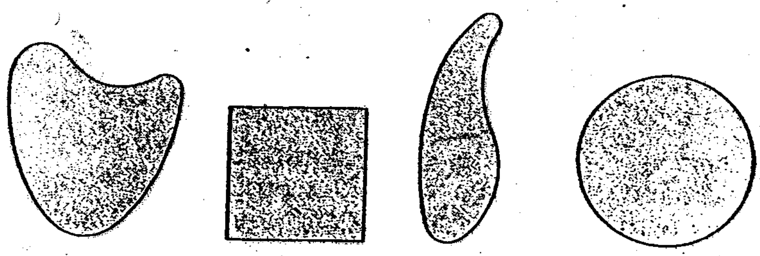
$$\begin{cases} x - C_2 = -\dfrac{\cos \tau}{C_1} \\ t = \dfrac{\text{sen}\, \tau}{C_1} \end{cases}$$

$$\boxed{t^2 + (x - C_2)^2 = \left(\frac{1}{C_2}\right)^2}$$

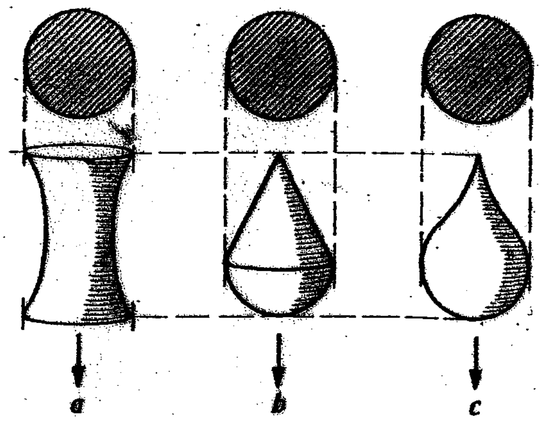
L'INTEGRANDA SI PUÒ INTERPRETARE COME RAPPORTO TRA UN ELEMENTO D'ARCO ED UNA VELOCITÀ, E QUINDI COME UN TEMPO.

SE NELL'INTEGRANDA SI SOSTITUISCE t CON UNA FUNZIONE DELLA SOLA x' (UNA PARTICELLA SI MUOVE LUNGO UNA CURVA CON VELOCITÀ CHE DIPENDE SOLO DA x'), ALLORA SI CADE NEL CASO 3.

DIDONE / ZENODOROS ≃ 180 bc



TUTTE LE SUPERFICIE HANNO LO STESSO PERIMETRO, MA È IL CERCHIO (E SOLO ESSO) AD AVERE LA MASSIMA AREA



TRA TUTTI I SOLIDI DI RIVOLUZIONE, GENERATI DA CURVE DI UGUALE LUNGHEZZA ED INSCRITTI IN UGUALI CILINDRI (AVENTI CIOÈ LA STESSA MASSIMA SEZIONE PERPENDICOLARE ALL'ASSE DI ROTAZIONE), È QUELLO c CHE (A PARITÀ DI VELOCITÀ) HA LA MINIMA RESISTENZA DI CADUTA

(NELLA STESSA DIREZIONE DELL'ASSE DI ROTAZIONE)

POSTO DA NEWTON NEL 1687, MA RISOLTO PIÙ TARDI

OBSTACLE PROBLEMS

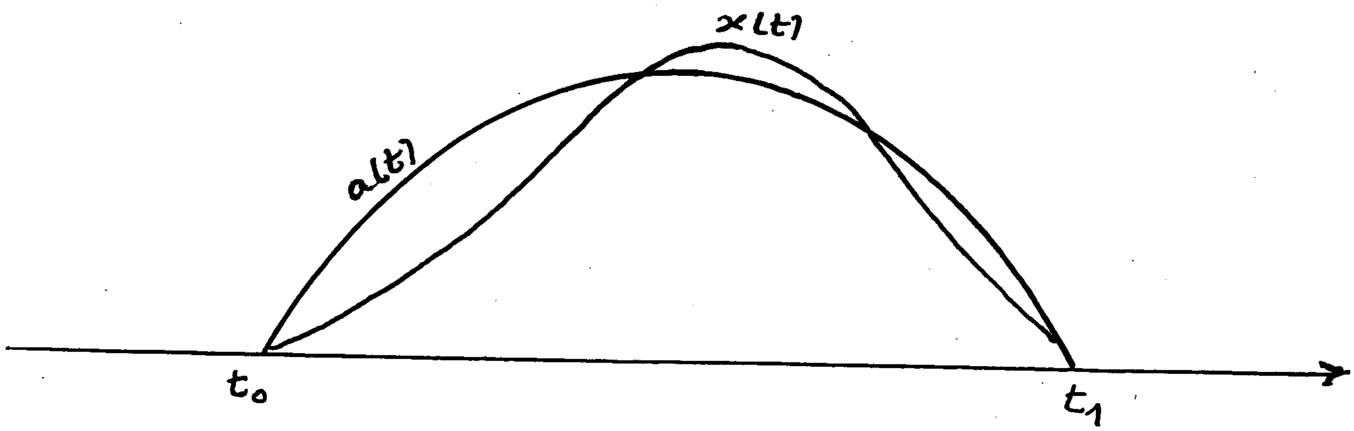
$$\min \int_T \sqrt{1 + x'(t)^2}\, dt$$

s.t. $\quad x(t) - a(t) - k\, c(t;x) \geq 0 \quad , \quad \forall t \in T := [t_1, t_2]$

$\quad x(t_1) = x(t_2) = 0 \quad , \quad x \in C^0(T)$

$a(t)$ strictly concave

$$c(t;x) := \frac{x''(t)}{[1 + x'(t)^2]^{3/2}}$$



$k=0$ CLASSIC OBSTACLE PROBLEM

$k<0$ NEW KIND OF OBSTACLE PROBLEM

x CAN PENETRATE THE OBSTACLE, WHERE x is STRICTLY CONVEX

CONTRIBUTIONS FROM B.D. CRAVEN

O. FERRERO, G. PITTALUGA

$k>0$ NEW KIND OF OBSTACLE PROBLEM

x CAN PENETRATE THE OBSTACLE, WHERE x is STRICTLY CONCAVE

DESIGN OF SUBMARINE PIPELINE

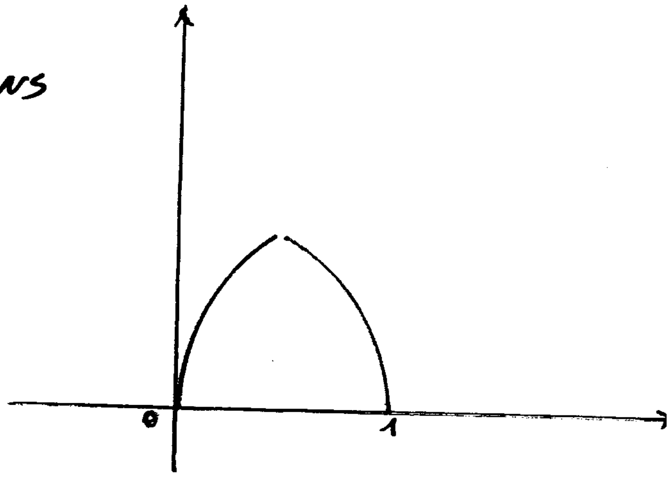
ISODIAMETRICAL PROBLEMS

$K \subset \mathbb{R}^n$ CONVEX BODY

AMONG ALL K HAVING DIAMETER $= 1$, TO FIND ONE WHICH HAS MAXIMUM (HYPER) VOLUME

PARTICULAR CASES: POLYTOPES, POLYGONS

EXTENSION TO BANACH SPACES



EXTENSIONS TO NONCONVEX CASE

K GEODESIC CONVES SUBSET OF A CONNECTED RIEMANNIAN MANIFOLD:

$\forall x^1, x^2 \in K$

$\eta(x^1, x^2)$ IS THE GEODESIC JOINING x^1 AND x^2

$$d_K := \sup_{x^1, x^2 \in K} \text{meas}\, \eta(x^1, x^2) = \text{diameter of } K$$

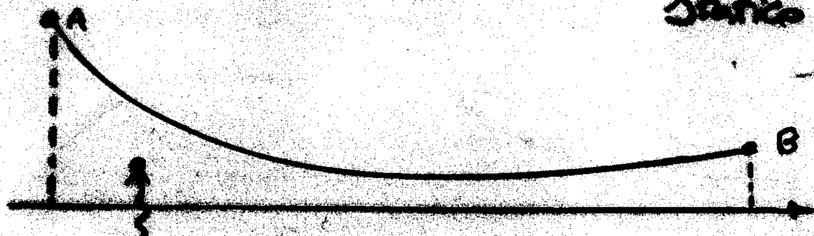
AMONG ALL K HAVING $d_K = 1$, TO FIND ONE FOR WHICH $\text{meas}\, K$ IS MAXIMUM

EXTENSIONS TO NETWORKS

CATENARIA

$$y = k\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{k} = k\,\frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2}$$

Una corda di lunghezza l, perfettamente flessibile, inestensibile, in posizione di riposo appesa ai punti A e B, assume la forma per cui il momento statico I è il più basso possibile



$$\min I = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

con $$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$$

$y(x_0)=y_0 \quad y(x_1)=y_1$

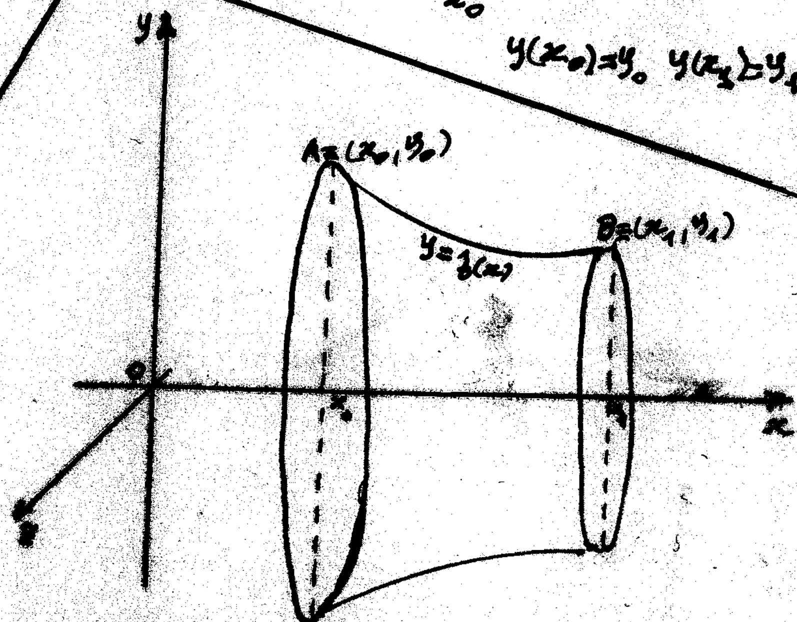
area proporzionale alla lunghezza di $\widehat{AB}$, sse la curva è una CATENARIA

SOLIDO DI ROTAZIONE DI MINIMA AREA LATERALE

A e B DATI

$$\min 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$y = k\,\mathrm{Ch}\,\frac{x+c}{k}$ CATENARIA

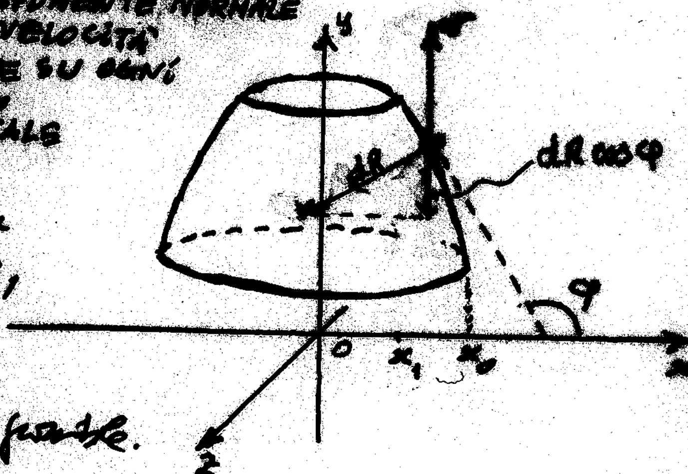


SOLIDO DI ROTAZIONE DI MINIMA RESISTENZA IDRAULICA

PROPORZIONALE AL QUADRATO DELLA COMPONENTE NORMALE DELLA VELOCITÀ AGENTE SU OGNI ELEMENTO SUPERFICIALE

Trovare $y(x)$ t.c. il solido di rotazione rispetto ad y da esso generato, avanzando in un fluido con velocità v parallela ad y, incontri una resistenza idraulica R, la cui componente parallela ad y sia la minima possibile.

NEWTON 1686



$$\begin{cases} x = c\,\dfrac{(1+p^2)^2}{p} \\ y = c\left(p^2 + \frac{3}{4}p^4 - \log|p|\right) + c' \end{cases}$$

$$\min \int_{x_0}^{x_1} \frac{x\,dx}{1+y'^2}$$