DE SPHÆRA

Et Solidis Sphæralibus

LIBRI DVO

In quibus Archimedis Doctrina de Sphæra & cylindro denuo componitur, latiùs promouetur,

Et in omni ſpecie ſolidorum, quæ vel circa, vel intra Sphæram, ex conuerſione poligonorum regularium gigni poſſint, vniuerſaliùs Propagatur.

AD SERENISSIMVM

FERDINANDVM II.

Magnum Ducem Etruriæ.

AVCTORE

EVANGELISTA TORRICELLIO eiuſdem Sereniſsimi Magni Ducis Mathematico.

Florentiæ Typis Amatoris Maſſę, & Laurentij de Landis 1644.

SVPERIORVM PERMISSV.

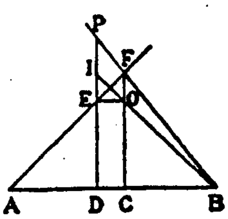
EVANGELISTÆ
TORRICELLII

DE MAXIMIS ET MINIMIS.

DE MAXIMIS ET MINIMIS

[1] (1) Esto [Fig. 1] AB secta bifariam in C; dico ACB maximum esse.

Si non est, sit ADB; erigatur CF aequalis AC et iunctis AF, BF, fiat DE parallela ad CF et EO parallela ad AB, ducaturq. BOI.



[Fig. 1].

Iam ADB ad ACB rationem habet compositam ex ratione DB ad BC sive ID ad CO, vel ID ad ED; et ex ratione DA ad AC sive ED ad CF; ergo ADB ad ACB erit ut ID ad CF; propterea ID maior quam CF et IE maior quam OF, sive quam EO, ergo etiam ID maior quam DB, et ideo ID maior quam PD, pars suo toto.

Directe fortasse melius hoc modo.

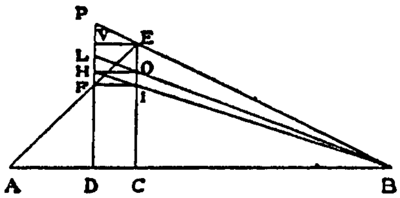
PD maior quam DI, ergo BD maior quam DI, et OE maior quam EI, ergo etiam OF maior quam EI, additisq. aequalibus tota CF maior quam DI, ergo patet ACB maius esse quam ADB.

[2] *Lemma.* Si fuerint quotcumque rectae in continua ratione, erunt et earum differentiae in continua et in ea-

(1) I problemi trattati nei nn. [1] — [5] e [14] rientrano in quello ennunciato nel § XXVII del *Racconto di alcuni problemi proposti e passati scambievolmente tra i matematici di Francia* ed il Torricelli (v. queste *Opere*, T. III, p. 17); chi ha presente gli scritti di Fermat riconoscerà agevolmente che essi furono proposti al nostro illustre connazionale da persone che conoscevano i lavori del grande geometra francese sulla teoria dei massimi e minimi (cfr. *Oeuvres de Fermat*, ed. Tannery et Henry, T. I. Paris 1891, p. 133-153) [G. L.].

dem cum ipsis rectis ratione. Ergo maximarum differentia omnium differentiarum maxima erit.

[3] Esto [Fig. 2] AB secta in C ita ut CB dupla sit ad AC. Dico quod fit ex AC et quadrato CB maximum esse.

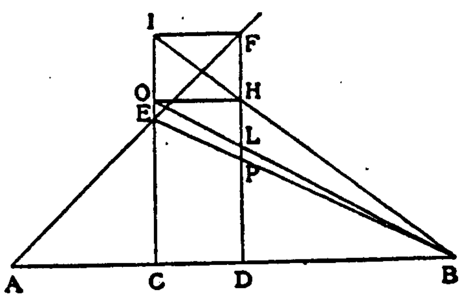


]Fig. 2].

Nam sumatur punctum quodlibet D et erectis perpendicularibus CE, DF; sit CE aequalis ipsi CA. Tum ducta FI basi parallela, agatur BIH, ductoq. iterum HO basi parallela, agatur BOL (et haec parallela agatur toties quota erit in ordine dignitas supposita rectae CB).

Iam solidum ACB ad solidum ADB rationem habet compositum ex ratione altitudinum CA ad AD, sive EC ad DF, vel EC ad CI, et ex ratione basium, nempe ex ratione rectae CB ad BD bis sumpta, sive ex ratione CI ad DH, et ex ratione CO ad DI, ergo solidum ACB ad ADC erit ut recta EC ad MD. Dico iam EC maiorem esse quam LD. Nam BD ad DP dupla est, ergo BD ad DL maior quam dupla est, et OH ad HL maior quam dupla erit, multo maior quam dupla erit ad HF (per Lemma superius), ergo OH maior quam FL; sed OH et IF et IE sunt aequales, ergo additis aequalibus, patet EC maiorem esse quam DL.

Quod autem PD sit maior quam DL probatur ducta EV, parallela ad AC; erit iam (in tertia dignitate) EV tripla ad LP, ergo FV tripla ad LP. Iam LD ad DF ubicumq. sit L triplicatum rationem habet rectae PD ad EC, sive PD ad VD; sed, si triplicemus, eandem rationem ita ut PD sit prima erit ultima maior quam FD, nam p.ª differentia PV maior esse debet omnibus [?] reliquis diffferentijs. Ergo etc.



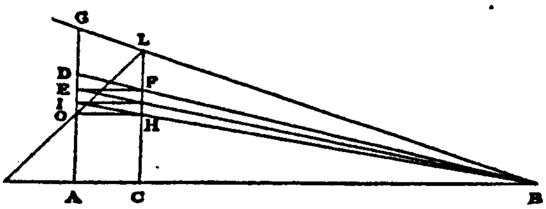
[Fig. 3].

Quando vero punctum D sumatur ex alia parte [Fig. 3].

Demonstratio eadem est ac praecedens, mutando tantium est vox maior quater, et dicendum minor, in fine vero dicendum demptis inaequalib. etc.

Nota quod tres DF, DH, DL sunt continuae in utraq. fig.[a]

[4] BA ad AC tripla est [Fig. 4], ergo BA ad AD maior quam tripla, ideoq. FE ad ED maior quam tripla, multo magis ad EI, sive IO maior erit quam tripla. Quare FE sive OH vel LH maior erit quam DO.

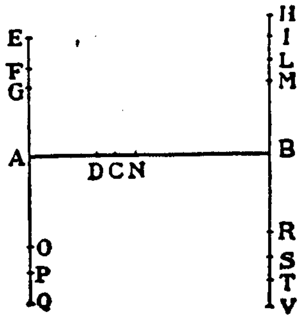


[Fig. 4].

Seguita del max.° rectang.lo nelle parabole, et ellissi.

[5] Esto [Fig. 5] AB secta in C ita ut sit AC ad CB ut 2 ad 3. Dico id quod fit ex quadrato AC in cubum CB maximum esse.

Nam, si non est, sit quod fit ex AD quadrato in DB cubum; ponantur aequales AEBH fiatq. ut CA ad AD ita EA ad AF, et ita PA ad AG, item ut CB ad BD ita HB ad BI et ita IB ad BL, et ita LB ad BM, erit ergo quadratum CA ad AD ut recta EA ad AG, et cubus DB ad BC ut recta HB ad BM. Iam EF ad EA, sive ad BH, erit ut DC ad CA, sed BH ad HI est ut BD ad DC, ergo ratio EF ad HI componitur ex utraq. ratione nempe BD ad DC et DC ad CA, propterea ratio EF ad HI erit ut BD ad CA, nempe maior quam 3 ad 2, et deest probandum venio quid etc.



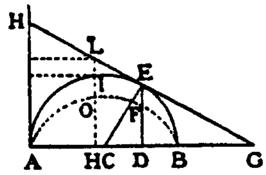
[Fig. 5].

[6] (1) Esto semicirculus, vel semiellipsis cuius axis AB [Fig. 6], centrum vero C. Quaeritur maximus rectan-

(1) Del seguente problema è parola nel § XXVI del *Racconto di alcuni problemi ecc.* (queste *Opere*, T. III, p. 17); da una lettera diretta dal Torricelli a M. A. Ricci risulta che esso gli venne suggerito dal P. Mersenne e che egli lo aveva risoluto sino dal 17

gulum sub segmento diametri AD et sub erecta perpendiculari DE.

Secetur bifariam CB in D, et erecta perpendiculari DE, dico rectangulum ADE maximum esse et omnium quae ad semicirculum sunt; ipsium vero ADF maximum eorum quae ad ellipsim spectant.



[Fig. 6].

Ponatur BG aequalis semidiametro CB, et producta GEH, iungant. EC, EB; erit CEB triangulum aequilaterum ob constructionem anguliq. BEG, BGE aequales, ergo additis aequalibus erunt duo anguli CEB, BEG aequales duobus ECG, EGC, suntque omnes in uno eodemque triangulo, ergo CEG rectus est et GH tangens. Iam, si rectangulum ADE non est maximum eorum quae ad semicirculum spectant, esto maximum AHI, productaque HI in L, erit rectangulum ADE maius rectangulo AL (per 27 sexti Elem. secundum Clavium), quandoquidem AD aequalis est ipsi DG ob constructionem; sed rectangulum AI maius ponitur rectangulo ADE, ergo multo magis rectangulum AI maius erit rectangulo AL pars suo toto etc.

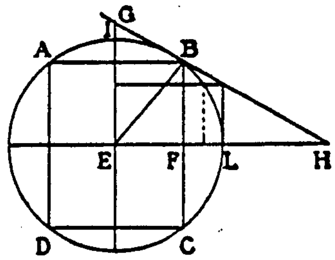
Dico iam rectangulum ADF maximum esse eorum quae ad ellipsim, nam si non est, esto maximum aliud puta AHO. Iam rectanguli ADE ad rectangulum AHI ratio componitur ex ratione DA ad AH et ex ratione DE ad HI, sive DF ad HO, ergo rectangulum ADE ad AHI est ut rectangulum ADF ad AHO, quapropter ADF maius est quam AHO etc.

[7] (1) Simile quoddam ad me scripserat Clar.^{mus} dominus du Verdus (2), nempe maximam superficierum cylindricarum in sphaera descriptibilem repertam fuisse. Cui ego addideram et in sphaeroide, et in conoide, fusoq. parabolico.

dicembre 1644 (queste *Opere*, T. III, p. 244; cfr. anche p. 300). È possibile che a sua volta il Mersenne lo abbia avuto da Fermat, il quale, nel frammento *Ad methodus de maxima et minima Appendix* (*Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 153), si occupò di un'analoga questione [G. L.].

(1) Cfr. la nota al n. [12] (p. 87) [G. L.].

(2) Questa lettera non si trova tra quelle pubblicate nella presente edizione e probabilmente non esiste più [G. L.].

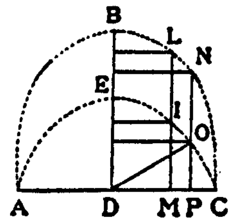


[Fig. 7].

Nam si in circulo descriptum sit quadratum ABCD [Fig. 7], et convertatur figura ita ut a circulo fiat sphaera a quadrato cylindrus, erit huius cylindri superficies maxima omnium etc.

Sumpto enim quadrante IEL, et ducta tangente GBH, ostendetur EH secari bifariam in F, ergo per 27 sexti ostendetur ut in praecedentibus rectangulum DEFB maximum esse omnium quae ad quadratum spectant. Idem de quadruplis et superficies cylindrorum inter se sunt ut eorundem rectangula per axem, ut ostendimus in Propos. 6. lib. primi *De solidis sphaeralibus* (1). Ergo etc.

[8] Quaeramus iam maximam superficiem cylindricam in sphaeroide descriptibilem, sive, quod apud nos idem est, maximum rectangulum in ellipsi descriptibile, esto [Fig. 8] semiellipsis ABC cuius axis AC centrum D, fiat semicirculus AEC; sectoq. angulo recto EDC bifariam per rectam DI erigatur perpendicularis MIL. Dico rectangulum DL esse maximum omnium quae ad quadrantem ellipseos spectant.

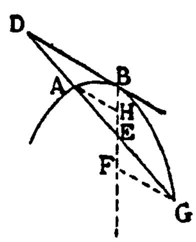


[Fig. 8].

Si enim non est maximum, esto illud DN.

Iam rectangulum DL ad DN rationem habet compositam ex ratione LM ad NP, sive IM ad OP, et ex ratione MD ad DP; ergo rectangulum DL ad DN erit ut rectangulum DI ad DO nempe maius. Idem de quadruplis hoc est de rectangulis in integra ellipsi. Propterea patet maximam superficiem cylindricam in sphaeroide descriptibilem eam esse quae ab inuento rectangulo describitur, neque refert circa maiorem minoremve axem ellipsis convertatur, nam quodcunque rectangulum circa quodvis latus convertatur aequales superficies cylindricas describit et intellige haec omnia semper sine basibus.

(1) Cfr. queste *Opere*, T. I, Parte I, p. 15-16 [G. L.].

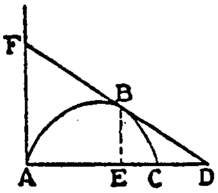


[Fig. 9].

[9] Esto parabola ABG [Fig. 9] cuius tangens BD diameter vero BF et ducta utcunq. DG quae diametrum et tangentem secet. Patet quod bis cum sectione occurret cum diametrum secet. Dico GD, ED, DA esse in continua ratione.

Applicentur GF, AH, et recta GD ad DA; erit ut recta FB ad BH, sive ut quadratum GF ad HA, vel ut quadratum GE ad EA, ergo recta GD ad DA longitudine est ut recta GE ad EA potentia; patet ergo propositum.

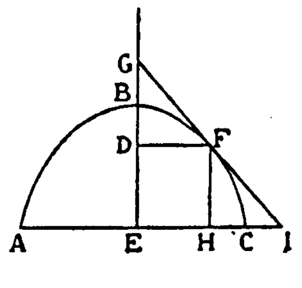
[10] Esto parabola [Fig. 10] ABC, cuius applicata sit AC, et parallela diametro BE; quaeritur maximum rectangulum sub BE et portione applicatae AE.



[Fig. 10].

Esto factum quod quaeritur. Ducta igitur tangente FD per punctum B secabitur bifariam FD in B et AD in E (suppono AF parallela diametro); erit ergo ut AD ad DE, ita ED ad DC, hoc est dupla, ideoque AD ad DC quadrupla erit et dividendo AC ad CD, sive ad CE, tripla, ergo AE erit $^2/_3$ applicatae AC. Quod et compositio patet. AE ad EC est ut 2 ad 1.

[11] Esto [Fig. 11] parabola ABC, cuius axis BE; queritur maxima superficies cilindrica descriptibilis intra conoides sive intra fusum huius parabolae. Hoc est quaeritur maximum rectangulum, quod apud nos idem est.



[Fig. 11].

Secetur axis BE ita ut ED ad DB sit dupla et applicata DF. Dico rectangulum EF maximum esse omnium quae ad semiparabolam sunt, idem verum erit de duplis.

Ducatur per F tangens GFI, eritq. GB aequalis ipsi BD et propterea tota GD aequalis ipsi DE, et, per 2 sexti, GF aequalis ipsi FI et EH aequalis ipsi FI, ergo, per 27 sexti, rectangulum EF maximum ostendetur (ut in praecedentibus) omnium quae ad semiparabolam sunt. Iam si parabola convertatur sive circa axem, sive circa basim, rectangulum à nobis repertum maximam cilindricam superficiem describet, superficies enim cilindricae sunt ut rectangula per axem, et utlibet axe convertatur rectangulum, aequales ex utraq. revolutione superficies fiunt etc. (1).

[12] (2) Maxima superficies cilindrica quae intra sphaeram describi possit ea est cuius rectangulum per axem quadratum est.

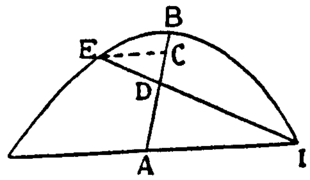
Quae vero in sphaeroide oblonga ea est cuius basis diameter ad diametrum sphaeroidis sit ut latus quadrati alicuius ad propriam diametrum.

In sphaeroide verò prolata ea est cuius axis ad axem sphaeroidis sit in ratione praedicta.

Quae vero in conoide parabolico ea est cuius altitudo ad altitudinem conoidis sit subsesquialtera. At quae in fuso parabolico ea est cuius basis ad maximum fusi circulum sit ut 4 ad 9.

[13] (3) *Vas quod aequabiliter exhauritur.* Ingeniosissimus M. A. Riccius certiorem fecit me de desiderio tuo circa illud vas quod equabili modo exhauriter. Dico igitur 2° per memoriam licebit (4).

Esto conoides parabolae quadratoquadratice [Fig. 12] ABC perforatum in fundo foramine B. Dico illud et lege exhauriri ut motus supreme superficiei humoris contenti AC

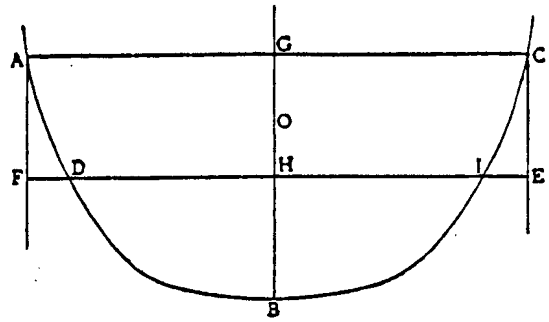


(1) Maximum rectangulum quod contineri possit sub semicirculi vel semielipsis perpendiculari et altero segmentorum diametri, illud est cuius latus continet $3/4$ ipsius diametri.

(2) Il problema d'inscrivere in una sfera un cilindro od un cono di superficie (laterale) massima venne proposto da Fermat in una lettera al Mersenne del 26 aprile 1636 (*Oeuvres*, T. II, Paris 1894, p. 6), della quale un riflesso si trova probabilmente nell'esordio del n. [7] della presente memoria. Per il caso del cilindro la soluzione fu comunicata dal proponente allo stesso Mersenne il 10 novembre 1642 (*Oeuvres*, T. II, p. 248 e T. I, p. 167); mentre da una lettera del Fermat al medesimo del 18 gennaio 1643 (Id. T. II, p. 246) risulta che il caso del cono era allora ancora intatto [G. L.].

(3) Cfr. questa ed., T. II, p. 248 e T. III, p. 264 [G. L.].

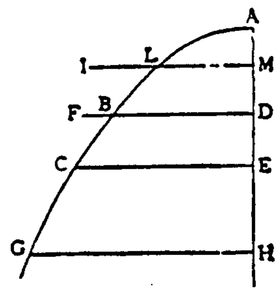
(4) Passo di lettura difficilissima e mal sicura [G. L.].



[Fig. 12].

aequalibis sit; sumatur enim quaelibet alia vasis sectio DI, et super basi AC concipiatur cylindrus AE. Esto BO medio proportionalis inter GB, BH, et quoniam est quadratoquadratum AG ad quad. quad. DH ut GB ad BH erit quad. AD ad quadratum DH ut GB ad BO. Iam velocitas superficiei descendentis, quod est AG, ad velocitatem superficiei, quod erit FH in cilindro, est ut GB ad BO, sive ut quadratum AG ad quadratum DH, velocitas vero sectionis FH ad HD est ut quad. HD ad HF, sive ut quad. HD ad quadratum AG, ergo ex aequo velocitas sectionis AG ad velocitatem sectionis DH erit ut quadratum AG ad quadratum AG, nempe aequalis etc.

Si quis desideret descriptionem eiusmodi lineae nempe parabolae quadratoquadraticae, talem excogitabamus.

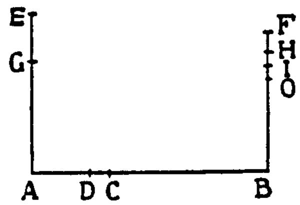


[Fig. 13]

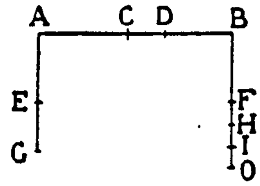
Ponatur parabola quadratica vulgata [Fig. 13] ABC cuius axis AD, tunc applicata BD secetur AE aequalis BD, et iterum DF aequalis CE; eritq. punctum F in parabola quesita et sic de reliquis punctis. Quod verum sit hoc sumatur AH latus rectum parabolae quadraticae, et erunt aequales GH, AH. Tum quad. GH ad quadratum BD sive quadratum AH ad AE erit ut recta HA ad AD; ergo continuae sunt AH, AE, AD. Propterea si quadratum GH ad CE, vel FD, est ut recta HA ad AE, erit quadratum GH ad quadratum FD ut HA ad AD, et deinde ex aequo probatur quadratum FD ad IM esse ut recta DA ad AM.

[14] Esto recta AB [Fig. 14 e 15] secta in C ita ut BC ad CA sit multiplex. Dico productam ex recta AC et dignitate CB, cuius exponens sit aequalis denominatori multiplicitatis maximum esse.

Secetur enim alio loco puta in D, et ponatur CB exempli gratia tripla ad CA. Ponantur aequales AE, BF, et ut CA ad AD, ita sit EA ad AG. At ut DB ad BC ita sit FB ad BH, et BH ad BI, et IB ad BO, erit iam ratio EG ad FH composita ex ratione BF ad FH, et EG ad BF sive ad EA. Nempe ex ratione BD ad DC, et DC ad CA, ergo EG ad FH erit ut BD ad CA, hoc est ✵ magis quam tripla, ergo tota EG ad totam FO multo maior erit. Propterea reliqua GA minor quam OB, ergo ratio EA ad AG maior quam ratio FB ad BO, nempe ratio rectae CA ad AD maior quam ratio cubi DB ad BC, ergo productum ex AC et cubo CB maior erit quam quod fit ex recta AD et cubo DB.



[Fig. 14].

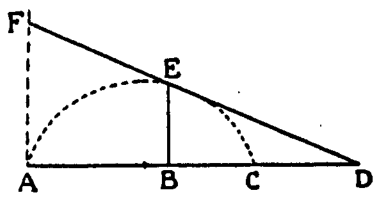


[Fig. 15].

Esto iam punctum D ad alias partes, lege praecedentem usque ad signum ✵ minor quam tripla. Ergo tota EG ad totam FO minor; ergo GA ad AE minorem habet rationem quam recta OB ad BF, sive recta DA ad AC minorem habet rationem quam cubus CB ad BD, unde est quod proctum (?).

[15] *Lemma.* Si primo ad secundum majorem habeat rationem quam tertia ad quartam, erit factum ab extremis maius quam factum a mediis.

[16] Esto ellipsis sive circulus cuius axis AC [Fig. 16]. Quaeritur maximum quod fiat ex recta AB in dignitatem BE, puta in cubum BE, esto maximum ABE ductaq. tangente FED erit DB ad BA tripla ex ostensis. Iam ut AD ad DC ita AB ad BC, et permutando DA ad AB ut DC ad CB. Qualium ergo partium tota AD est 20, talium AB erit 5, et BD, 15; sed DC ad CB est ut DA ad AB quadruplam, ergo CD est 12 et CB 3, ergo AB ad BC ut 5 ad 3.

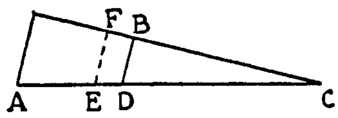


[Fig. 16].

Semper itaq. rationes partium diametri erunt he, in primo casu, hoc est dum ducitur recta in rectam ut $^3/_1$ dum ducitur recta in quadratum ut $^4/_2$ dum ducitur recta in cubum ut 5 ad 3.

[17] *Lemma.* Quando [Fig. 17] productum ex recta AD in cubum DB fuerit max. Dico AD ad DC esse subtriplam (1).

Nam, nisi sit, ponatur subtripla AE ad EC, ergo quod fit ex AE in cubum FC maximum erit. Sed quod fit ex AE in cubum EF ad quod fit ex AD in cubum DB est ut quod fit ex AE in cubum EC ad factum ex AD in cubum DC; ergo, factum ex AE in cubum EF, erit maxim. non autem factum ex AD in cubum BD. Quod suppositum est patet; nam factum ex AEC ad factum AED rationem habet compositam ex ratione EA ad AD et ex ratione cubi EC ad CD; eamdem habet factum AEF, ADB.

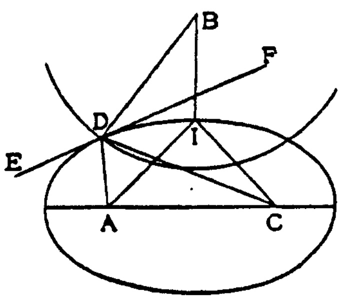


[Fig. 17].

De max. et min.

[18] (2) Sint data tria puncta ABC et tres rectae DA, DB, DC sint et sit minimus quantitatis trium. Dico [Fig. 18] tres angulos ad punctum D constitutos inter se aequales esse.

Si enim possibile est duo ex ipsis quicumq. sint ineaequales, ponanturque BDA, BDC, et ducta tangente ED (3), erunt certe aequales anguli EDA, FDC per 48. tertij Conic., ergo inaequales remanebunt reliqui BDE, BDF, et facto circulo



[Fig. 18].

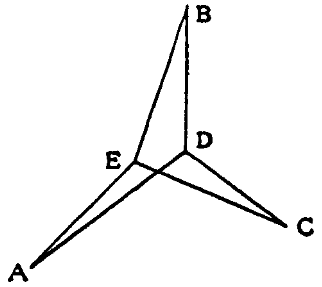
(1) La retta DB dev'essere parallela ad un lato del dato triangolo; per il massimo si esige che CD sia tripla di AD [G. L.].

(2) Questo problema venne proposto da Fermat: v. il § XXV del citato *Racconto* (queste *Opere*, T. III, p. 16) ed una lettera a M. A. Ricci del 7 novembre 1646 (id. p. 426). L'essenziale di quanto segue venne comunicato in compendio a V. Reinieri con lettere del 1o e degli 8 dicembre 1646 (id. p. 426 e 429) [G. L.].

(3) Qui manca l'indicazione che trattasi della tangente all'ellisse passante per il punto D ed avente per fuochi i punti A, C [G. L.].

centro B, intervallo BD, secabit huiusmodi peripheria ipsum ellipsim. Sumatur in arcu ellipseos intra circulum intercepto quodvis punctum I, et quia IB minor est semidiametro DB, et reliquae IA, IC reliquis DA, DC aequales per.... Conicorum, erunt tres IA, IB, IC minores tribus minimis DA, DB, DC. Quod est contra suppositum.

Compositio manifesta est, fietq. hoc modo. Sint data tria puncta A, B, C. Reperiatur (quando possibile erit) punctum D ad quod tres angulos aequales constituant rectae [Fig. 19] DA, DB, DC. Dico has rectas esse minimam quantitatem. Nam nisi sit minima quantitas, esto minima quantitas si possibile est EA, EB, EC. Ergo per praecedentem erunt ad punctum E tres anguli aequales, et in quadrilatero EADB quatuor anguli maiores 4 rectis etc.



[Fig. 19].

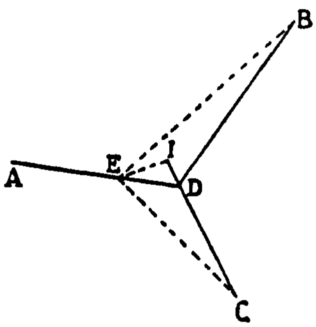
Quod peripheria circuli secet ellipsim potest ostendi.

Nam circulus omnino secabit rectam EF. Sed nisi secet ellipsim, quaelibet recta in segmento circuli DE ex puncto D aptata caderet in locum qui est inter curvam ellipticam suamque tangentem, quod est impossibile, p. .... Conicor.

[19] Sint data tria puncta A, B, C, dumodo nullum ex ipsis sit ad ang. etc. ut infra etc.

Inveniatur punctum D ex quo tres eductae AD, BD, CD faciant tres angulos inter se aequales. Dico tres eductos esse minimam quantitatem.

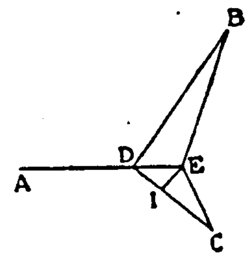
Nam si tres minimae non sunt ad D, erunt ad aliud punctum quod sit E, et ponatur [Fig. 20] E primum in una ex ipsis eductis. Producatur CD, et ex E emittatur perpendicularis EI, quae faciet triangulum rectangulum EID semissi trianguli aequilateri, cum angulus EDI sit 60 gr.; eritq. DI semissis ipsius DE, ergo, cum EC sit



[Fig. 20].

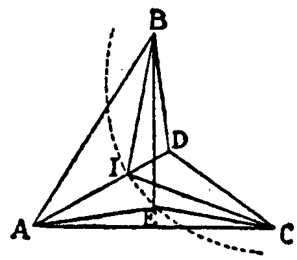
maior quam CI, erit EC maior quam CD una cum semisse DE; eodem modo erit BE maior quam BD una cum semissi DE, ergo, addita communi AE, erunt tres CE, BE, AE maiores quam CD, BD, AD. Quod etc.

Esto deinde [Fig. 21] E in producta AD, et ductis EB, EC, emissaque perp.li EI, erit EDI semitriangulum aequilaterum, cum angulus EDI sit gr. 60, propterea DI erit semissis ipsius DE. Iam si inaequalibus EC, CI aequales addantur, erit CE cum semisse ED, maior quam CID, eadem ratione erit BE cum semisse ED maior quam BD, additaq. communi DA erunt CE, BE, AE maiores quam CD, BD, AD.



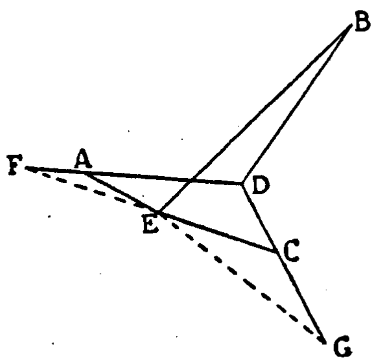
[Fig. 21].

Sint iam tria data puncta A, B, C ita constituta ut triangulum aequilaterum efficiant [Fig. 22]. Sitq. punctum D, ex quo tres eductae angulos aequales faciunt: quae si brevissimae non sint, sint quaelibet aliae tres ex quocunque puncto, puta E ubicumque sit. Fiat circa focos B, C, ellipsis quae transeat per E. (Quod fiet ponamus maiorem axem aequalem utrique BE, EC). Eruntq. BE, EC aequales duabus BI, IC; sed additis inaequalibus, erunt tres ad E, maiores quam tres ad I; sed ostendimus tres ad I maiores tribus ad D, ergo multo magis tres ad E maiores erunt quam tres ad D.



[Fig. 22].

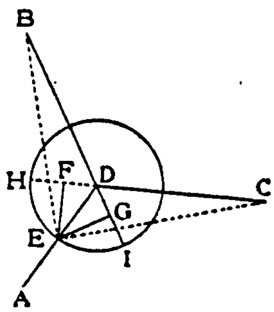
Iam sint puncta data A, B, C, utcumque; et punctum aequalium angulorum sit D. Sumatur quodlibet aliud punctum E [Fig. 23] extra ipsos eductos (nam quod esse non possit in eductis ostendimus iam). Producantur DF, DG aequales maiori quae sit BD, et connectantur lineae et erunt EAF, ECG et EB, maiores quam EF, EG, EB. Sed int. sunt maiores quam DF, DB, DG per praecedentem,



[Fig. 23].

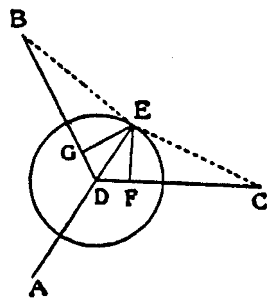
ergo multo magis EAF, ECG, EB maiores erunt quam DF, DB, DG, demptisque communibus AF, CG, patet propositum.

[20] *Alio modo sine ellipsi.* Esto tria data puncta A, B, C, et punctum ad quod fiunt aequales anguli sit D. Dico tres brevissimas esse AD, BD, CD.



[Fig. 24].

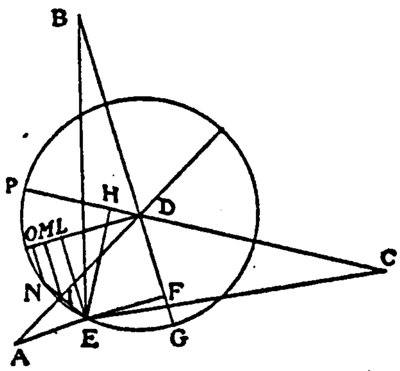
Nam si non sunt, erunt ad aliud punctum quod sit E et ponetur E primum [Fig. 24] in una ex ipsis AD; factoq. circulo et ductis perpendicularibus EG, EF, secabuntur bifariam HD, DI. Iam cum EC, EB sint maiorem quam CF, BG, addita communi erunt EC, EB, EA maiores quam CE, BG, EA, sive quam CD, BD, DA.



[Fig. 25].

Si vero [Fig. 25] ponatur E in producta, erunt EC, EB, EA maiores quam CF, BG, EA, hoc est quam CD, BD, DA.

Denique ponatur punctum E ubicumque intra spatia angulorum aequalium ad punctum [Fig. 26] D factorum, et facto circulo (1), productisq. tribus diametris quae sex angulos aequales constituent ad punctum D, demittantur ad eos diametros tres perpendiculares EF, EH, EI; et ipsa EI minima omnium perpendicularum producatur in N factocq. angulo QDO recto, demittantur tres perpendiculares EL, IM, NO quae in aritmetica ratione erunt, cum EN secta bifariam in I et ideo extremae EL, NO simul sumptae duplae erunt mediae IM. Sed etiam DI dupla est eiusdem IM cum IDN sit semi-



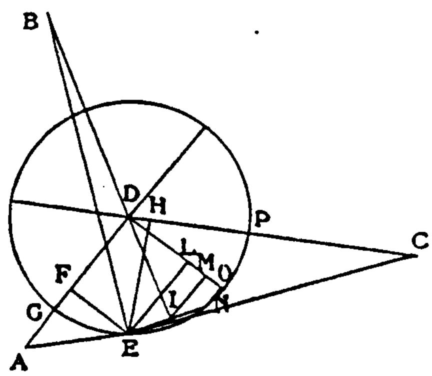
[Fig. 26].

(1) Col centro in D è con raggio DE [G. L.].

triangulum aequilaterum (est enim angulus IDM grad. 60 et IMD rectus); ergo DI aequalis est duabus EL, NO, sive FD, NO. Verum NO et DH sunt aequales (est NO sinus complementi arcus QN, cui aequalis est arcus EP, cuius sinus complementi est DH); ergo DI aequalis erit utriq. FD, DH.

Iam EC, EB, EA maiores sunt quam CH, BF, AI; opponuntur enim singulae angulis rectis quaelibet in suo A^{lo} (?); sed cum ostensum sit FD, DH aequales esse ipsi DI, erunt CH, BF, AI; aequales tribus CD, BD, AD. Propterea EC, EB, EA maiores erunt quam CD, BD, AD. Quod etc.

Vel: Iam recta DI aequalis est utriq. simul FD, DH; sumtisq. communibus DH, DC, IA, erunt DB, DC, DA aequales ipsis FB, HC, IA. Si ergo sumamus EB, EC, EA, quarum singulae sunt maiores singulis FB, HC, IA, cum unaquaeque in suo triangulo opponatur angulo recto, habebimus DB, DC, DA minores quam EB, EC, EA. Quod etc.



[Fig. 27].

In secunda vero figura [Fig. 27] erunt DF, DH simul aequales rectae DI; sumptisque communibus DB, HC, FA, erunt DA, DB, DC aequales tribus IB, HC, FA; si ergo sumamus EB, EC, EA quarum singulae sunt maiores singulis IB, HC, FA, cum opponantur angulis rectis, erunt DA, DB, DC minores ipsis EA, EB, EC (1).

[21] (2) *Propositum fuit Problema:* Datis tribus punctis, aliud punctum reperire, ex quo si ad data tria puncta tres rectae educantur, ipsae eductae sint minima quantitas.

Sint data tria puncta A, B, C et inveniatur punctum D ex quo tres eductae DA, DB, DC tres angulos inter se

(1) A questo punto sta scritto dal Torricelli:
« Protesto che non è riletta, nè rivista; però discrezione » [G. L.].

(2) Quanto segue costituisce una variante del n. prec.; al lettore riuscirà agevole il delineare le corrispondenti figure illustrative tenendo presente le antecedenti [G. L.].

aequales efficiant ad punctum D (qua ratione hoc fiat dicemus infra). Dico tres eductas DA, DB, DC, esse minimam quatitatem.

Nam sumatur quodcunq. aliud punctum praeter D, quod sit E. eritq. E vel in una ex nostris eductis, ut in prima figura [cfr. Fig. 23], vel in una ex ijsdem producta ultra D. ut in 2ª [cfr. Fig. 24], vel extra ipsas in spatium angulorum aequalium, ut in figura quae sequetur [cfr. Fig. 25]. Esto primum punctum E in ipsa AD ut in p.ma figura; factoq. centro D describatur circula peripheria per E; et ex E demittantur perpendiculares EF, EG, in ipsas CDH, BDI. Patet radij DH, DI, secabuntur bifariam in F et in G, quia cum ex suppositione tres anguli ADB, BDC, EDA sint equales inter se, erunt anguli ADH, ADI anguli trianguli equilateri, sive gr. 60. Propterea erit radius DE aequales utrisq. simul DF, DG; sumtisq. communibus EA, DB, DC, erunt DA, DB, DC, aequales ipsis EA, GB, FC. Sed EB maior est quam GB et EC maior quam FC, utraq. enim in suo triangulo opponitur angulo recto; ergo erunt DA, DB, DC, minores quam EA, EB, EC. Quod erat primo ostend.m etc.

In secundo vero casu et fig.ª erunt GB, FC minores quam EB, EC; utraq. enim, tam EB, quam EC in suo triangulo opponitur angulo recto; sumptisq. aequalibus hinc GD et DF, inde vero ED, erunt DB, DC minores quam EB, EC, ED, sumptaq. communi DA, erunt DB, DC, DA minores quam EB, EC, EA.

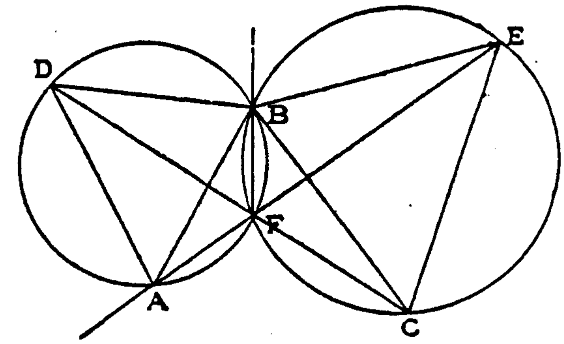
Ponatur tandem punctum E ubicumq. intra spatia angulorum aequalium ad punctum D factorum: et facto centro D describatur peripheria per E, productisq. tribus AD, BD, CD, habebimus ad centrum D sex angulos aequales, demittantur ex E ad singulos praedictorum diametrorum tres perpendiculares EI, EF, EH quarum minima EI producatur in N, factoq. angulo QDO recto demittantur ad DO tres perpendiculares EL, IM, NO, quae in arithmetica ratione erunt quandoquidem recta EN bifariam secatur in I, propterea extremae EL, NO simul sumptae duplae erunt mediae IM. Sed etiam DI dupla est eiusdem IM quia cum angulus IDM sit grad. 60, et IMD rectus, erit

IDM semitriangulum aequilaterum; ergo DI aequalis est duabus EL, NO, sive FD, NO; verum NO et DH sunt aequales (est enim NO sinus complementi arcus QN, cui aequalis est arcus EP, cuius sinus complementi est DH); ergo DI aequalis erit utrisq. FD, DH simul sumptis.

Iam in p.ª fig.ª (quando nempe minima perpendicularis EI cadit in una ex eductis non producta ultra centrum D qualis est AD). Recta DI aequalis est utrisq. simul FO, DH; sumptisque communibus DB, DC, IA; erunt DB, DC, DA aequales ipsis DB, HC, IA. Si ergo sumamus EB, EC, EA, quarum singulae sunt maiores singulis FB, HC, IA, cum unaquaeque in suo triangulo opponatur angulo recto, habebimus DB, DC, DA minores quam EB, EC, EA.

In secunda vero figura, quando minima perpendicularis EI cadit in una ex eductis protracta ultra centrum D, qualis est BDI, erunt DF, DH, simul sumptae aequales rectae DI, sumptisq. communibus DB, HC, FA, erunt DA, DB, DC, aequales tribus IB, HC, FA; si ergo sumamus EB, EC, EA, quarum singulae sunt maiores singulis IB, HC, FA; cum opponantur angulis rectis, erunt DA, DB, DE minores ipsis EA, EB, EC. Quod est etc.

[22] Quod promisimus ad initium, peragemus sic. Sint data [Fig. 28] tria puncta A, B, C, coniungantur ipsa puncta vel tribus, vel saltem duobus rectis lineis AB, BC, et factis triangulis aequilateris ADB, BEC, fiant circa ipsa duo circuli quorum peripheriae se mutuo secent in F. Dico iunctas AF, BF, CF tres angulos aequales inter se efficere. Anguli enim oppositi D et F quadrilateri ADBF in circulo descripti sunt aequales duobus rectis; sed angulus D est gr. 60, ergo AFB erit gr. 120. Eodem modo erit angulus BFC gr. 120, ergo et reliquus AFC erit gr. 120.

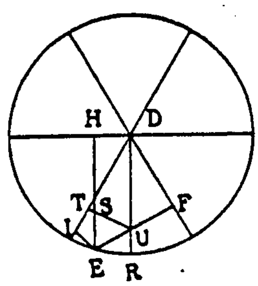


[Fig. 28].

Poterant etiam super rectis AP, BC describi segmenta circulorum capientia angulos grad.^{m} 120, et eadem evenissent.

[23] *Determinatio Problematis.* Quamquam Problema hoc universaliter proponatur ab autore, patet tamen determinatum esse. Nam, si data tria puncta connectamus lineis rectis triangulumq. efficiamus cuius nullus angulus contineat gr. 120, problema solubile erit. Sed quando aliquis angulus erit non minor gr. 120 punctum F praecedenti figurae non poterit haberi, alias enim sex anguli interni duorum triangulorum maiores essent quatuor rectis. In eo casu punctum maioris anguli improprie tamen quaesito satisfacit.

[24] Ma con molto maggior brevità mostreremo che la linea [Fig. 29] DI, è eguale alle due FD, DH insieme prese.



[Fig. 29].

Secetur bifariam angulus IDF et ABU ducatur ut perpendicularis ad DI; eritq., per 26 primi, FD aequalis ipsi TD. Superest ut ostendamus reliquam DH aequalem esse reliquae TI. Angulus FDU est grad. 30, ergo FUD erit gr. 60. Eadem ratione angulus DUS erit gr. 60, ergo reliquus SUE omnino gr. 60, erit, et cum rectae RD, EH sint parallelae, erit angulus UES aequalis angulo FUD, nempe gr. 60, quare triangulum ESU aequilaterum erit, cum habeat duos angulos grad. 60. Propterea ipsius altitudines, sive perpendiculares, sive catheti, aequales erunt, nempe TI, HD. Quod erat etc.