

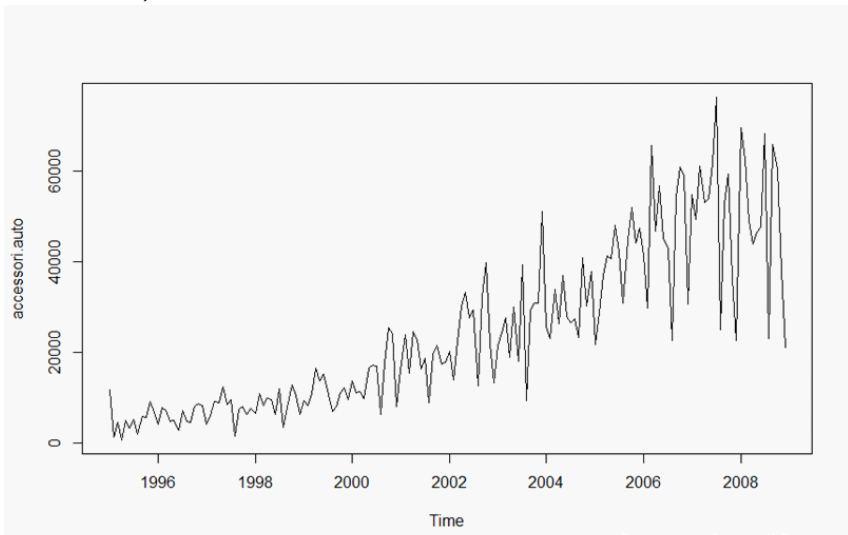
Probabilità, Statistica e Processi Stocastici

Franco Flandoli, Università di Pisa

Corso per la Scuola di Dottorato in Ingegneria

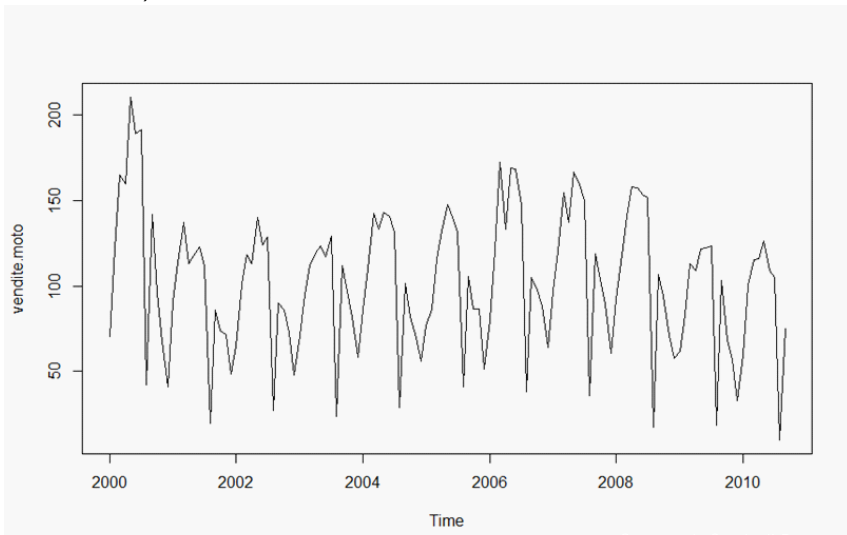
Esempio di serie storica

Esportazioni italiane di pezzi di accessori auto (trend accentuato, poca stagionalità)



Esempio di serie storica

Esportazioni italiane di motocicli (trend debole variabile, molta stagionalità)

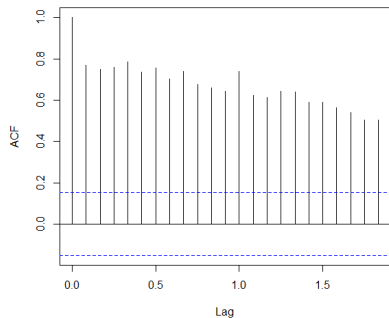


Analisi visive (richiamo lezione precedente)

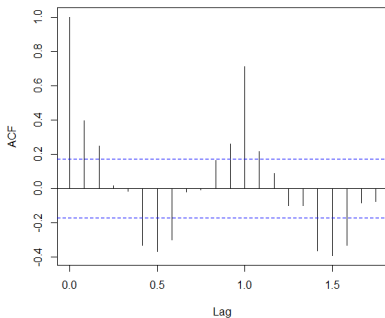
funzione di autocorrelazione

- quando c'è un forte trend, è tutta alta
- altrimenti i picchi indicano le periodicità

Series accessori.auto



Series vendite.moto

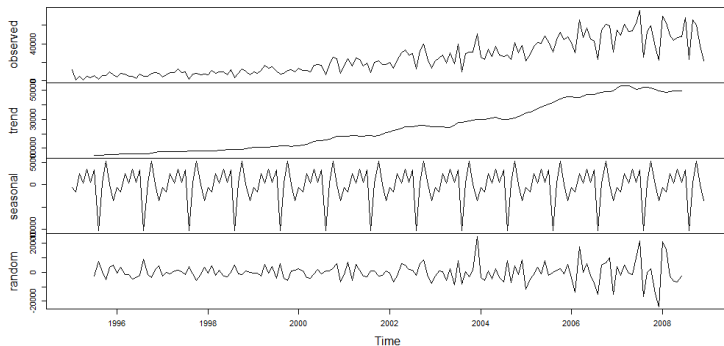


Analisi visive (richiamo lezione precedente)

decomposizione in trend, stagionalità e residui

- si può fare in modo semplice ed uniforme con `decompose`
- oppure in modo "locale" parametrizzato, con `stl`.

Decomposition of additive time series



Metodo di smorzamento esponenziale (SE) (richiamo)

Data la serie storica $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ si introduce una serie storica ausiliaria $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ che ha il seguente significato: p_{n+1} è la previsione, relativa al valore del tempo $n + 1$, effettuata al tempo n .

Si impone la formula iterativa

$$p_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha) p_n$$

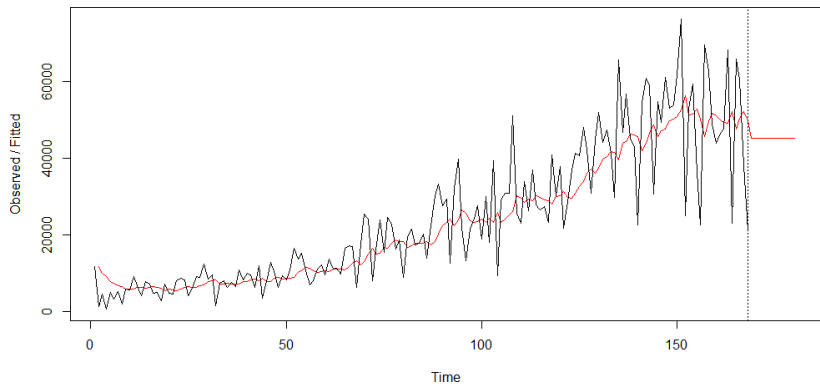
con inizializzazione $p_1 = x_1$.

Componente *innovativa* αx_n , componente *conservativa* $(1 - \alpha) p_n$. Si vedano le prestazioni negli esempi col software.

Metodo di smorzamento esponenziale

Scelta automatica dei parametri (minimi quadrati)

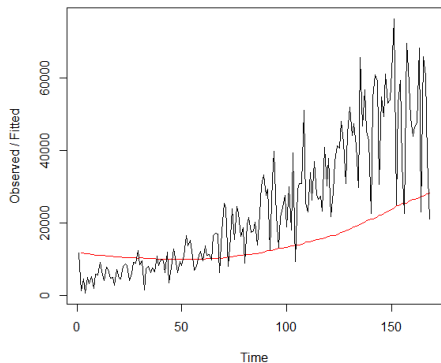
Holt-Winters filtering



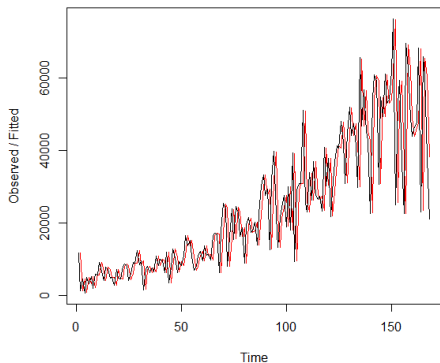
Metodo di smorzamento esponenziale

Scelta manuale dei parametri ($\alpha \sim 0$ e $\alpha \sim 1$)

Holt-Winters filtering



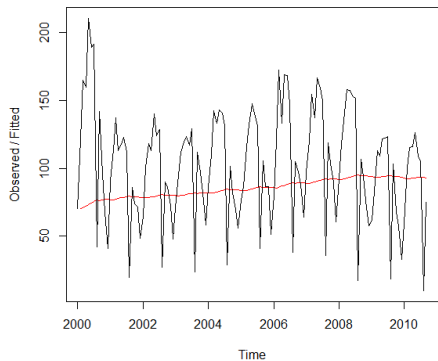
Holt-Winters filtering



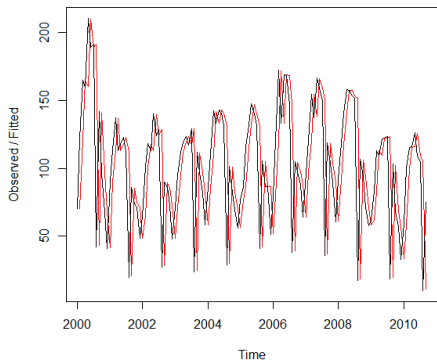
Metodo di smorzamento esponenziale

Scelta manuale dei parametri ($\alpha \sim 0$ e $\alpha \sim 1$)

Holt-Winters filtering



Holt-Winters filtering

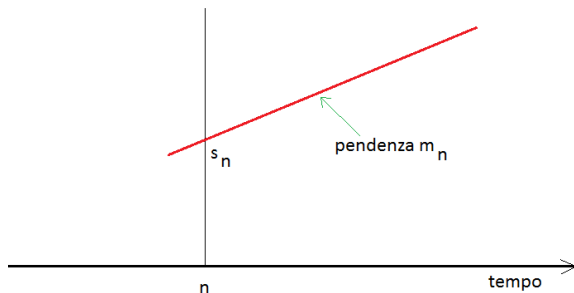


Metodo di smorzamento esponenziale con trend (SET)

Per catturare meglio il trend vengono introdotte due ulteriori serie ausiliarie $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ e $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ e si impone il modello di previsione

$$p_{n+k} = s_n + m_n \cdot k, \quad k = 1, 2, \dots$$

quindi dando a s_n il significato di "intercetta relativa al tempo n ", e ad m_n il significato di "pendenza relativa al tempo n ".

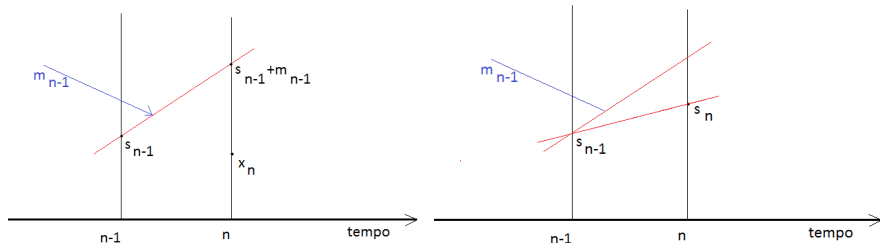


Metodo di smorzamento esponenziale con trend

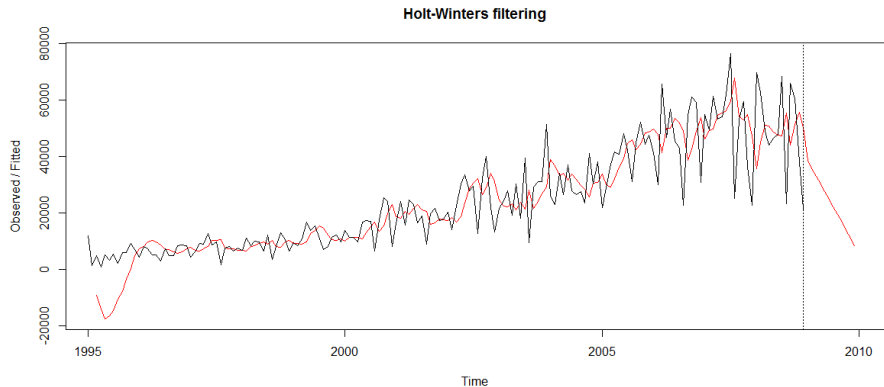
Le grandezze s_n ed m_n vengono "aggiustate" ricorsivamente tramite le relazioni

$$s_n = \alpha x_n + (1 - \alpha) (s_{n-1} + m_{n-1})$$
$$m_n = \beta (s_n - s_{n-1}) + (1 - \beta) m_{n-1}$$

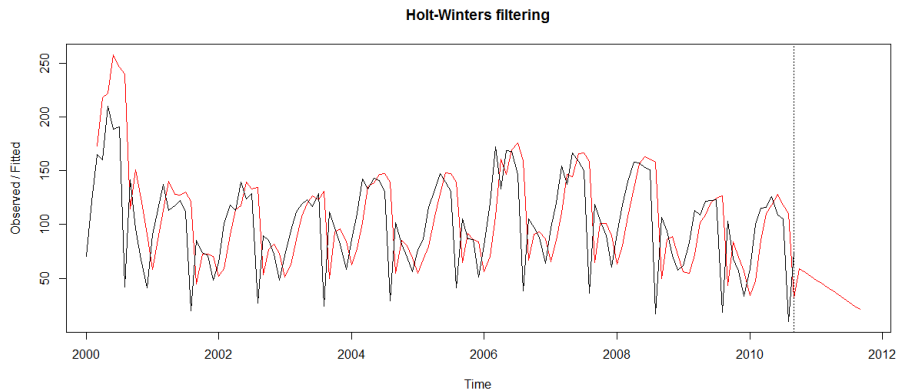
inizializzate di solito con $s_1 = x_1$, $m_1 = 0$ (pendenza neutrale).



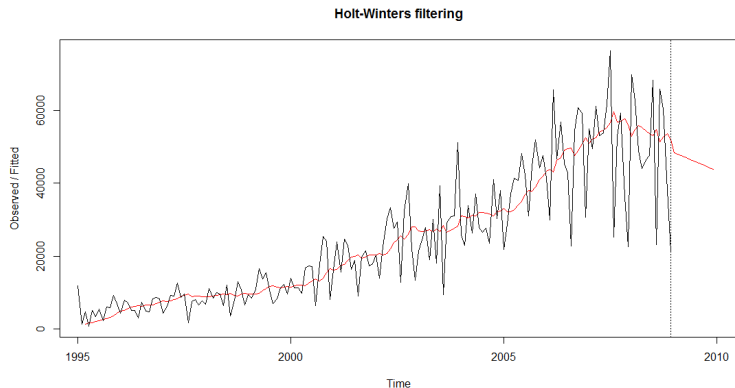
Cattura la pendenza in fase di previsione (forse troppo sensibile)



Può confondere la stagionalità con cambi di trend

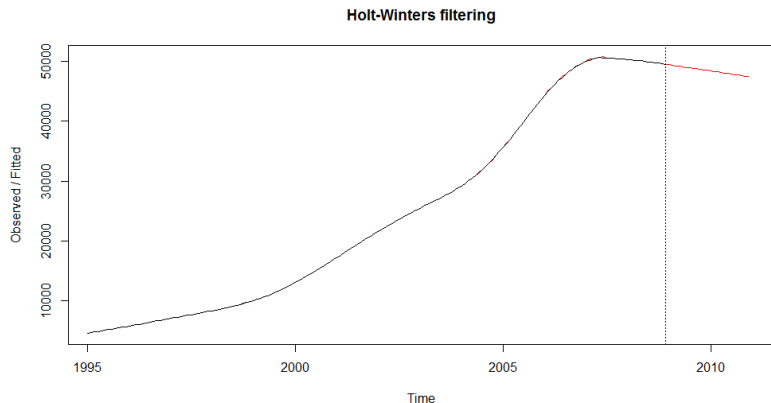


Per catturare e prolungare meglio il trend, conviene applicarlo con parametri conservativi
($\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$)



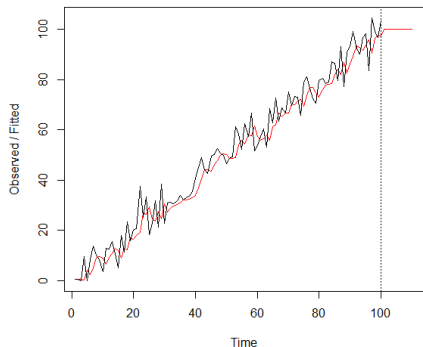
Nota (vedere scheda esercitazione): è stata inizializzata non di default.

Oppure si può applicare SET al trend trovato da stl (si osservi la coincidenza sulla parte nota)

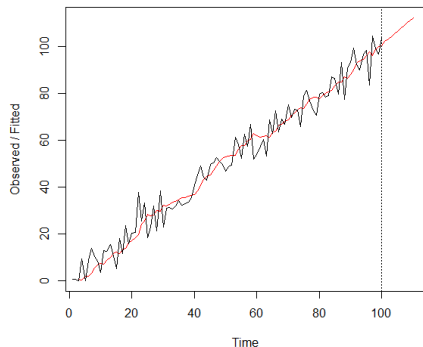


Confronto tra SE ed SET su una serie sintetica

Holt-Winters filtering



Holt-Winters filtering



Metodo di Holt-Winters (trend + stagionalità)

Per catturare anche l'eventuale stagionalità si introduce un'ulteriore grandezza ausiliaria $f(n)$, la stagionalità. Il periodo P deve essere specificato a priori.

Il modello di previsione è

$$p_{n+k} = s_n + m_n \cdot k + f(n+k), \quad k = 1, 2, \dots$$

dove $s_n + m_n \cdot k$ è la componente di trend e $f(n+k)$ è la componente di stagionalità.

Le grandezze s_n , m_n ed $f(n)$ vengono "aggiustate" ricorsivamente tramite le relazioni

$$\begin{aligned}s_n &= \alpha (x_n - f(n - P)) + (1 - \alpha) (s_{n-1} + m_{n-1}) \\ m_n &= \beta (s_n - s_{n-1}) + (1 - \beta) m_{n-1} \\ f(n) &= \gamma (x_n - s_n) + (1 - \gamma) f(n - P)\end{aligned}$$

inizializzate sprecando un intero periodo iniziale, dove viene prima trovato un trend medio tramite regressione, poi trovata la stagionalità per differenza (tra serie e trend). L'iterazione comincia dal passo $P \rightarrow P + 1$.

Metodo di Holt-Winters

La logica delle equazioni precedenti è la seguente.

Si presuppone un modello del tipo $x_n = t_n + f(n) + \text{errore}$ (t_n è il trend).

Si applica a t_n il metodo SET; quindi s_n ed m_n vanno pensati relativamente a t_n . Per questo

$$s_n = \alpha (x_n - f(n - P)) + (1 - \alpha) (s_{n-1} + m_{n-1})$$

$$m_n = \beta (s_n - s_{n-1}) + (1 - \beta) m_{n-1}$$

in quanto $x_n - f(n - P)$ è un modo di stimare t_n , tramite quantità note.

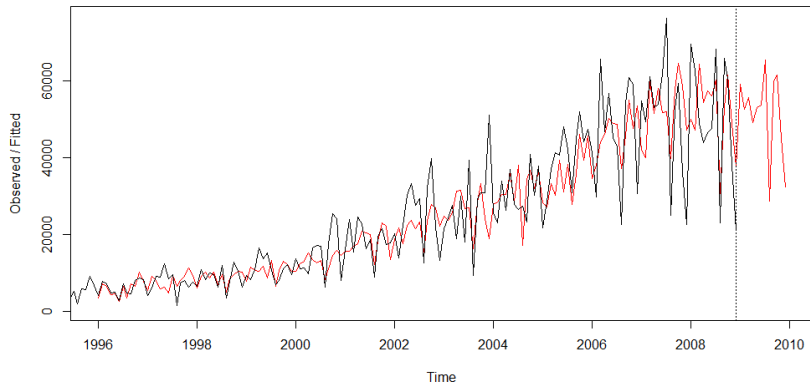
La formula

$$f(n) = \gamma(x_n - s_n) + (1 - \gamma)f(n - P)$$

deriva dal fatto che l'innovazione di f dovrebbe essere $x_n - t_n$, quindi si prende $x_n - s_n$.

Per serie storiche un po' ricche di trend e stagionalità, questo metodo ha spesso prestazioni straordinarie.

Holt-Winters filtering



Confronto tra il profilo predetto da HW e la componente stagionale di `s1t`

