LEZIONE II

LA RELATIVITA' RISTRETTA DI EINSTEIN

Nel suo famoso articolo del 1905. Einstein propose un punto di vista del tutto rivoluzionario. Partendo da un numero estremamente limitato di Postulati egli riuscì a formulare una nuova Meccanica, detta *Teoria della Relatività Ristretta*, in grado di spiegare compiutamente tutte le osservazioni sperimentali precedenti. I Postulati della teoria di Einstein sono:

1- ***Il Principio di Relatività (PR) è vero per tutte le leggi della fisica***. In particolare, esso è vero sia per i fenomeni meccanici che per quelli elettromagnetici. Dunque, la velocità della luce c deve essere la stessa in ogni riferimento inerziale.

2- ***Lo spazio vuoto è Isotropo ed Omogeneo.***: Questo significa che non esistono direzioni privilegiate (isotropia dello spazio) o punti privilegiati nello spazio (omogeneità dello spazio). Tutti i punti dello spazio vuoto sono equivalenti.

CRITICA AL CONCETTO DI TEMPO ASSOLUTO.

Sincronizzazione degli orologi in un Riferimento

Un aspetto fondamentale della nuova teoria è una revisione critica del concetto di tempo assoluto t. Noi, infatti, siamo portati naturalmente ad assumere che il tempo sia qualcosa di assoluto uguale per tutti e indipendente dal riferimento in cui esso viene misurato (in effetti, nella deduzione delle trasformazioni di Galileo per le velocità, avevamo fatto uso di questa ipotesi). Einstein ha fatto vedere che questo non è vero. Per capire come ciò possa avvenire è necessario ripensare a come si descrive il moto di un corpo (punto materiale). Per individuare la posizione spaziale P del corpo ad un dato istante di tempo t in un dato riferimento inerziale (ad esempio in una carrozza ferroviaria) noi dovremo, in primo luogo, fissare un sistema di Coordinate (ad es. Cartesiane Ortogonali). Ad ogni punto dello spazio assoceremo tre coordinate x,y,z: La coordinata x corrisponderà alla distanza del punto P dal piano yz e tale distanza verrà misurata, ad esempio, utilizzando un righello rigido opportunamente tarato. Analogamente si opererà per quanto riguarda le altre coordinate. In questo modo, ad ogni punto P possiamo associare univocamente tre coordinate Cartesiane x,y,z che individuano univocamente la sua posizione spaziale rispetto al riferimento considerato. Se si vuole sapere a quale istante di tempo t un corpo puntiforme si trova nel punto P individuato dalle coordinate x,y,z in un dato riferimento, basta posizionare nel punto considerato del riferimento un orologio e leggere il tempo t segnato da questo quando il corpo passa per il punto P cioè quando la sua posizione spaziale coinciderà con quella dell'orologio. Ovviamente, se, ad esempio, ci troviamo in una carrozza ferroviaria, l'orologio sarà posizionato in un punto della carrozza e si muoverà solidalmente con essa. Il moto di un qualunque punto materiale sarà interamente descritto nel nostro sistema di riferimento da tre funzioni del tempo $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ dove ribadiamo che t rappresenta il tempo misurato da un orologio posto nel punto dove si trova istantaneamente il corpo. Spesso nel seguito useremo la dizione compatta " un osservatore posto nel riferimento S misura le coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$" o frasi similari. L'uso della parola "**osservatore**", che viene spesso usata nella fisica Relativistica, può portare a fraintendimenti. Per questo motivo è bene ribadire qui, una volta per tutte, cosa si deve intendere con la frase ***"osservatore in un riferimento S "***: Con tale frase non si deve intendere una singola persona ma, in realtà, ***un riferimento ad ogni punto del quale siano associate tre coordinate x,y,z che ne individuano la posizione spaziale e un insieme di orologi sincronizzati fra di loro posti nei vari punti dello spazio***.

Adesso, supponiamo di aver disposto nei vari punti dello spazio di un dato riferimento (ad esempio, la carrozza del treno) orologi tutti perfettamente funzionanti (ad esempio, orologi atomici che assicurano precisioni elevatissime ed altissima ripetibilità). Nasce immediatamente un problema: perché la lettura del tempo fatta da orologi diversi sia significativa, bisogna che gli orologi siano tutti sincronizzati. Ma come facciamo a sapere se due orologi posti a grande distanza (ad esempio uno su un satellite ed uno a terra) sono effettivamente sincronizzati? La sincronizzazione degli orologi non porrebbe nessun problema se i due orologi potessero comunicare istantaneamente cioè utilizzando segnali in grado di raggiungere ogni punto in un intervallo di tempo nullo (velocità infinita). In tale caso, ad esempio, l'orologio posto a terra, appena segna un tempo $t=0$, potrebbe inviare un segnale ad un orologio su un satellite in modo che anch'esso si possa posizionare su $t = 0$. Se gli orologi sono identici e ben funzionanti, essi resterebbero perfettamente sincronizzati ad ogni istante successivo. Purtroppo questa procedura non è possibile perché i segnali che viaggiano più velocemente in natura sono i segnali elettromagnetici che, pur avendo una velocità altissima (c = 300000 km/s), impiegano un certo tempo per andare da un punto ad un altro. Dunque, per sincronizzare i nostri orologi dobbiamo ricorrere ad un'altra procedura facendo qualche assunzione. Un metodo che è concettualmente semplice per sincronizzare fra loro gli orologi posti in due *punti diversi* A e B nello spazio consiste nel porre una sorgente di onde elettromagnetiche (ad es. una lampadina) in un punto O che si trova esattamente nel punto di mezzo del segmento AB (vedi figura 1). Ad un dato istante, la lampadina viene accesa e un'onda luminosa inizia a propagarsi nello spazio. Se si fa l'ipotesi (in accordo con l'esperimento di Michelson) che la velocità della luce sia la stessa in qualunque riferimento e in qualunque direzione e verso (isotropia dello spazio), allora l'onda che si propaga da *O* ad *A* viaggerà con la stessa velocità di quella che si propaga da *O* a *B*. Dunque, l'onda raggiungerà gli orologi posti in *A* e *B* allo stesso istante. Allora, possiamo sincronizzare gli orologi facendo segnare loro lo stesso istante quando vengono raggiunti dall'onda luminosa. Questa procedura può essere ripetuta per ogni coppia di orologi e, in tal modo, il tempo in ciascun punto del riferimento sarà misurato dall'orologio posto in tale punto e sincronizzato con gli altri orologi del riferimento.

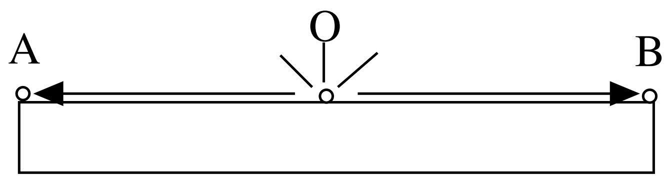

Figura 1

Per molti, questa procedura di sincronizzazione che è concettualmente semplice potrebbe risultare artificiosa e, in effetti, lo è. In realtà, si possono escogitare altre procedure più pratiche che sfruttano ancora le onde elettromagnetiche. Ad esempio, per sincronizzare un orologio a terra con un orologio su un satellite, quando l'orologio a terra segna $t = 0$ si può inviare da terra un'onda radio e, conoscendo la distanza *d* del satellite, si può facilmente calcolare l'intervallo di tempo $\Delta t = d/c$ dopo cui l'orologio sul satellite riceverà il segnale. Dunque, basterà posizionare al valore $t = d/c$ l'orologio sul satellite appena arriva il segnale elettromagnetico. Questa è, in effetti, la procedura che viene correntemente utilizzata per sincronizzare gli orologi sulla terra e sui satelliti. Si noti che anche questa procedura fa uso del fatto che la velocità della luce è costante in ogni riferimento e che essa non dipende dalla direzione e verso di propagazione. Questa procedura, richiede inoltre la conoscenza accurata del valore della velocità della luce. Un'incertezza Δc sul valore di c porta automaticamente ad una analoga incertezza Δt sulla sincronizzazione. Comunque, anche se sembrano apparentemente diverse, è importante sottolineare che queste due procedure di sincronizzazione sono del tutto equivalenti.

Esercizio: Lo studente provi a dimostrare l'equivalenza delle due procedure, cioè dimostri che, se due orologi sono stati sincronizzati con la prima procedura, allora lo risultano anche con la seconda.

Altre persone potrebbero pensare che esista un'altro modo di sincronizzare gli orologi meno ambiguo e che non necessita ipotesi a priori. Il modo è quello che ognuno di noi usa correntemente: si prendono due orologi identici e si portano nello "stesso" punto *A*, si confrontano le indicazioni degli orologi e si aggiusta l'indicazione del secondo orologio in modo che coincida con quella del primo. Adesso, uno degli orologi viene lasciato nel punto *A* , mentre l'altro viene portato in un punto *B*. Apparentemente, questa procedura sembra essere meno arbitraria delle precedenti perché non si fa nessuna ipotesi sulla propagazione della luce. In realtà non è così. Quando utilizziamo questa procedura, infatti, uno dei due orologi, inizialmente fermo, deve essere spostato da un punto ad un altro dello spazio facendolo prima accelerare per imprimergli una certa velocità e, poi, decelerare per fermarsi in *B*. Dunque, l'orologio si trova per qualche tempo in un sistema di riferimento accelerato. Chi ci assicura che il tempo che segnerà questo orologio quando viene nuovamente fermato in *B* sarà esattamente lo stesso che avrebbe potuto segnare se fosse sempre restato fermo in *A* ? Intuitivamente, ci si può aspettare che, se l'orologio viene trasportato molto lentamente dal punto *A* al punto *B* (quindi le accelerazioni iniziale e finale sono ridotte al minimo), il tempo da esso segnato sia quello "corretto". In effetti, partendo dalle equazioni della relatività che descriveremo nel seguito, si può dimostrare che due orologi che sono stati sincronizzati utilizzando quest'ultima procedura (spostamento con velocità infinitesima rispetto a quella della luce) risultano anche sincronizzati secondo le procedure precedentemente descritte. Dunque, anche questo metodo di sincronizzazione è equivalente a quelli precedenti che utilizzano le onde elettromagnetiche (nel limite in cui l'orologio si sposti molto molto lentamente !!!). Al contrario, se gli orologi vengono trasportati con velocità non del tutto trascurabili rispetto alla velocità della luce, la loro sincronizzazione non risulta più in accordo con quella ottenuta con le altre procedure descritte in precedenza. Questo è stato verificato sperimentalmente nel 1971 da Hafele e Keating. che hanno confrontato il tempo misurato da un orologio trasportato su un aeroplano con quello di un orologio a terra ed hanno trovato una differenza apprezzabile nelle letture dei due orologi Torneremo più tardi a descrivere questo importante esperimento ed interpretarne il risultato utilizzando la nuova meccanica relativistica.

***La simultaneità di due eventi non è un concetto assoluto*.**

Sulla base della nostra comune esperienza noi siamo portati a pensare che il tempo sia un concetto assoluto valido per qualunque "osservatore". In realtà, come mostrato da Einstein, questo non è vero. In particolare, se in un dato riferimento due eventi sono simultanei, essi possono non essere simultanei in un diverso riferimento inerziale. Per comprendere questo fondamentale aspetto, consideriamo due sistemi di riferimento. Ad esempio, il primo (*S'*) è solidale con una carrozza ferroviaria che viaggia lungo un asse *x* nel verso positivo, come mostrato schematicamente in figura 2, rispetto ad un riferimento (*S*) solidale con le rotaie. Consideriamo ora due punti *A*' e *B*' nei due estremi della carrozza e il punto *O'* al centro della carrozza. Supponiamo, inoltre che in *A*' e *B*' ci siano due lampadine solidali con il treno che vengono accese allo stesso istante nel treno, cioè quando due orologi sul treno posti in *A*' e *B*' segnano lo stesso tempo. Questo significa che, per un osservatore sul treno, l'accensione delle lampadine è stata simultanea. Per

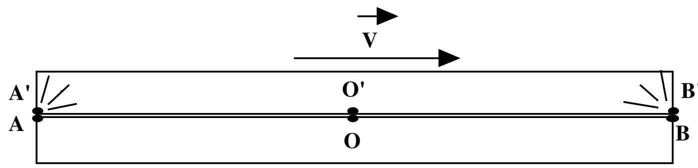

Figura 2a

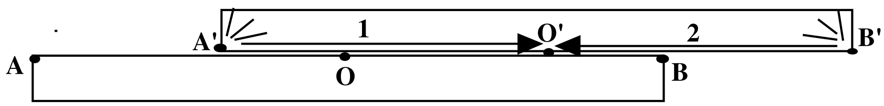

Figura 2b

quanto detto in precedenza, i segnali luminosi dovranno dunque, raggiungere nello stesso tempo il centro *O'* della carrozza. Vediamo, ora come viene descritto lo stesso fenomeno (accensione delle due lampadine) nel riferimento solidale con le rotaie. In questo riferimento le lampadine si accendono quando i punti *A'* e *B'* sul treno coincidono con due punti *A* e *B* fissi sulle rotaie (figura 2a). Dopodiché, le onde luminose iniziano a viaggiare con velocità *c*. Quando i due segnali luminosi si incontrano in *O'*, il raggio 1 emesso da *A'* avrà percorso il tratto indicato dalla freccia 1 in figura 2b, mentre quello emesso da *B'* avrà percorso il tratto indicato dalla freccia 2 in figura 2b. Tuttavia, poiché il treno si muove, il punto *O'* non coinciderà più con il punto *O* centrale fra *A* e *B*, ma si sarà spostato verso destra. Ma allora i segnali luminosi che erano stati emessi simultaneamente sulla carrozza, non possono essere simultanei nel riferimento solidale con le rotaie. Guardando la figura 2b, risulta infatti evidente che, quando il segnale emesso da *A'* raggiunge *O'* esso deve essere passato prima da *O* (freccia 1), mentre quello emesso da *B'* non ha ancora raggiunto *O*. In conclusione nel riferimento delle rotaie le due lampadine si accendono quando si trovano in *A* e *B* ma i segnali da esse emessi non raggiungono simultaneamente il punto centrale *O*. Si deve concludere, perciò, che nel riferimento delle rotaie le lampadine non si accendono simultaneamente ma, al contrario, prima si accende la lampadina in *A* e, poi, quella in *B*. In conclusione*, due eventi che sono simultanei in un dato sistema di riferimento inerziale non lo sono in un altro sistema, dunque la simultaneità di due eventi che avvengono in punti distinti dello spazio non rappresenta un fatto assoluto ma è relativo al sistema di riferimento*. Ma, se nel treno le lampadine sono accese nello stesso istante, vuol dire che sono accese quando i due orologi posti agli estremi *A'* e *B'* della carrozza segnano lo stesso tempo ($t'_{A'} = t'_{B'}$). Allora, se nel riferimento a terra gli eventi appaiono non simultanei questo vuol dire che gli orologi posti a terra nei punti *A* e *B* segnano tempi t_A e t_B diversi fra loro e, quindi,almeno uno dei due tempi dovrà differire dai tempi misurati dagli orologi in *A'* e *B'*. Il tempo segnato dagli orologi non è, perciò, un tempo assoluto ma è relativo al sistema di riferimento. E' importante osservare che, per il nostro ragionamento, i due sistemi (carrozza ferroviaria e rotaie) sono equivalenti. Noi avremmo potuto ripetere lo stesso ragionamento al viceversa ponendo le due lampadine a terra nei punti A e B e accendendole simultaneamente nel riferimento delle rotaie ($t_A = t_B$). In questo caso, se indichiamo ancora con *A'* e *B'* due punti della carrozza che coincidono con *A* e *B* al momento dell'accensione delle lampadine, i tempi di accensione misurati sul treno appariranno diversi.

Esercizio: Lo studente ripeta il ragionamento nel caso in cui le lampadine sono a terra nei punti *A* e *B* e vengono accese allo stesso istante (nel riferimento della terra) e mostri che, questa volta, nel riferimento della carrozza è la lampadina in *B* che si accende prima di quella in *A*.

La relatività del concetto di simultaneità ha anche un'importante conseguenza: **la lunghezza di un regolo misurata in sistemi di riferimento diversi può dipendere dal sistema di riferimento**. Consideriamo, ad esempio, un regolo di lunghezza 1 m disposto lungo un dato *x* su un treno che viaggia con velocità costante lungo l'asse *x*. Un "osservatore" posto sul treno misurerà facilmente la lunghezza del regolo confrontandolo con un regolo campione opportunamente tarato. Ben diversa è l'operazione che si deve fare se ci troviamo nel riferimento solidale con la terra. In questo riferimento, il regolo si sta muovendo lungo l'asse *x*. Dunque, i suoi estremi si spostano al passare del tempo. Per misurare la lunghezza, bisogna perciò misurare la distanza fra gli estremi *A* e *B* del regolo <u>ad uno stesso istante</u>. Ma abbiamo visto sopra che " lo stesso istante" è un concetto relativo che cambia da riferimento a riferimento. Appare, perciò, evidente che, non solo i tempi misurati cambiano da riferimento a riferimento, ma anche le lunghezze misurate.

In conclusione, nel descrivere il moto di un corpo in un dato riferimento S, si deve in primo luogo definire un sistema di assi Cartesiani x,y,z e associare ad ogni punto dello spazio tre numeri che corrispondono alle coordinate Cartesiane. Il moto del corpo sarà, quindi, univocamente determinato se si conoscono le coordinate Cartesiane x, y,z che individuano la posizione istantanea del corpo e il tempo t misurato da un orologio fisso nel riferimento che si trova nel punto dove si trova istantaneamente il corpo. Dunque, sono necessari i quattro parametri x,y,z,t. La stessa cosa dovrà fare un "osservatore" che si trovi in un altro riferimento inerziale S'. Anche in questo caso, il moto del corpo sarà descritto completamente se si conoscono le coordinate spaziali x',y',z' e il tempo t' misurato da un orologio posto in x',y',z' e solidale con il riferimento S'. A differenza di quanto si assumeva nella Fisica Classica, però, i tempi t' e t misurati in uno stesso punto nei due riferimenti sono diversi!!!

Cosa è relativo e cosa è assoluto

Abbiamo visto che, non solo le coordinate x,y,z con cui individuiamo la posizione di un corpo nello spazio, ma anche l'istante di tempo t in cui esso occupa quella posizione non sono parametri assoluti ma dipendono dal sistema di riferimento scelto per descrivere il moto. Questo fatto potrebbe generare l'idea sbagliata che tutto sia relativo. In realtà, dobbiamo rimarcare che ci sono alcuni fatti, invece, che sono veri per qualunque "osservatore" e, in particolare, sono le **coincidenze spazio temporali.** Queste si verificano quando due corpi, durante il loro moto, si incontrano in uno stesso punto A nello spazio. In tal caso, infatti, al momento dell'incontro, qualunque sia il sistema di riferimento considerato, le coordinate x_1,y_1,z_1 e x_2,y_2,z_2 dei due corpi in un riferimento inerziale dovranno risultare le stesse (i due corpi si trovano nello stesso punto) e anche i tempi t_1 e t_2 in cui i due corpi arrivano ad incontrarsi (su ogni riferimento,questo tempo è misurato da un **unico orologio** posto nel punto di incontro). Nel passare ad un altro riferimento, cambieranno completamente i valori delle coordinate spaziali e temporali che individuano i corpi che diventeranno,rispettivamente, x'_1,y'_1,z'_1, t'_1 e x'_2,y'_2,z'_2, t'_2 , ma anche in questo caso le coordinate spaziali e temporali dei due corpi dovranno avere lo stesso valore. Dunque, il fatto che due corpi si trovino nello stesso punto allo stesso tempo risulta un ***evento fisico*** cioè un fatto oggettivo vero per qualunque "osservatore". Al contrario, le coordinate spaziali e temporali che individuano la posizione di un corpo ad un dato istante sono dei parametri relativi al sistema di riferimento scelto. Che le coordinate spaziali x,y,z, con cui rappresentiamo la posizione di un punto P nello spazio non abbiano un significato assoluto è evidente per tutti. E' ovvio, infatti, che se cambiamo il sistema di assi (ad esempio con una rotazione) lo stesso punto P che era individuato dalle coordinate x,y,z sarà individuato da coordinate x',y',z' completamente diverse (vedi equazioni (10)-(12) in Lezione I). La rivoluzione di Einstein è stata quella di aver mostrato che anche il tempo t non è un parametro assoluto ma dipende dal sistema inerziale scelto

LA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ.

La trasformazione di Galileo fra due sistemi inerziali in moto relativo [eq.(23) lezione I] era stata dedotta facendo l'assunzione implicita che il tempo misurato e le lunghezze siano le stesse in ogni riferimento. Per quanto visto sopra, questo non è vero. In particolare, quando si passa da un riferimento S ad un altro (S') in moto rispetto al primo, non solo i valori delle coordinate spaziali verranno cambiati ma anche quelli del tempo. La posizione di un dato corpo ad un dato istante sarà individuata da 4 coordinate spazio-temporali: le tre coordinate spaziali x,y,z e il tempo t misurato dall'orologio che si trova nello stesso punto. In un diverso sistema (S'), le nuove coordinate spazio-temporali saranno x',y',z',t'. Ci chiediamo, perciò, quale sia la legge di trasformazione che permette di trovare le coordinate spazio-temporali x',y',z',t' in S' a partire dai valori x,y,z, t determinati in S.

Consideriamo due sistemi di riferimento S *e* S' di origini in O e O' e con assi Cartesiani x,y,z e x',y',z'. Il tempo misurato nei due sistemi è t e t'. Senza perdere in generalità, si assume che al tempo t =0 le origini coincidono e che il sistema S' trasla lungo l'asse x con velocità v rispetto ad S. Gli assi omologhi (x e x', y e y' …) sono a due a due paralleli (vedi Figura 3).

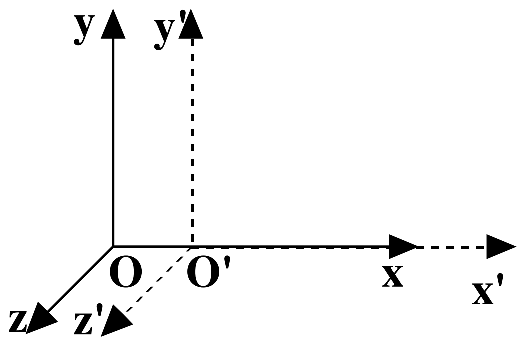

Figura 3

Einstein fece solamente 2 ipotesi o postulati: **1)** vale il *principio di Relatività* per tutte le leggi della Fisica e, in particolare, la velocità della luce è sempre pari a c in qualunque riferimento inerziale, **2)** lo *spazio è isotropo ed omogeneo*. Con queste sole ipotesi, egli è stato in grado di trovare la nuova trasformazione. Qui omettiamo, per brevità, la dimostrazione delle nuove leggi di trasformazione e ci limitiamo a riportare il risultato. Le coordinate spazio-temporali nel sistema *S'* sono legate a quelle in *S* dalle relazioni:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (1)$$

$$y' = y \qquad (2)$$

$$z' = z \qquad (3)$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (4)$$

Risulta utile definire i parametri adimensionali:

$$\beta = v/c \qquad \text{e} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (5)$$

Storicamente, queste equazioni erano state dedotte verso la fine dell'800 da Lorentz e per questo sono note come **Trasformazioni di Lorentz**. Queste equazioni, però, erano state dedotte sulla base di un modello completamente diverso in cui si assumeva l'esistenza di un etere elettromagnetico e dove v rappresenta la velocità del sistema rispetto all'etere. Nella Teoria della Relatività, invece, non c'è nessun ruferimento privilegiato (Etere) e la velocità che compare nelle relazioni (1) e (4) è la velocità relativa di un riferimento rispetto all'altro.

Utilizzando questi parametri, le relazioni (1)-(4) si scrivono nela forma compatta:

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad (6)$$
$$y' = y \qquad (7)$$
$$z' = z \qquad (8)$$
$$t' = \gamma(t - \beta x / c) \qquad (9)$$

La coordinata temporale t e quelle spaziali x,y e z hanno dimensioni fisiche diverse. Questo è il motivo delle differenze fra la (6) e la (9). D'altra parte, la teoria relativistica mostra che le coordinate spaziali e temporali non sono indipendenti ma si trasformano le une nelle altre come descritto dalle relazioni (6)-(9). Sembra, perciò, conveniente definire la coordinata temporale t nella stessa unità delle lunghezze, cioè in metri. Questo si ottiene definendo il nuovo tempo $\tau = ct$ che ha dimensioni di una lunghezza. La nuova unità di tempo τ =1m è legata al tempo t espresso in secondi dalla relazione 1 m = $c\ t$ da cui si deduce t = 1m / (300000000 m/s) = 3.33333 ns. Dunque, la nuova unità di tempo corrisponde al tempo che occorre alla luce per percorrere uno spazio di un metro. Un tempo di 300000 km corrisponderà, quindi, ad un secondo. In tale sistema di unità, la velocità di un corpo, che è il rapporto fra lo spostamento (m) e il tempo (m), diventa pari al parametro adimensionale β. Infatti, la velocità è definita come $V = ds/ d\tau = ds/(cdt) = (1/c)ds/dt = v/c = \beta$. Sin noti che, con questa scelta, la velocità della luce diventa $V_L = c/c = 1$. Sostituendo nelle (6)-(9) $t = \tau/c$ e $t' = \tau'/c$, esse si riducono a due espressioni del tutto simmetriche nello scambio di x con τ e x' con τ' e facili da ricordare:

$$x' = \gamma(x - \beta\tau) \tag{10}$$
$$y' = y \tag{11}$$
$$z' = z \tag{12}$$
$$\tau' = \gamma(\tau - \beta x) \tag{13}$$

Si noti che, per rendere le unità di misura di tempo e di lunghezza uguali avremmo potuto anche decidere di lasciare l'unità di tempo in secondi e misurare le lunghezze in secondi (secondi luce). 1 secondo luce corrisponde allo spazio percorso dalla luce in un secondo, cioè circa 3000000 km.

Le equazioni (6)-(9) possono essere facilmente invertite, cioe' con semplici passaggi algebrici si possono ricavare i valori delle coordinate x,y,z,t nel riferimento S in funzione di x',y',z',t' in S'. Con semplici passaggi si trova (lo studente faccia i passaggi per esercizio tenendo presente la definizione di β e γ in eq.(5)):

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \tag{14}$$
$$y' = y \tag{15}$$
$$z' = z \tag{16}$$
$$t = \gamma(t' + \beta x'/c) \tag{17}$$

Come si vede, la differenza con le (6)-(9) è solamente nel fatto che le variabili accentate si sono scambiate con le altre e che il segno con cui appare la velocità è cambiato. Infatti, avremmo potuto ottenere le (14)-(17) anche osservando che, se S' si muove con velocità pari a v lungo x rispetto a S, allora S si muove rispetto ad S' con velocità - v. Dunque, le leggi di trasformazione da S' in S si possono anche trovare utilizzando le (6)-(9) con - v che sostituisce v e con le coordinate accentate che si scambiano con quelle non accentate.

Come vedremo nel seguito, il coefficiente adimensionale γ definito in eq.(5) gioca un ruolo molto importante nella Teoria della Relatività. E' dunque importante che lo studente cerchi di memorizzare la sua dipendenza da β. Alcuni valori di γ sono riportati sotto per vari valori di $\beta = v/c$:

$\beta = 0$ $\quad \gamma=1$

$\beta = 0.01$ $\quad \gamma=1.00005$

$\beta = 0.1$ $\quad \gamma=1.005$

$\beta = 0.5$ $\quad \gamma=1.15$

$\beta = 0.9$ $\quad \gamma=2.29$

$\beta = 0.99$ $\quad \gamma=7.08$

Si consiglia allo studente di riportare i valori precedenti in un grafico per visualizzare l'andamento di γ. Come si vede, per velocità molto piccole rispetto a quella della luce ($\beta << 1$), γ è praticamente uguale ad 1. Al contrario, quando β si avvicina ad 1, γ cresce rapidamente e tende ad un valore infinito quando β tende ad 1. Per $\beta > 1$, cioè $v > c$, il termine sotto radice in eq.(5) diventa negativo e γ non è più definito (nel campo dei numeri reali). Tuttavia, questo non porta a nessuna contraddizione perchè, come vedremo nel seguito, nessun corpo materiale dotato di massa può raggiungere o superare la velocità della luce. Dunque, ***la velocità della luce rappresenta un valore limite di velocità per qualunque corpo materiale*** dotato di una massa finita.

Le leggi di Galileo come limite per *v/c* $\rightarrow$ 0.

Ovviamente, noi sappiamo che le leggi classiche di Galileo riescono a descrivere in modo piuttosto accurato il moto dei corpi che sono oggetto delle nostre comuni osservazioni (automobili, aerei...) e che sono caratterizzati da velocità enormemente più piccole di quelle della luce. Questo lo sanno bene, ad esempio, i piloti di navi ed aerei che utilizzano correntemente le leggi di Galileo di composizione delle velocità [eq.(10)-(13)] per stabilire con grande precisione la rotta della nave o dell'aereo tenendo conto della velocità di trascinamento del mare o dell'aria. Dunque, un requisito fondamentale che devono soddisfare le nuove equazioni è che esse siano praticamente coincidenti con le relazioni di Galileo nel limite $v/c \ll 1$. Per comodità, riportiamo qui sotto le relazioni di Galileo che avevamo trovato nella Lezione I..

$$x' = x - vt \tag{18}$$

$$y' = y \tag{19}$$

$$z' = z \tag{20}$$

$$t' = t \tag{21}$$

E' facile verificare che le relazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo nel caso $v/c \ll 1$. Infatti, se $v/c \ll 1$, allora $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ è praticamente uguale ad 1 e vx/c^2 è praticamente uguale a zero. Dunque, gli effetti relativistici diventano rilevanti solamente se le velocità relative dei riferimenti sono confrontabili con quelle della luce c = 300000 km/s. Vogliamo ancora enfatizzare il fatto che, nella nostra comune esperienza di vita, questa condizione è sempre ben verificata. Anche l'aereo supersonico più veloce raggiunge al massimo velocità dell'ordine di 3600 Km/h=1 Km/s, dunque $\beta = v/c$ =1/300000=0.00000333.. e γ = 1.0000000000055 che è quasi coincidente con 1. Le differenze fra le previsioni della fisica Classica e quella Relativistica sono, perciò, estremamente piccole in questi casi mentre diventano fondamentali per la comprensione della fisica delle particelle elementari. Queste particelle infinitesime vengono emesse continuamente dal sole o dalle altre stelle e arrivano sulla terra con velocità spesso vicine a quelle della luce. Oggi, grazie all'utilizzo di macchinari complessi, detti acceleratori di particelle, è possibile produrre tali particelle anche sulla terra e accelerarle fino a raggiungere velocità confrontabili con quella della luce. Grazie a questi complessi macchinari, è stato possibile effettuare verifiche estremamente accurate delle previsioni della Fisica Relativistica di Einstein.

Come vedremo nel seguito, grazie anche alle tecnologie estremamente raffinate che sono state svilupppate in questo secolo, alcuni effetti relativistici giocano oggi un ruolo importante anche per la vita di tutti i giorni. Ad esempio, come vedremo nel seguito, la grande precisione con cui oggi il GPS permette di localizzare un punto sulla terra non sarebbe possibile senza l'applicazione delle leggi della Relatività (sia quella Ristretta che quella Generale).

CONSEGUENZE DELLE LEGGI DI TRASFORMAZIONE

Le nuove leggi di trasformazione prevedono nuovi fenomeni eclatanti quando si considerino sistemi di riferimento in moto relativo l'uno rispetto all'altro. In particolare:

1- La dilatazione dei tempi.

Vediamo ora come variano gli intervalli di tempo misurati passando da un riferimento all'altro. Consideriamo, ad esempio, un'orologio O fisso in un punto nel sistema S' che si muove rispetto a S con velocità v lungo x (vedi figura 4). Nel riferimento S', l'orologio è fisso e, quindi, la sua coordinata x' avrà un valore costante nel tempo e il tempo segnato dall'orologio sarà proprio il tempo t' misurato nel punto fisso x'. Indichiamo con t'_1 e t'_2 il tempo segnato dall'orologio in due istanti successivi. Nel riferimento S, invece, l'orologio si muove con velocità v lungo x. Dunque, quando l'orologio O segna il tempo t'_1, esso si trova in un dato punto A individuato dalla coordinata x_1 dove c'è un orologio che segnerà il tempo t_1 (fig.4a), mentre quando segna il tempo t'_2 esso si troverà in un diverso punto B individuato dalla coordinata x_2 dove ci sarà un altro orologio che segna t_2 (fig.4b).

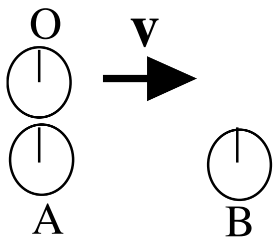

Figura 4a

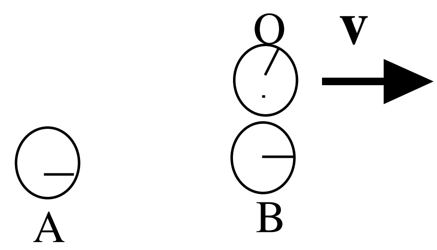

figura 4b

Quando l'orologio si trova in x_1 al tempo t_1, il tempo t'_1 da esso misurato si ricava utilizzando la (4):

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (22)$$

Mentre, quando l'orologio si trova in x_2 al tempo t_2, il tempo t'_2 da esso misurato è:

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (23)$$

Sottraendo membro a membro la (22) dalla (23) si ottiene:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (24)$$

dove $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ e' l'intervallo di tempo misurato dall'orologio *O* che sta fermo in *S'*, mentre $\Delta t = t_2 - t_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$ sono, rispettivamente, la differenza di tempi misurati dai due orologi posti nei punti *B* e *A* in figura 4 nel sistema di riferimento fisso *S* e la distanza fra i due punti nel riferimento *S*. D'altra parte, se l'orologio *O* viaggia con velocità *v*, allora $\Delta x = v\,\Delta t$. Sostituendo tale espressione nella (24) si trova, dopo semplici passaggi:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_0 \qquad (25)$$

Dunque, abbiamo trovato che l'intervallo di tempo Δt che viene misurato nel sistema di riferimento in cui l'orologio *O* viene visto muoversi è sempre maggiore (γ in eq.(25) è ≥ 1) del valore Δt_0 misurato dall'orologio *O*. Questo risultato in letteratura è noto come **dilatazione relativistica dei tempi**.

E' importante rimarcare che c'è una differenza sostanziale fra gli intervalli di tempo Δt_0 e Δt che appaiono nell'equazione (25). L'intervallo di tempo Δt_0, infatti, è il tempo misurato da un unico orologio *O* e, quindi, non è in nessun modo influenzato dalle procedure di sincronizzazione. Per questo motivo questo tempo gioca un rilievo particolare nella teoria viene detto ***tempo proprio***. L'intervallo di tempo Δt, invece, è quello misurato da due orologi diversi (posti nei punti *A* e *B* in figura). Questo tempo, quindi, dipende fortemente da come gli orologi del riferimento sono stati sincronizzati fra di loro. Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto se si fosse considerato un orologio fisso nel sistema *S* e si fosse cercato di determinare quale è il rapporto fra l'intervallo di tempo proprio Δt_0 misurato da questo orologio e il valore Δt misurato da due orologi diversi in S'. In questo caso si sarebbe dovuta utilizzare la (17) invece della (4) e si sarebbe ancora ottenuto la (25).

Esercizio : Lo studente ritrovi la (25) nel caso in cui l'orologio sia fermo nel sistema S invece che in S'.

La Contrazione delle Lunghezze Longitudinali.

Un'altra importante conseguenza delle relazioni di Lorentz riguarda le lunghezze. Supponiamo, ad esempio, di avere un treno (sistema S') che viaggia con velocità v lungo l'asse x rispetto alla terra (S) e supponiamo di aver adagiato un regolo di lunghezza L_0 allineato lungo l'asse x con le estremità in x'_1 e x'_2 ($x'_2 - x'_1 = L_0$). In figura 5 è mostrata schematicamente la situazione sopra descritta.

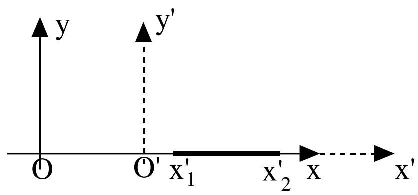

Figura 5

Un osservatore sul treno potrà facilmente misurare la lunghezza L_0 del regolo confrontandolo con un regolo campione. Nel sistema della terra (S) il regolo, invece, si sposterà con velocità v lungo x. Per misurare la lunghezza L del regolo in tale riferimento si dovranno, perciò, trovare le posizioni dei suoi estremi x_1 e x_2 allo stesso istante t. L'equazione di Lorentz da utilizzare ora è la (1) che lega i valori di x_1 e x_2 a quelli di x'_1 e x'_2.

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (26)$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (27)$$

Adesso i valori di x_1 e x_2 sono misurati allo stesso istante t e, quindi, si deve porre $t_1 = t_2 = t$ nelle equazioni (26) e (27). Dunque, sottraendo la (26) dalla (27) e ponendo $L = x_2 - x_1$ e $L_0 = x'_2 - x'_1$, si trova dopo semplici passaggi algebrici:

$$L = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L_0 = \frac{L_0}{\gamma} \qquad (28)$$

Essendo $\gamma \geq 1$ la lunghezza del regolo appare contratta nel riferimento in cui esso si muove con velocità v. Questo effetto è noto con il nome di *contrazione relativistica delle lunghezze* nella direzione del moto. Anche in questo caso, dobbiamo rimarcare che c'è una differenza sostanziale fra L_0 e L. Infatti, L_0 rappresenta la lunghezza del regolo misurata nel riferimento in cui il regolo è fermo. Questa lunghezza viene misurata confrontando il regolo con un regolo campione e non richiede nessuna misura di tempo. Se il regolo, invece che trovarsi sul treno fosse stato posto a terra, la sua lunghezzza misurata a terra confrontandolo con un regolo campione sarebbe stata esattamente la stessa e, cioè, L_0. Dunque, L_0 rappresenta un parametro fisico che caratterizza univocamente un dato regolo e viene detta **lunghezza a riposo** o **lunghezza propria**. Al contrario, L è misurata quando il regolo si muove e, quindi, necessita l'uso di due orologi posti in punti diversi dello spazio e opportunamente sincronizzati. Dunque, il valore di L risulta influenzato dalla procedura utilizzata per la sincronizzazione degli orologi nel riferimento in cui questa lunghezza viene misurata.

Per il principio di Relatività, essendo i due sistemi inerziali equivalenti (treno e terra), se lo stesso regolo viene posto a terra, l'osservatore che si trova sul treno dovrà arrivare alla stessa conclusione e, cioè, troverà ancora che la lunghezza del regolo gli appare contratta come in eq.(28).

Esercizio: lo studente trovi nuovamente la (28) utilizzando le trasformazioni di Lorentz nell'ipotesi che il regolo di lunghezza L_0 si trovi a terra e che un osservatore sul treno misuri la sua lunghezza L. (In questo caso conviene utilizzare la relazione inversa in eq.(14)).

Le lunghezze trasversali restano invariate.

Ben diverso è il caso in cui il regolo viene posto sul treno ma orientato lungo l'asse y' o z' perpendicolare alla direzione del moto (vedi figura 6). Supponiamo, ad esempio, che il regolo sia allineato lungo l'asse y'. In questo caso, le posizioni dei due estremi del regolo saranno individuate dalle coordinate y'_1 e y'_2 sul treno e y_1 e y_2 nel riferimento a terra. Per le trasformazioni di Lorentz (eq.2),

$$\begin{matrix} y'_1 = y_1 \\ y'_2 = y_2 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1 \quad \Longrightarrow \quad L = L_0 \qquad (29)$$

Dunque, la lunghezza nella direzione ortogonale al moto resta inalterata in qualunque sistema di riferimento venga misurata. I risultati precedenti si possono riscrivere nella forma compatta:

$$L_{par} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\left(L_0\right)_{par} = \frac{\left(L_0\right)_{par}}{\gamma} \qquad (30)$$

$$L_{ort} = \left(L_0\right)_{ort} \qquad (31)$$

dove con *par* e *ort* si intende, rispettivamente, parallela e ortogonale alla direzione di moto.

Tutte le relazioni precedentemente trovate sono conseguenza diretta del Principio di Relatività. Per capire ciò, consideriamo, ad esempio, il caso di un regolo orientato lungo l'asse y' perpendicolare alla direzione di moto relativo. Supponiamo di avere due regoli identici disposti verticalmente e aventi la stessa lunghezza a riposo. Uno dei due regoli è posto sulla carrozza di un treno mentre l'altro è solidale con il terreno. Le estremità inferiori dei due regoli sono poste alla stessa altezza. Ovviamente, quando il treno è fermo, se i regoli sono disposti uno accanto all'altro, le loro estremità devono coincidere. Per controllare la coincidenza delle estremità superiori, potremmo disporre due sottili lamette sulle estremità superiori dei regoli e controllare che queste si toccano quando i regoli sono accostati. Adesso, supponiamo che il treno si muova con velocità v costante lungo un asse orizzontale x. Supponiamo per assurdo che, contrariamente alla (29), un regolo appaia contratto se la sua lunghezza viene misurata nel sistema in cui esso viene visto muoversi. Dunque, ad un "osservatore" posto a terra il regolo sul treno dovrà apparire contratto ma, per il Principio di Relatività , per un "osservatore" che si trovi sul treno dovrà essere il regolo a terra che si è contratto altrimenti i due sistemi non sarebbero equivalenti. Infatti, un "osservatore" posto a terra "vede" il regolo sul treno venirgli incontro con velocità v, ma al tempo stesso un osservatore sul treno " vede" il regolo a terra che gli viene incontro con la stessa velocità v. Quindi, se i riferimenti inerziali sono equivalenti, la situazione di entrambi i riferimenti è del tutto simmetrica. Ora, se il regolo sul treno appare contratto all'osservatore a terra, ciò significa che, quando i due regoli, durante il moto, si trovano affacciati, la lametta collegata all'estremità del regolo sul treno inciderà una tacca sul regolo fermo, mentre quella sul regolo fisso non lascerà nessuna traccia sull'altro (vedi figura 6).

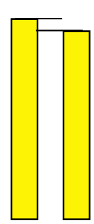

Figura 6

D'altra parte, se vale il Principio di Relatività, esattamente l'opposto dovrebbe accadere se ripetiamo il ragionamento dal punto di vista del riferimento del treno. In questo caso, sarebbe il regolo a terra che si muove rispetto al treno e, perciò, esso dovrebbe apparire contratto e la lametta posta all'estremità del regolo a terra dovrebbe lasciare una traccia sull'altro. Ma queste due cose opposte non possono avvenire contemporaneamente. Infatti, il fatto che una lametta tocchi in un certo punto un regolo significa che ad un certo istante l'estremità della lametta coincide con un punto del regolo. Dunque, cè una coincidenza spazio temporale che, come si era detto in precedenza è un *fatto fisico* e non dipende dal riferimento utilizzato (la lametta lascia una traccia che può essere rilevata sia da un "osservatore" a terra che da uno sul treno). Questo significa che se l'"osservatore" sul treno conclude che la lametta incide su uno dei due regoli, la stessa conclusione deve essere raggiunta dall'"osservatore" a terra. Ma questa conclusione, per quanto discusso in precedenza, è in totale contrasto con il Principio di Relatività. Il ragionamento si può nuovamente ripetere assumendo per assurdo che il regolo che appare in movimento si allunghi invece che accorciarsi e si arriva nuovamente ad una contraddizione con il Principio di Relatività. Dunque, se si vuole che il Principio di Relatività sia verificato, dobbiamo necessariamente concludere che il regolo visto in movimento non può né apparire contratto né allungato, cioè deve valere la (29).

Un analogo esempio concettuale, forse più immediato da capire, è il seguente. Supponiamo di avere un treno che da fermo sia alto 3 m e una galleria con un'altezza di poco superiore a tre metri in modo che il treno vi possa passare sotto senza urtare il soffitto. Supponiamo, per assurdo, che le lunghezze ortogonali al moto si contraggano e che valga il Principio di Relatività. Allora, ragionando dal punto di vista di un "osservatore" a terra si direbbe: il treno si muove rispetto a terra e, quindi la sua altezza si contrae. Dunque, il treno dovrebbe passare facilmente sotto la galleria. D'altra parte, se vale il Principio di Relatività, allora un "osservatore" sul treno arriverebbe alla conclusione opposta. Egli vede la galleria venirgli incontro con la velocità v e, quindi, conclude che la galleria si contrae e che il treno urta contro la galleria. Ovviamente questi due fatti : " il treno passa sotto la galleria" o " il treno urta contro la galleria" sono totalmente incompatibili e non possono essere entrambi veri. Quindi, *la contrazione o la dilatazione delle lunghezze ortogonali al moto sarebbe in contrasto con il Principio di Relatività*.