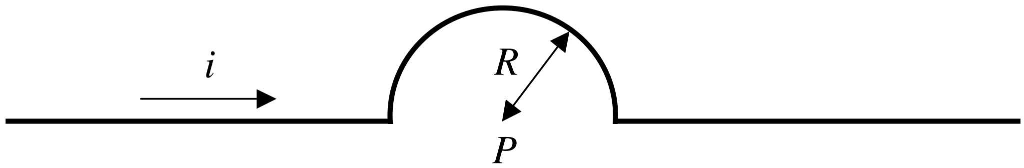
Esercizio 1 - Un filo conduttore percorso da corrente i ha la forma mostrata in figura dove i tratti rettilinei sono molto lunghi. Si calcoli il campo di induzione magnetica (direzione, verso e modulo) nel punto P al centro della semicirconferenza di raggio R.



Soluzione: Il campo generato da un elemento di filo $\boldsymbol{dl}$ è

$$\boldsymbol{dB} = \frac{\mu_0 i \boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \qquad (1)$$

dove $\boldsymbol{r}$ è il vettore che congiunge l'elemento di filo con il punto P. Per i tratti rettilinei il prodotto vettoriale in eq.(1) è pari a 0 poichè i vettori $\boldsymbol{dl}$ ed $\boldsymbol{r}$ sono paralleli (o antiparalleli). Dunque, il campo in P è dovuto solamente alla corrente che scorre nella semicirconferenza. I vettori $\boldsymbol{dl}$ nella semicirconferenza sono tutti perpendicolari al vettore $\boldsymbol{r}$ e il campo elementare da essi prodotto è diretto perpendicolarmente al piano della figura nel verso entrante. Il campo di induzione magnetica prodotto da tali elementi è:

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i dl}{4\pi R^2}\boldsymbol{k} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i \boldsymbol{k}}{4\pi R^2}\int dl = \frac{\mu_0 i}{4R}\boldsymbol{k} \qquad (2)$$

dove $\boldsymbol{k}$ indica il versore entrante nel piano della figura.

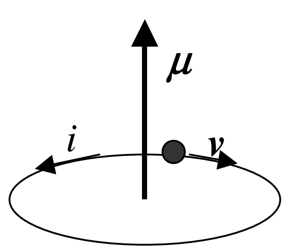
Esercizio 2 : Nel modello di Rutherford, l'atomo di Idrogeno è costituito da un elettrone con carica elettrica - e che ruota con velocità angolare ω attorno al protone con carica elettrica + e su un'orbita circolare di raggio a. Si calcoli il momento magnetico medio dovuto al moto dell'elettrone.

Soluzione : L'elettrone ruotante è equivalente ad una corrente media i che scorre in una spira circolare di raggio a in verso opposto al verso del moto dell'elettrone. Infatti, presa una qualunque sezione dell'orbita dell'elettrone, la carica - e attraversa tale sezione ogni volta che passa un tempo pari al periodo del moto circolare $T = 2\pi/\omega$. Dunque, la corrente media associata è, in modulo,

$$i = e / T = e\, \omega/(2\pi) \qquad (1)$$

Il vettore momento magnetico medio è perciò diretto nel verso mostrato in figura ed ha modulo:

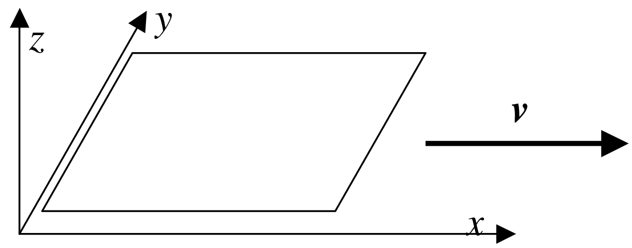
$$\mu = i\, \pi\, a^2 = e\, \omega a^2 /2 \qquad (2)$$



Esercizio 3 - Una lastra piana quadrata di lato L e spessore trascurabile è caricata con una densità di carica uniforme superficiale σ positiva. La lastra si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ lungo l'asse x parallelo ad uno dei suoi lati. Si calcoli:

1- la corrente eletrica i associata con il moto della piastra.

2 - Le componenti x, y e z del campo di induzione magnetica prodotto dalla piastra in punti vicini alla piastra.

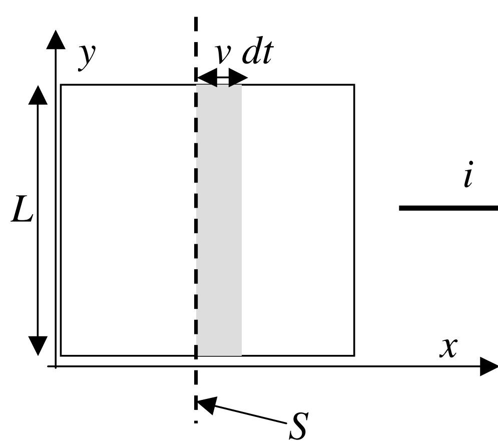


Soluzione: **1**- La carica che si muove lungo x dà origine ad una corrente elettrica diretta nello stesso verso. La corrente i è pari alla carica che attraversa una sezione verticale della piastra (piano S che interseca la piastra lungo la linea tratteggiata indicata nella figura sotto ed è perpendicolare alla corrente i) nell'unità di tempo. In un tempo infinitesimo dt, le cariche si sono spostate di un tratto $v\ dt$, dunque le cariche che hanno attraversato una sezione della piastra in tale tempo sono tutte quelle contenute nel rettangolo di lato L e altezza $v\ dt$ (regione grigia in figura), cioè:

$$dQ = \sigma L\, v\, dt \qquad (1)$$

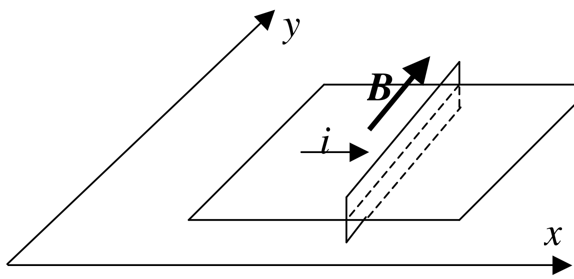
Dunque, la corrente $i = dQ/dt$ è

$$i = \sigma L\, v \qquad (2)$$



2 - Il problema ha simmetria piana e, quindi, in accordo a quanto discusso in dettaglio negli appunti, il campo magnetico è dovunque diretto lungo l'asse y perpendicolare alla corrente e puo' dipendere dal valore della coordinata z perpendicolare alla piastra posta in $z = 0$. Dunque, $\boldsymbol{B} = B(z)\,\mathbf{j}$ dove $\mathbf{j}$ è il versore dell'asse y. Utilizzando la regola della mano destra si verifica facilmente che il campo è nel verso positivo delle y ($B(z) > 0$) se $z > 0$ e in verso opposto se $z < 0$. Inoltre, sempre per la simmetria, il campo in punti simmetrici rispetto al piano $z = 0$, i campi sono uguali ed opposti cioè $B(-z) = -B(z)$. Per calcolare il campo possiamo utilizzare il teorema di Ampere applicato ad un circuito rettangolare con due lati di lunghezza L paralleli all'asse y e posti in punti simmetrici z e $-z$ con $z > 0$ e due lati paralleli all'asse z. Poichè il campo è diretto lungo y, solo i lati di lunghezza L contribuiscono alla circuitazione del campo. Per il Teorema di Ampere,

$$B(z)\, L - B(-z)\, L = \mu_0\, i \qquad (3)$$



Sfruttando la relazione $B(-z) = -B(z)$, la relazione precedente fornisce:

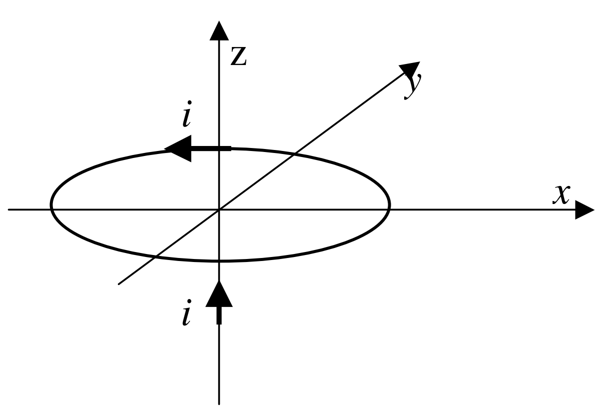
$$B(z) = \mu_0\, i\, /\, (2\, L) = \mu_0\, \sigma\, v\, /2 \qquad (4)$$

Dunque, il campo generato dalla piastra è uniforme con versi opposti sopra e sotto la piastra.

Esercizio 4 - Si consideri la stessa situazione dell'esercizio 3 ma con piastra di spessore $d << L$ con distribuzione di carica eletrica volumica ρ uniforme che viaggia con velocità $\boldsymbol{v}$ lungo l'asse x come nel problema 3. Indicando con z l'asse ortogonale alla piastra con origine nel centro della piastra, si calcoli:
1 - la corrente i associata con il moto delle cariche,
2 - il campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ nella regione esterna alla piastra ma sufficientemente vicina alla piastra ($d/2 < |z| < L$) e all'interno della piastra ($|z| < d/2$).

[soluzione: **1** - $i = \rho\, v\, d\, L$, **2** - **a)** $d/2 < |z| < L$: $\boldsymbol{B} = \mu_0\, \rho\, v\, z/2\ \mathbf{j}$; b) $|z| < d/2$: $\boldsymbol{B} = \mu_0\, \rho\, v\, d/2\ \mathbf{j}$]

Esercizio 5 - Una spira conduttrice circolare di raggio R giace su un piano xy con centro nell'origine degli assi ed è percorsa da una corrente i diretta come in figura. Un lungo filo conduttore rettilineo percorso da corrente i diretta come in figura è disposto sull'asse z della spira.
1- Si calcoli la forza esercitata dalla spira sul filo.
2- Si calcoli la forza esercitata dal filo sulla spira.



Soluzione - **1** -La forza elementare agente su un generico trattino di filo orientato di lunghezza $\boldsymbol{dl}$ appartenente al filo rettilineo è

$$d\boldsymbol{F} = i\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{B} \qquad (1)$$

dove $\boldsymbol{B}$ è il campo di induzione magnetica generato dalla spira nel punto dove si trova l'elemento $\boldsymbol{dl}$. Per motivi di simmetria, il campo generato dalla spira in un punto dell'asse z è diretto lungo l'asse e, quindi, è parallelo a $\boldsymbol{dl}$. Ne consegue che la forza agente su ciascun trattino di filo rettilineo è nulla e, quindi, è nulla anche la forza totale agente sul filo.

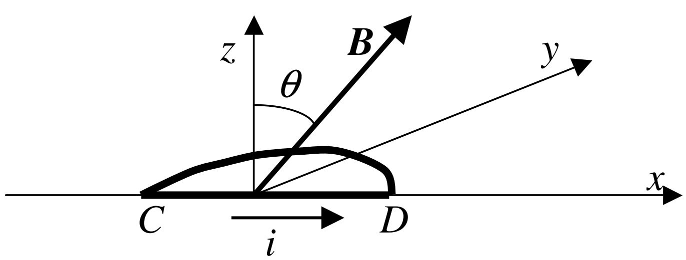
2- Per il principio di azione e reazione, la forza esercitata dal filo rettilineo sulla spira è nulla. *Metodo diretto*: Lo stesso risultato si ottiene osservando che le linee di campo di un filo rettilineo indefinito sono circonferenze con centro sull'asse z. Dunque, la linea di campo che passa per la spira è, in ogni punto, parallela alla spira. Ne consegue che la forza elementare agente su ogni trattino orientato di spira è nulla e, quindi, anche la forza risultante è nulla.

Esercizio 6 - Una spira conduttrice di forma semicircolare di raggio R giace nel piano xy ed è immersa in un campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ giacente nel piano yz perpendicolare al piano della spira e formante un angolo θ con l'asse z. La spira è percorsa da una corrente i nel verso indicato in figura. Si trovi:

1 - la forza (componenti x, y e z) agente sul tratto rettilineo che congiunge i punti C e D,

2- La forza (componenti x, y e z) agente sul tratto semicircolare che va da C a D,

3 - Il momento di forza (componenti x, y, z) agente sulla spira.



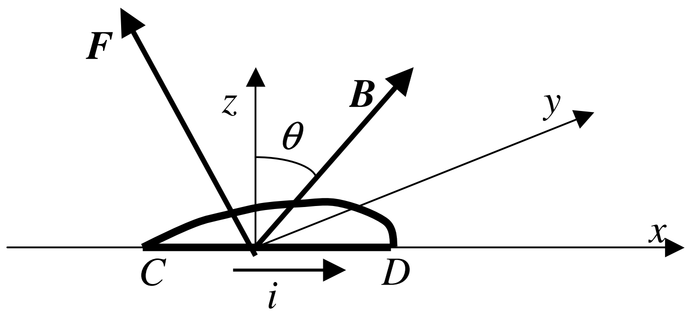
Soluzione : **1** - La forza sul filo rettilineo è:

$$\boldsymbol{F} = i\boldsymbol{CD} \times \boldsymbol{B} \qquad (1)$$

Il modulo della forza è:

$|\boldsymbol{F}| = 2\, i\, R\, B$ (2)

Il vettore $\boldsymbol{F}$ è perpendicolare al piano individuato dai vettori $\boldsymbol{CD}$ e $\boldsymbol{B}$. In particolare, essendo $\boldsymbol{CD}$ parallelo all'asse x, la forza giace nel piano yz e fa un angolo π/2 con il campo $\boldsymbol{B}$ (vedi figura sotto)



Utilizzando la regola della mano destra si verifica immediatamente che la forza è nel verso delle y negative e fa un angolo $\pi/2 - \theta$ con l'asse z. Dunque:

$$F_x = 0 \quad , F_y = -2\, i\, R\, B \sin(\pi/2 - \theta) = -2\, i\, R\, B \cos\theta$$

$$F_z = 2\, i\, R\, B \sin\theta \tag{3}$$

2 - *I Metodo*: La forza totale su una spira percorsa da corrente in campo uniforme è nulla. Dunque, la forza agente sul tratto semicircolare è uguale ed opposta a quella agente sul tratto rettilineo, cioè:

$$F_x = 0 \quad , F_y = 2\, i\, R\, B \cos\theta$$

$$F_z = -2\, i\, R\, B \sin\theta \tag{4}$$

II Metodo (calcolo diretto): La forza si può calcolare direttamente integrando le forze elementari di Laplace agenti sui singoli trattini di lunghezza $\boldsymbol{dl}$ di semicircoferenza Dunque:

$$\boldsymbol{F} = \int_D^C i\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{B} = i\left(\int_D^C \boldsymbol{dl}\right) \times \boldsymbol{B} \tag{5}$$

dove si è sfruttato il fatto che i e $\boldsymbol{B}$ sono costanti e, quindi, possono essere portati fuori dal segno di integrale insieme al segno di prodotto vettoriale per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale. Ma l'integrale dei $\boldsymbol{dl}$ in eq.(5) non è altro che la somma degli spostamenti infinitesimi da D a C lungo la semicirconferenza che è uguale allo spostamento totale, cioè il vettore $\boldsymbol{DC}$ che congiunge il punto D con C. Dunque, la (5) diventa

$$\boldsymbol{F} = i\boldsymbol{DC} \times \boldsymbol{B} \tag{6}$$

che è uguale ed opposta alla forza **F** in eq.(1) essendo $\boldsymbol{DC} = -\boldsymbol{CD}$.

3 - Il momento magnetico della spira è diretto lungo l'asse z nel verso positivo ed è pari in modulo a $\mu = i\,\pi\,R^2/2$. Il prodotto vettoriale dei vettori $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{B}$ è perpendicolare al piano da essi individuati che coincide con il piano *yz* e, dunque, è diretto lungo l'asse *x*. Il modulo del momento di forza è $\tau = \mu B \sin\theta$. Utilizzando la regola della mano destra, si verifica facilmente che il momento è diretto nel verso negativo dell'asse *x*. Dunque:

$$\tau_x = -\mu B \sin\theta = -\,i\,\pi\,a^2\,B\,\sin\theta/2 \quad , \qquad \tau_y = \tau_z = 0 \tag{7}$$

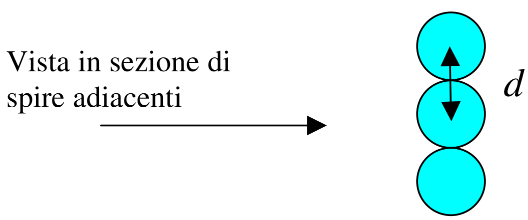
Esercizio 7 - Un lungo solenoide di altezza *h* è costituito da un filo conduttore di sezione *S*. Le spire del solenoide hanno raggio *a* molto più grande del raggio del filo conduttore e sono avvolte compattamente (spire successive sono in contatto). Il filo conduttore è rivestito da una sotile guaina isolante di spessore trascurabile in modo da evitare il contatto elettrico fra spire adiacenti. La resistività del filo conduttore è ρ.

1 - Si calcoli la resistenza *R* del solenoide.

2- Si calcoli il campo magnetico presente nel solenoide quando una corrente *i* scorre nel solenoide.

Soluzione:

1 - Poichè le spire sono avvolte in modo compatto, la distanza fra i centri di due spire adiacenti è pari a $d = 2\,b$ dove *b* è il raggio del filo che è pari a $b = (S/\pi)^{1/2}$ (vedi figura sotto).



Ma allora, se *h* è l'altezza del solenoide, il numero di spire presenti è $N = h/d$ (ad esempio, nel caso in figura, si verifica immediatamente che l'altezza totale delle 3 spire è proprio pari a 3 *d*). Dunque:

$$N = \frac{h}{2\sqrt{S/\pi}} \tag{1}$$

La lunghezza totale del filo è , perciò, $L = N\,2\pi a$, cioè:

$$L = \frac{h\pi^{3/2}a}{\sqrt{S}} \tag{2}$$

dunque, la resistenza dell'avvolgimento è:

$$R = \frac{\rho L}{S} = \rho\frac{h\pi^{3/2}a}{S^{3/2}} \tag{3}$$

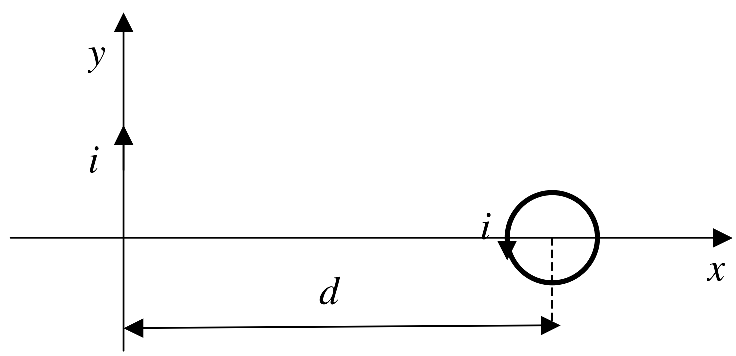
2 - Il campo di induzione magnetica all'interno di un solenoide è diretto lungo l'asse ed è pari a

$$B = n\mu_0 i \qquad (4)$$

dove $n = N/h$ è il numero di spire per unità di lunghezza. Dunque:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\sqrt{S/\pi}}$$

Esercizio 8 - Una spira conduttrice di massa m e raggio a è percorsa da una corrente i costante come mostrato in figura. La spira si trova inizialmente ferma con il centro a distanza $d >> a$ da un lungo filo conduttore percorso dalla corrente i nel verso mostrato in figura. La spira è vincolata a muoversi senza attrito lungo l'asse x in figura. Si trovi la velocità massima raggiunta dalla spira.



Soluzione: La spira ha un momento magnetico diretto lungo l'asse z uscente dal piano della figura e di modulo $\mu = i\ \pi\ a^2$. Il campo magnetico generato dal filo nella regione occupata dalla spira è diretto in verso opposto all'asse z ed è pari, in modulo, a

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \qquad (1)$$

Poichè $d >> a$, il campo magnetico in punti diversi della spira ha valori di poco diversi (la distanza x di un punto della spira dal filo è sempre compresa fra $d - a \approx d$ e $d + a \approx$ d). Dunque, nella (1) si può sostituire a x il valore costante d , cioè si può considerare il campo della spira praticamente uniforme e pari in modulo a

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \qquad (2)$$

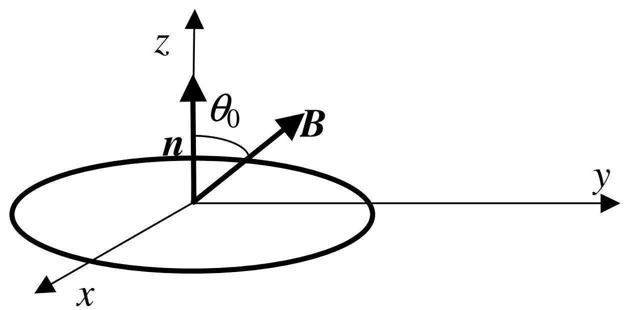
L'energia associata con l'interazione della spira (dipolo magnetico) con il campo uniforme è :

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} = \mu B = \frac{i\pi a^2 \mu_0 i}{2\pi d} = \frac{a^2 \mu_0 i^2}{2d} \qquad (3)$$

Questa energia decresce all'aumentare della distanza d della spira dal filo, dunque la spira viene respinta dal filo e si sposta nel verso positivo dell'asse x convertendo la sua energia potenziale in energia cinetica. Il massimo valore dell'energia cinetica e, quindi, della velocità viene raggiunto quando la spira si trova a distanza infinita dove il campo è nullo e con esso l'energia magnetica. Imponendo la conservazione dell'energia meccanica, si trova:

$$\frac{a^2\mu_0 i^2}{2d} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_0 a^2 i^2}{md}} \tag{4}$$

Esercizio 9 - Una spira piana di area S è percorsa da una corrente i costante ed è immersa in un campo di induzione magnetica uniforme $\boldsymbol{B}$. La spira giace nel piano xy. La spira è inizialmente ferma e la normale $\boldsymbol{n}$ alla spira fa inizialmente un angolo θ_0 con il campo di induzione magnetica che giace nel piano yz. Il momento di inerzia della spira rispetto all' asse x giacente sul suo piano e passante per il suo centro è I. Si osserva che la normale alla spira inizia ad oscillare attorno alla direzione del campo magnetico.



1- Si trovi la massima velocità angolare raggiunta dalla spira.

2 - Nell'ipotesi $\theta_0 << 1$, si calcoli il periodo T delle oscillazioni.

Soluzione : **1**- La spira possiede un momento magnetico di modulo $\mu = i\ S$ diretto lungo la normale alla spira. La velocità massima viene raggiunta quando la normale alla spira è parallela al campo e l'energia magnetica è minima. Infatti, l'energia di interazione fra spira e campo è pari a $U = -\ \mu B\cos\theta$ che è minima per $\theta = 0$. Imponendo la conservazione dell'energia meccanica, si scrive:

$$-\mu B\cos\theta_0 = -\mu B + \frac{1}{2} I\omega_{\max}^2 \Longrightarrow \quad \omega_{\max} = \sqrt{\frac{2\mu B(1-\cos\theta_0)}{I}} = \sqrt{\frac{2iSB(1-\cos\theta_0)}{I}} \tag{1}$$

2 - Sulla spira il campo esercita un momento di forza (momento di forza su un dipolo magnetico) che è diretto lungo l'asse x nel verso negativo ed è pari a:

$$\tau_x = -iSB\sin\theta \approx -iSB\theta \tag{2}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che l'angolo θ fra la normale alla spira e il campo è sempre molto piccolo e, quindi, $\sin\theta \approx \theta$. L'equazione del moto di rotazione della spira attorno all'asse x è, perciò:

$$-iSB\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{iSB}{I}\theta = -\omega^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (3)$$

Dove abbiamo definito la pulsazione $\omega = (iSB/I)^{1/2}$. L'equazione (3) è l'equazione classica di un moto oscillatorio con pulsazione ω. Dunque, il periodo T è:

$$T = -\frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi I}{iSB}}$$