Esercitazione 2

Corso di Elaborazione e Trasmissione delle Immagini

Pisa, 5 ottobre 2005

La trasformata di Fourier bidimensionale

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(X,Y)e^{j2\pi[xX+yY]}dXdY \quad \Leftrightarrow \quad F(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-j2\pi[xX+yY]}dxdy$$

Proprietà

Linearità

Separabilità

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)\Leftrightarrow F(X,Y)=F_1(X)F_2(Y)$$

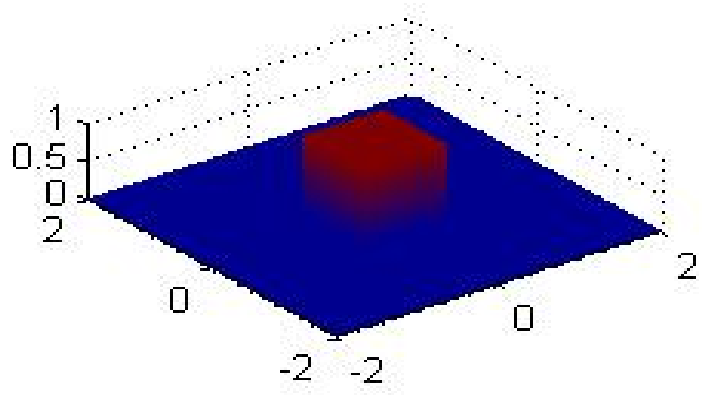
Simmetria

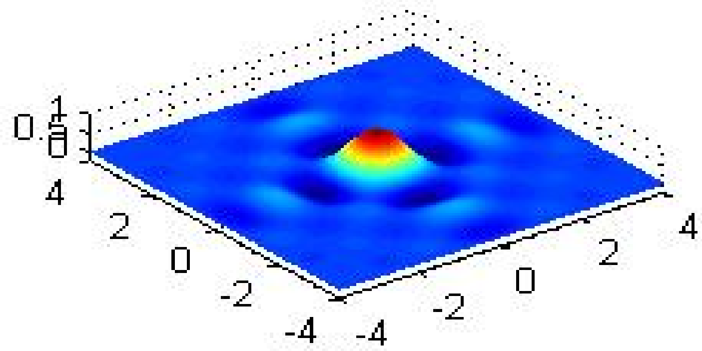
Se $f(x,y)$ é reale allora $$F(X,Y)=F^*(-X,-Y)$$

Trasformata continua di Fourier di funzioni bidimensionali

Valore nell'origine

$$f(0,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(X,Y)dXdY \qquad F(0,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$$



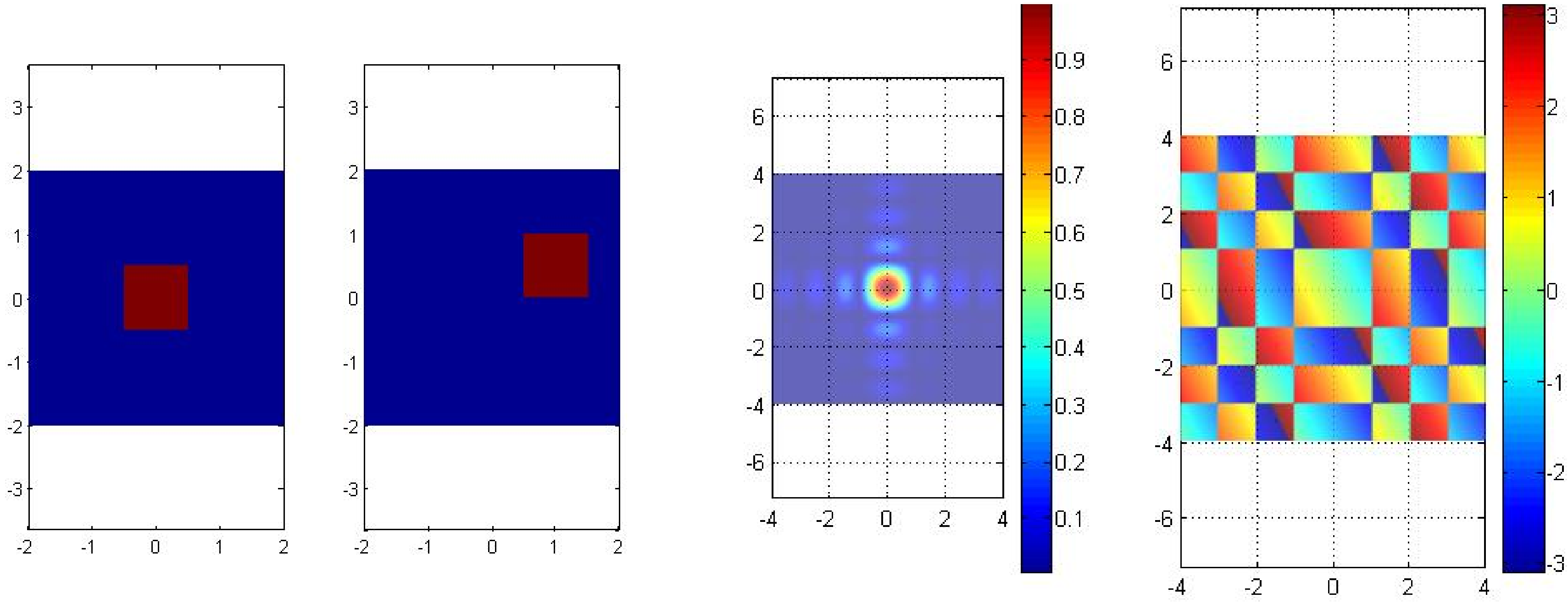


$$f(x,y)=rect(x)rect(y) \quad \Leftrightarrow \quad F(X,Y)=\sin c(X)\sin c(Y)$$

$$f(x,y)=rect(\frac{x}{L_x})rect(\frac{y}{L_y}) \Leftrightarrow F(X,Y)=L_x\sin c(L_xX)\,L_y\sin c(L_yY)$$

Proprietà della trasformata

- Traslazione $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(X,Y)e^{-j2\pi[x_0 X + y_0 Y]}$



Matlab

- Espressioni logiche x<=0, &, |, ~
- Prodotto tra matrici e tra elementi di matrici A*B, A.*B
- Accuratezza della rappresentazione in virgola mobile eps

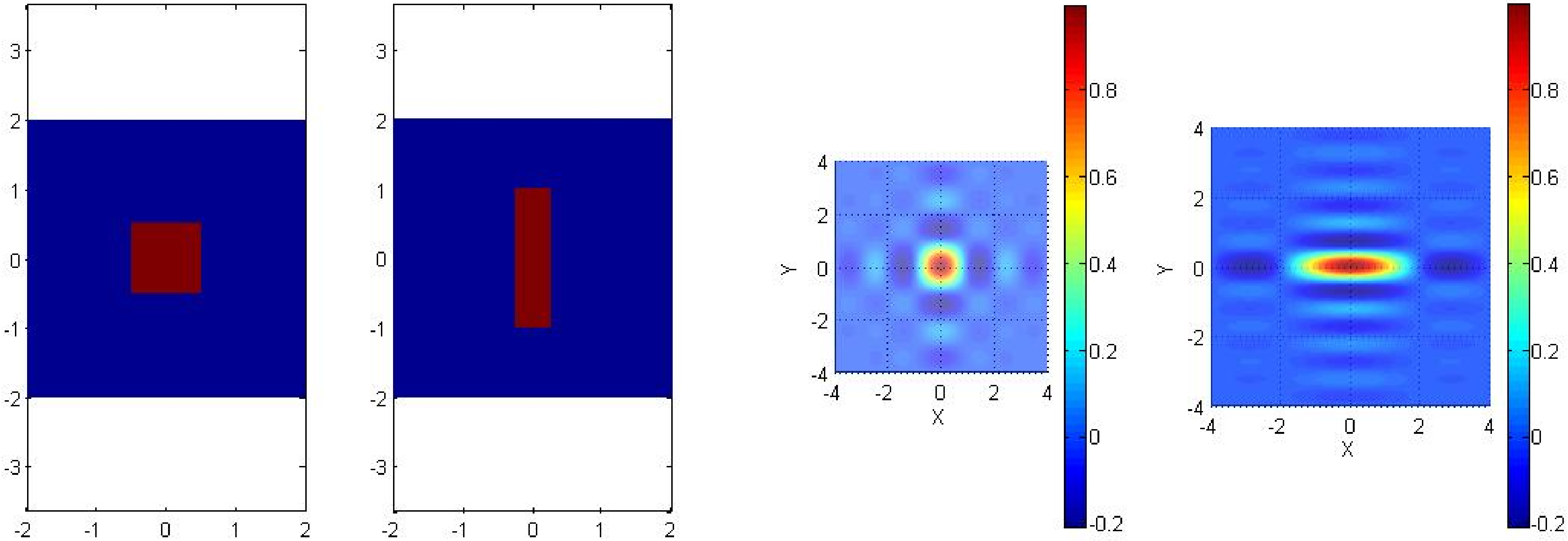
Esempi proposti

$$[1-|x|]rect(\frac{x}{2})[1-|y|]rect(\frac{y}{2}) \Leftrightarrow \sin c^2(x) \sin c^2(y)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2}) \Leftrightarrow \exp(-4\pi^2 X^2/2)\exp(-4\pi^2 Y^2/2)$$

Cambiamento di scala

$$f(\alpha x, \beta y) \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha\beta|} F\left(\frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta}\right)$$



Rappresentazione in coordinate polari

$$F(R\cos\Theta, R sen\Theta) = F_p(R,\Theta) = \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_p(r,\theta)\, e^{-j2\pi\left[rR\cos(\theta-\Theta)\right]}\, r\, dr\, d\theta$$

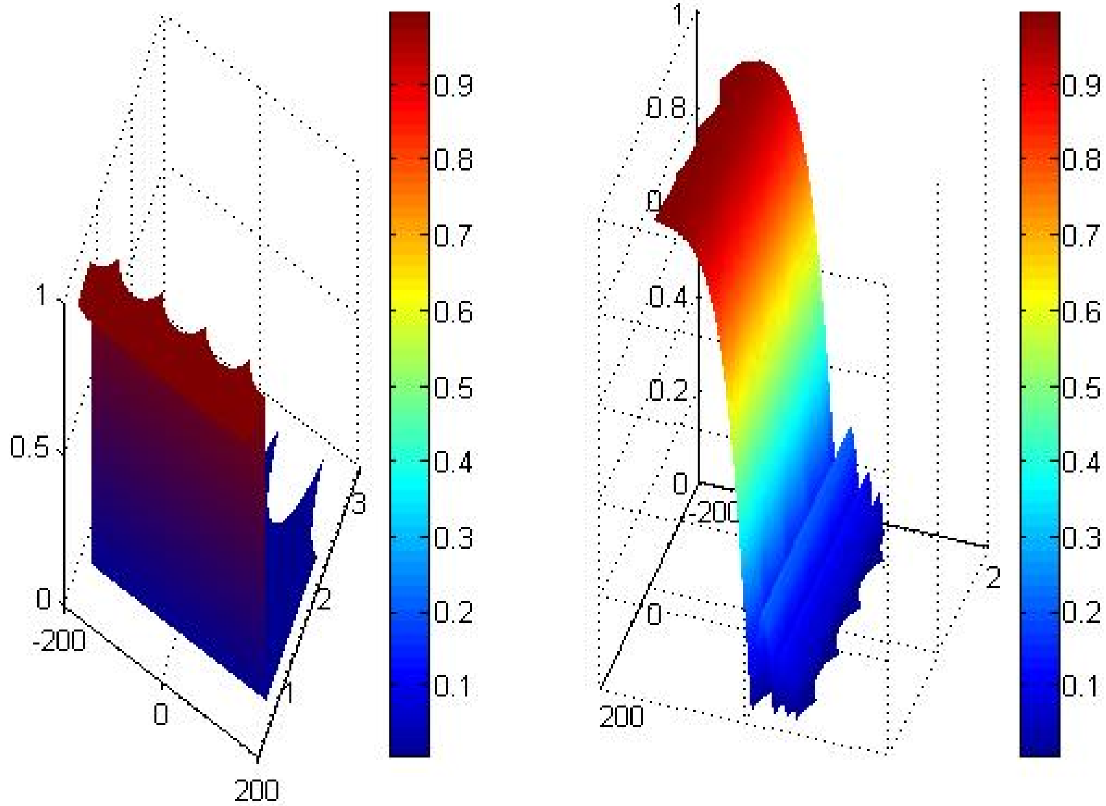
$$f(r\cos\theta, r sen\theta) = f_p(r,\theta) = \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} F_p(R,\Theta)\, e^{j2\pi\left[rR\cos(\theta-\Theta)\right]}\, R\, dR\, d\Theta$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\, sen\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} X = R\cos\Theta \\ Y = R\, sen\Theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg(\frac{y}{x}) \end{cases} \qquad \begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \Theta = arctg(\frac{Y}{X}) \end{cases}$$

Matlab

- cart2pol;
- pol2cart



Rappresentazione Log-polare

$$F_p(\log(R), \Theta)$$

zoom

$$f(\alpha x, \alpha y) \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|^2} F\left(\frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|^2} F\left(\frac{R\cos\Theta}{\alpha}, \frac{Rsen\Theta}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|^2} F_p\left(\frac{R}{\alpha}, \Theta\right)$$

$$\frac{1}{|\alpha|^2} F_p(\log(R) - \log(\alpha), \Theta)$$

Proprietà della rappresentazione Log-polare

Rotazione

$$f(r\cos(\theta-\theta_0), r\,sen(\theta-\theta_0)) = f_p(r, \theta-\theta_0)$$

$$F(R\cos(\Theta-\theta_0), R\,sen(\Theta-\theta_0)) = F_p(R, \Theta-\theta_0)$$

Rotazione e zoom

$$\frac{1}{|\alpha|^2} F_p(\log(R)-\log(\alpha), \Theta-\theta_0)$$

Rotazione
Cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta_0 + ysen\theta_0 \\ y' = -xsen\theta_0 + y\cos\theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X' = X\cos\theta_0 + Ysen\theta_0 \\ Y' = -Xsen\theta_0 + Y\cos\theta_0 \end{cases}$$