Esercitazione 6

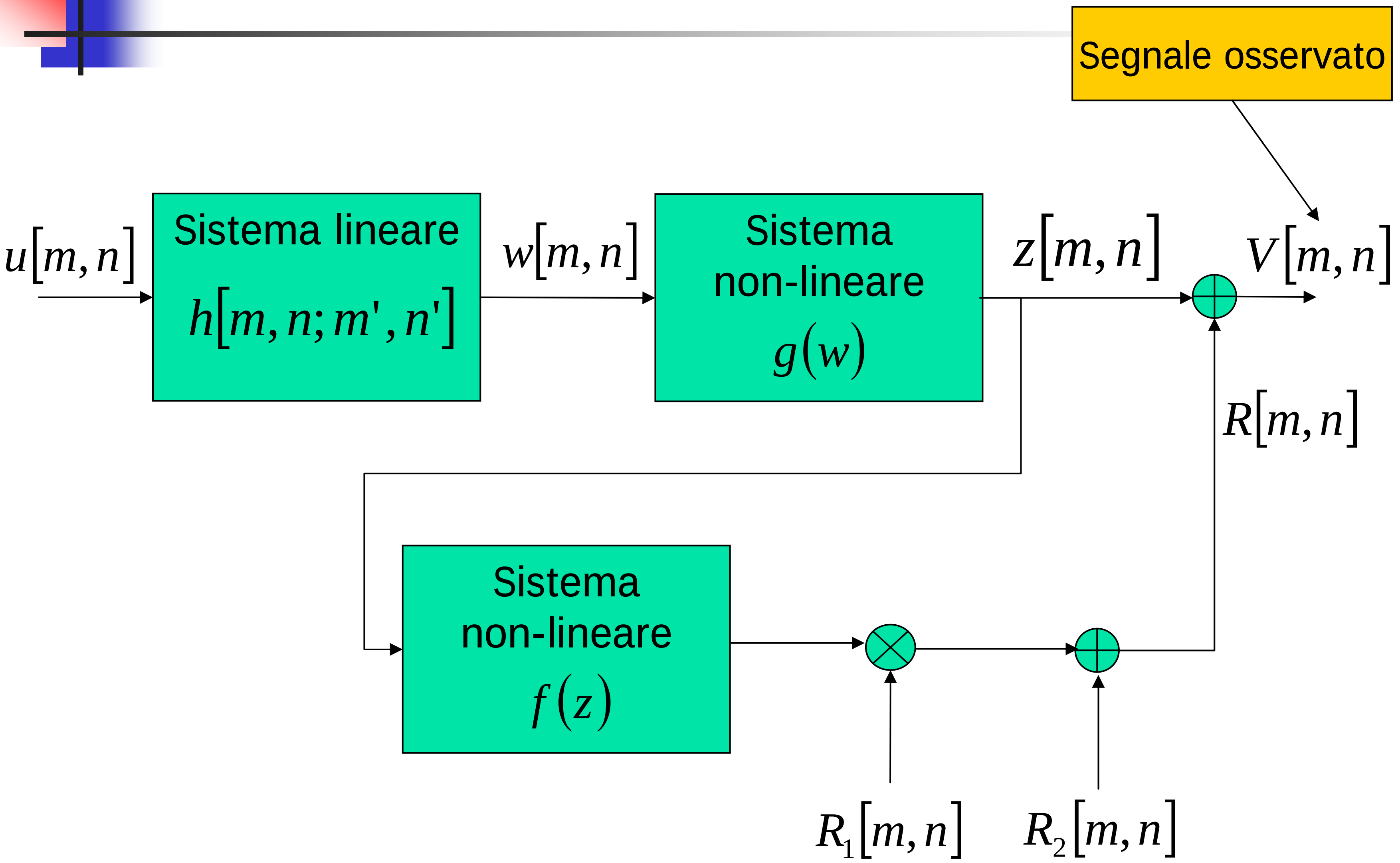
Corso di Elaborazione e Trasmissione delle Immagini

Pisa, 3 Novembre 2004

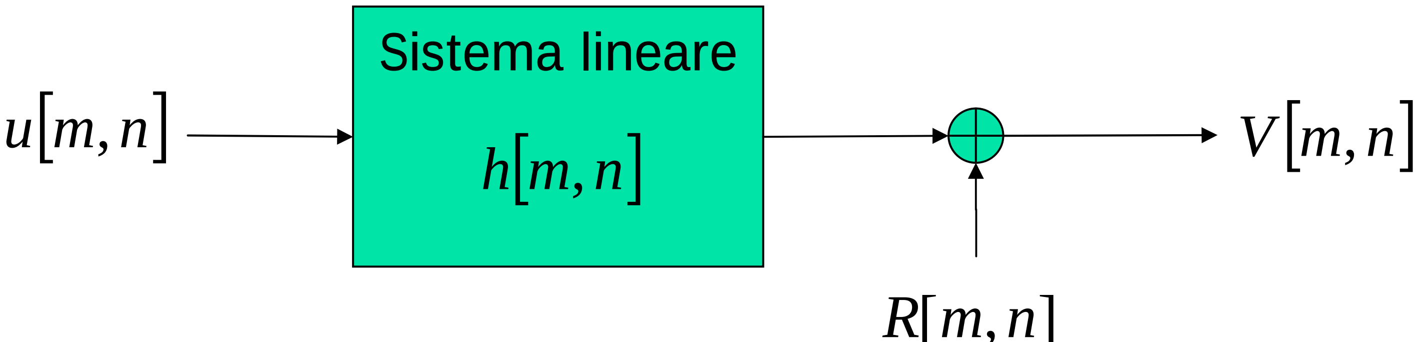
Argomenti proposti

- Restauro di una immagine
- Studio processi stocastici

Modello generale di ripresa



Distorsione invariante alla traslazione + rumore

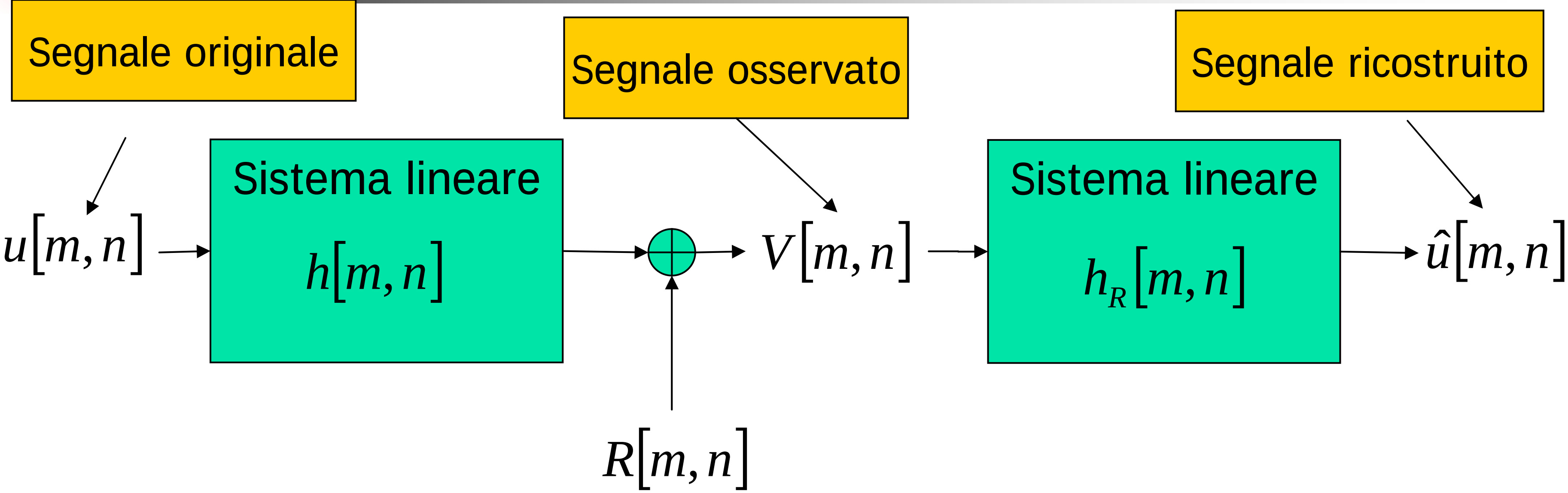


Esempi:

$$h[m,n] = \frac{1}{L} \cdot rect\left[\frac{n}{L}\right] \cdot \delta[m]$$ Moto verticale

$$h[m,n] = e^{-\pi \cdot \alpha^2 \cdot (m^2 + n^2)}$$ Turbolenza atmosferica

Restauro



Filtro inverso

$$h[m,n]\otimes\otimes h_R[m,n]=\delta[m,n] \quad \Longleftrightarrow \quad H_R(X,Y)=\frac{1}{H(X,Y)}$$

Esempio: filtro inverso

Segnale osservato

Segnale ricostruito

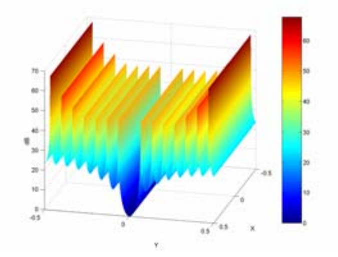
$\longrightarrow V[m,n] \longrightarrow$

Filtro di restauro

$h_R[m,n]$

$\longrightarrow \hat{u}[m,n]$

Risposta in ampiezza del filtro inverso



Necessità del filtro inverso pseudo-inverso

Segnale ricostruito nel dominio delle frequenze spaziali

Trasformata del segnale osservato

$$\hat{U}(X,Y)=\frac{V(X,Y)}{H(X,Y)}=\frac{U(X,Y)\cdot H(X,Y)}{H(X,Y)}+\frac{R(X,Y)}{H(X,Y)}$$

Filtro inverso H^{-1}

Esaltazione del rumore $R[m,n]$

Filtro pseudo-inverso H_{RP}

$$H_{RP}(X,Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{H(X,Y)}, & |H|\geq\varepsilon\\ 0, & |H|<\varepsilon\end{cases}$$

Filtro di Wiener

Densità spettrale
di potenza del processo
di rumore

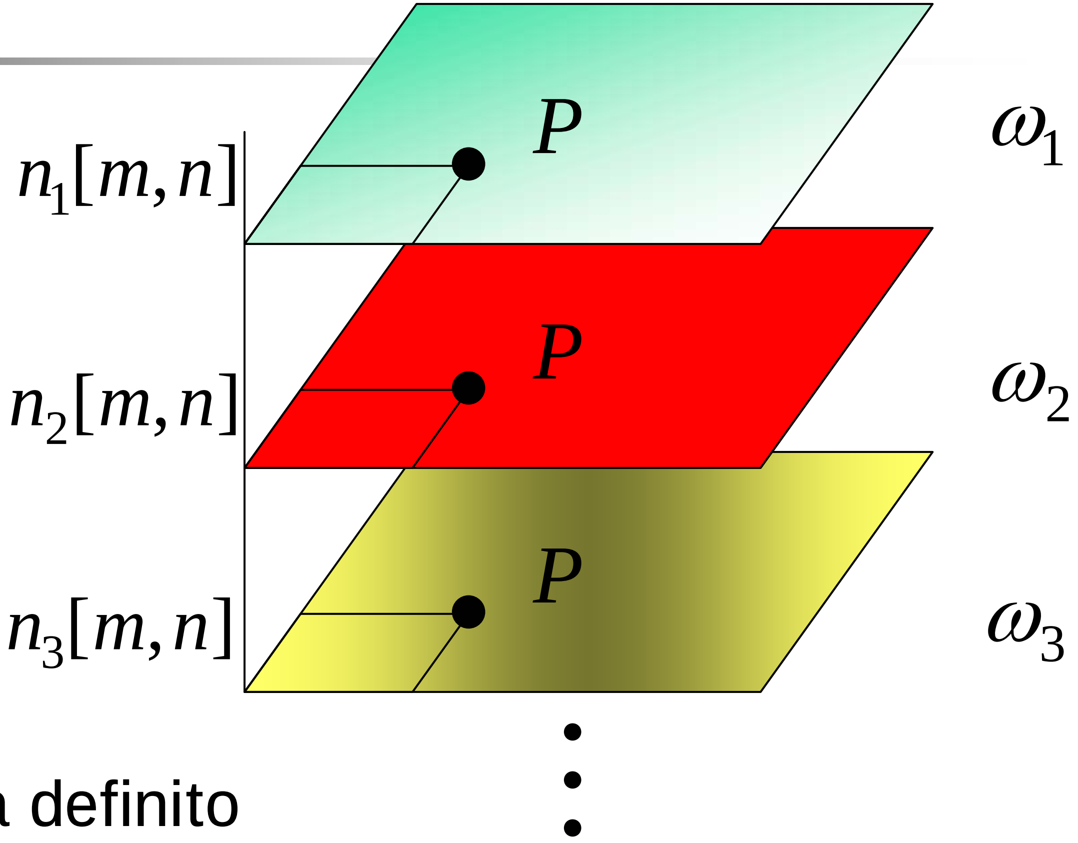
$$H_W(X,Y)=\frac{H^*(X,Y)}{\left|H(X,Y)\right|^2\cdot+\frac{S_{RR}(X,Y)}{S_{uu}(X,Y)}}$$

Densità spettrale
di potenza
del segnale utile

Processi casuali o stocastici a più dimensioni

$$N(P) = N[m,n]$$

$$P \equiv [m,n]$$



Sistema di probabilità definito per l'esperimento casuale **E**

S=[Ω, F, Pr]

Descrizione statistica del I° ordine

Processi ad ampiezza continua

$$F_N(\alpha;P) = \Pr\{N(P) \le \alpha\}$$ Funzione distribuzione di probabilità

$$f_N(\alpha;P) = \frac{\partial F_N(\alpha;P)}{\partial \alpha}$$ Funzione densità di probabilità

Stazionarietà del I°ordine

La funzione di distribuzione di probabilità non dipende da una traslazione dell'origine del sistema di riferimento $\Leftrightarrow$ $F_N(\alpha;P) = F_N(\alpha)$

Statistiche del I° ordine

$$E\{g[N(P)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) f_N(\alpha, P) d\alpha$$

Valore medio o funzione valore medio

$$E\{N(P)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \, f_N(\alpha, P) d\alpha = \eta_N[m,n]$$

Valore quadratico medio $\quad E\{N^2(P)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \, f_N(\alpha, P) d\alpha$

Varianza $\quad E\{[N(P) - \eta_N(P)]^2\} = E\{N^2(P)\} - \eta_N^2(P)$

Stazionarietà del valor medio

La funzione valor medio non dipende da una traslazione dell'origine del sistema di riferimento $\Longleftrightarrow E\{N(P)\} = \eta_N[m,n] = \eta_N$

Media spaziale

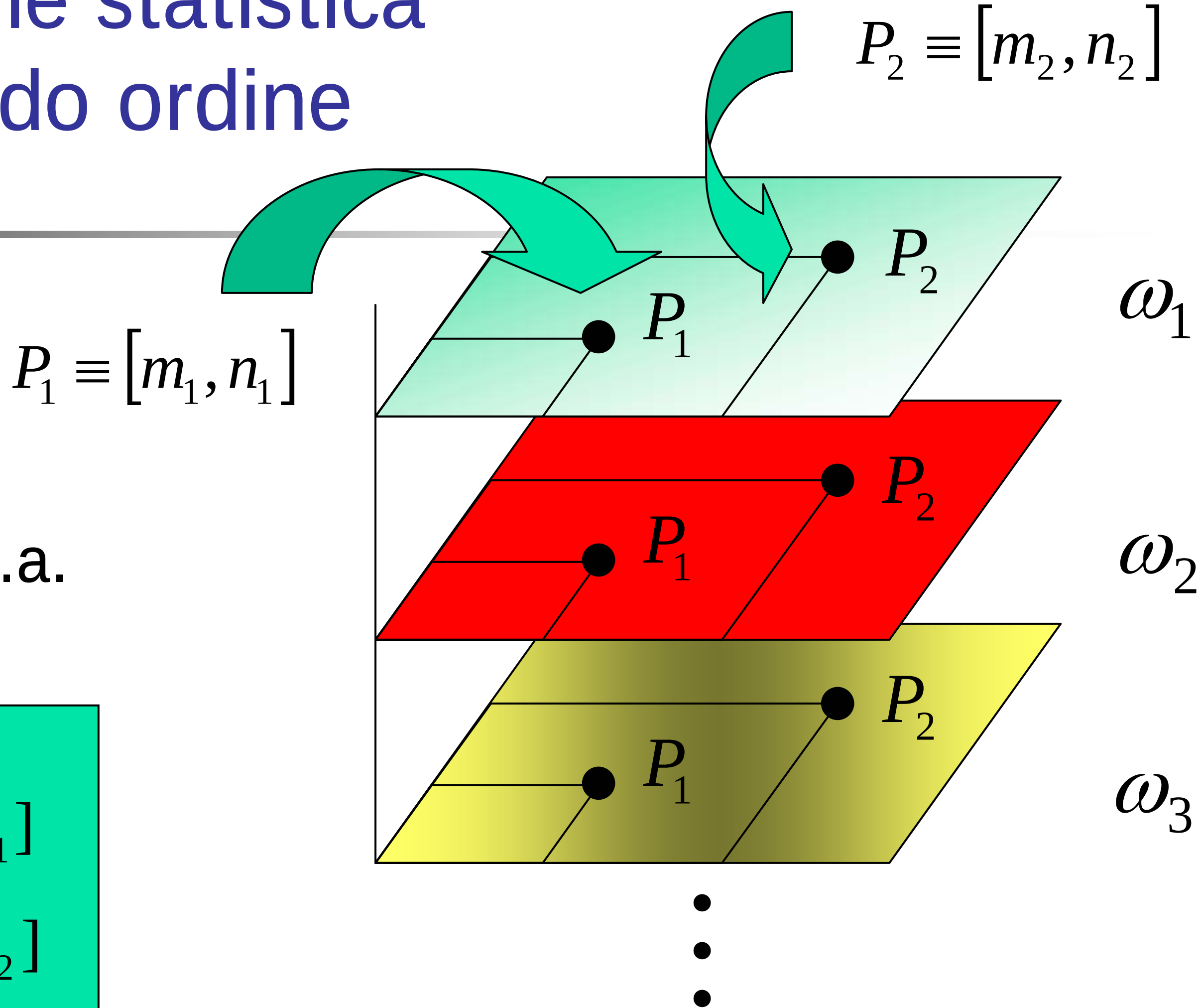
$$M_N = \lim_{M_x \to \infty} \lim_{M_y \to \infty} \frac{1}{(2M_x+1)(2M_y+1)} \sum_{m=-M_x}^{M_x} \sum_{n=-M_y}^{M_y} N[m,n]$$

Ergodicità in valor medio

$$\Pr\{M_N = \eta_N\} = 1$$

'Tutte' le funzioni campione (realizzazioni) del processo hanno la stessa media spaziale ed il suo valore è eguale al valor medio statistico del processo

Descrizione statistica del secondo ordine



$$\xi = m_1 - m_2$$

$$\eta = n_1 - n_2$$

Sistema di due v.a.

$$N(P_1) = N[m_1, n_1]$$

$$N(P_2) = N[m_2, n_2]$$

Descrizione statistica del secondo ordine

Processi ad ampiezza continua

$$F_N(\alpha_1,\alpha_2;P_1,P_2)=\Pr\{N(P_1)\le\alpha_1;N(P_2)\le\alpha_2\}$$

Funzione distribuzione di probabilità congiunta

$$f_N(\alpha_1,\alpha_2;P_1,P_2)=\frac{\partial^2 F_N(\alpha_1,\alpha_2;P_1,P_2)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}$$

Funzione densità di probabilità congiunta

Stazionarietà del II°ordine

La funzione di distribuzione di probabilità congiunta non dipende da una traslazione dell'origine del sistema di riferimento.

$\Leftrightarrow$

$$F_N(\alpha_1,\alpha_2;P_1,P_2)=F_N(\alpha_1,\alpha_2;\xi,\eta)$$

$$\xi=m_1-m_2$$

$$\eta=n_1-n_2$$

Statistiche del II° ordine

$$E\left\{g\left[N(P_1),N(P_2)\right]\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\alpha_1,\alpha_2)\,f_N(\alpha_1,\alpha_2;P_1,P_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2$$

Funzione di Autocorrelazione

$$E\left\{N(P_1)N^*(P_2)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_1\,\alpha_2\,f_N(\alpha_1,\alpha_2;P_1,P_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2$$

Funzione di Autocovarianza

$$E\left\{(N(P_1)-\eta_N(P_1))(N(P_2)-\eta_N(P_2))^*\right\}=E\left\{N(P_1)N^*(P_2)\right\}-\eta_N(P_1)\eta_N^*(P_2)$$

Stazionarietà della funzione di autocorrelazione

Funzione di Autocorrelazione

$$R_N[\xi,\eta] = E\left\{N(P_1)N^*(P_2)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1 \alpha_2 f_N(\alpha_1,\alpha_2;P_1,P_2)d\alpha_1 d\alpha_2$$

Funzione di Autocovarianza

$$C_N[\xi,\eta] = E\left\{(N(P_1)-\eta_N(P_1))(N(P_2)-\eta_N(P_2))^*\right\}$$

$$= R_N[\xi,\eta] - \eta_N \eta_N^*$$

Densità spettrale di potenza di un processo spazio discreto

$$\tilde{S}_N(X,Y) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} R[\xi,\eta] \exp(-j2\pi[\xi X + \eta Y])$$

Funzione reale, positiva, periodica

Stazionarietà

- Un processo si dice stazionario rispetto ad una particolare statistica se questa è invariante ad una traslazione del sistema di riferimento;
- Un processo si dice stazionario in senso debole o in senso lato se la funzione valor medio e la funzione di autocorrelazione sono invarianti ad una traslazione del sistema di riferimento;
- Un processo si dice stazionario in senso forte o in senso stretto se tutte le statistiche di qualsiasi ordine sono invarianti ad una traslazione del sistema di riferimento;

Processo bianco spazio-discreto

- Un processo spazio-discreto viene detto bianco se:

$$E\left\{N(P)\right\}=0$$

$$R_N[\xi,\eta]=E\left\{N(P_1)N^*(P_2)\right\}=\sigma^2\delta[\xi,\eta]$$

$$\tilde{S}_N(X,Y)=\sum_{\xi=-\infty}^{\infty}\sum_{\eta=-\infty}^{\infty}R[\xi,\eta]\exp(-j2\pi[\xi X+\eta Y])=\sigma^2$$

Trasformazioni lineari ed invarianti alla traslazione

$$N_I[m,n] \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema lineare}\\ h[m,n]\end{array}} \longrightarrow N_O[m,n]$$

$$E\{N_I(P)\} = \eta_{N_I}[m,n] = \eta_{N_I}$$

$$E\{N_O(P)\} = \eta_{N_I} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[m,n]$$

$$R_{N_I}[\xi,\eta] = E\left\{N_I(P_1) N_I^{*}(P_2)\right\}$$

$$R_{N_O}[\xi,\eta] = R_{N_I}[\xi,\eta] \otimes\otimes h[\xi,\eta] \otimes\otimes h^{*}[-\xi,-\eta]$$

$$\tilde{S}_{N_I}(X,Y) = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} R_{N_I}[\xi,\eta] \exp(-j2\pi[\xi X + \eta Y])$$

$$\tilde{S}_{N_O}(X,Y) = \tilde{S}_{N_I}(X,Y) \left|\tilde{H}(X,Y)\right|^2$$

Processi Gaussiani

Definizione: un processo bidimensionale è detto Gaussiano o normale se fissato un numero Np di punti ed indivuate in corrispondenza ad essi Np variabili aleatorie, queste formano un sistema di v.a. congiuntamente Gaussiane qualunque sia il numero di punti Np e comunque si scelgano nel piano gli Np punti.

Processi gaussiani: proprietà:

- Un processo ottenuto mediante una trasformazione lineare di un processo Gaussiano è ancora Gaussiano.

- Un processo Gaussiano stazionario in senso lato o debole è anche stazionario in senso forte o stretto.