

6. Il telerilevamento passivo.

Il telerilevamento ha lo scopo di rilevare a distanza le caratteristiche fisico/chimiche di un oggetto tramite un sensore che sia in grado di misurare l'energia elettromagnetica che la superficie dell'oggetto irradia nello spazio circostante verso il sensore stesso.

Tali sensori, spesso montati su piattaforme aviotrasportate o satellitari, sono in grado di scandire la superficie osservata e produrne un'immagine in cui ciascun pixel rappresenta l'intensità della radiazione elettromagnetica irradiata dalla porzione di superficie di volta in volta osservata.

In base al tipo di misurazione effettuata i sensori utilizzati possono essere classificati in sensori attivi e passivi:

- a) i sensori attivi sono in grado di trasmettere verso l'oggetto un segnale, sotto forma di onda elettromagnetica, dotato di opportune caratteristiche e misurare l'intensità dell'eco di ritorno dall'oggetto stesso;
- b) i sensori passivi misurano la radiazione solare reirradiata dall'oggetto osservato o la radiazione che l'oggetto emette spontaneamente per sua natura.

In questa sezione sarà preso in considerazione il telerilevamento passivo che fa uso cioè di sensori passivi per la misurazione della radiazione elettromagnetica proveniente dall'oggetto osservato. I sensori di questo tipo effettuano la misura in diversi canali spettrali centrati su determinate lunghezze d'onda dello spettro elettromagnetico. Le lunghezze d'onda sono scelte sulla base di alcune caratteristiche fisico/chimiche della superficie che si intende studiare. I diversi canali sono caratterizzati da una forma della risposta spettrale che ne fissa la larghezza di banda e sono posizionati all'interno di una particolare regione dello spettro elettromagnetico.

Le applicazioni di tali sensori dipendono dalla particolare configurazione spettrale: alcuni saranno adatti ad esempio per applicazioni mirate all'osservazione della superficie terrestre, altri per lo studio della superficie marina o ancora, per una determinata superficie può essere necessario l'uso di diversi sensori dotati, ciascuno, di particolari specifiche adatte a misurare un differente parametro caratteristico della superficie stessa. In generale, le caratteristiche di irradiazione dell'oggetto, all'interno delle diverse regioni dello spettro elettromagnetico, influenzano in maniera decisiva il progetto del sensore adatto all'applicazione considerata.

Il presente modulo rappresenta un'introduzione al telerilevamento di tipo passivo ed intende fornire una visione d'insieme sugli aspetti principali ad esso connessi che comprendono la propagazione e l'interazione della radiazione elettromagnetica all'interno dei mezzi materiali, la caratterizzazione dei sistemi ottici di ripresa e dei sistemi di misurazione dell'energia elettromagnetica.

6.1 *Lo spettro elettromagnetico.*

In generale un'onda elettromagnetica che si propaga nello spazio può essere pensata come sovrapposizione di onde piane sinusoidali caratterizzate ciascuna da una lunghezza d'onda λ e da una frequenza f . Se il mezzo entro cui avviene la propagazione

è il vuoto, allora la frequenza è legata alla lunghezza d'onda tramite la velocità della luce nel vuoto, $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$, come segue:

$$\lambda = \frac{c}{f}. \quad (6.1)$$

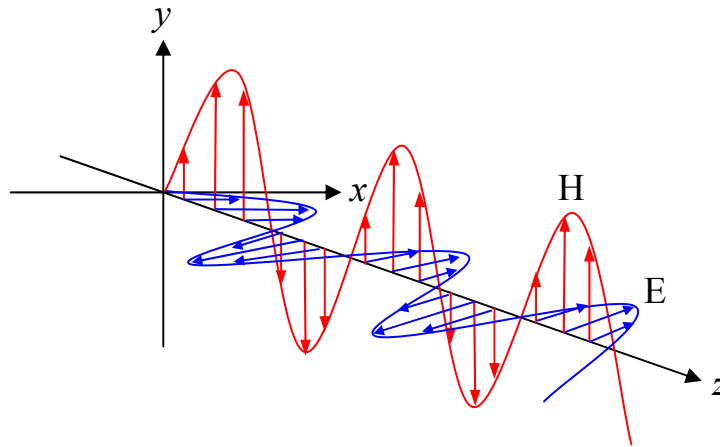


Fig.6_1. Onda piana.

L'energia radiante che si propaga nello spazio sottoforma di onda elettromagnetica può essere caratterizzata, come vedremo in seguito, da una determinata distribuzione al variare della lunghezza d'onda λ . Tale distribuzione rappresenta in pratica la frazione di energia trasportata dalle singole componenti di onda piana che costituiscono il segnale nel suo complesso. Lo spettro elettromagnetico è l'insieme di tutte le possibili lunghezze d'onda su cui può trovarsi distribuita l'energia associata ad un'onda elettromagnetica che si propaga nello spazio.

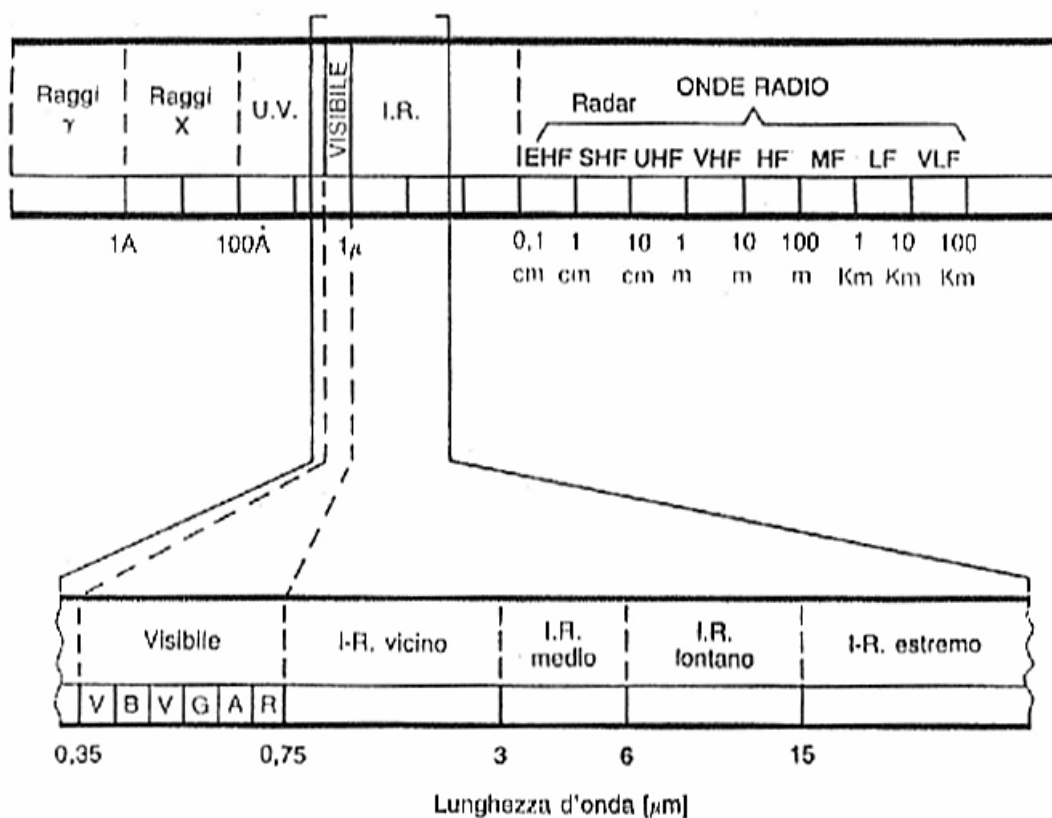


Fig.6_2. Lo spettro elettromagnetico.

Le lunghezze d'onda maggiormente utilizzate nelle applicazioni, sia nel campo delle telecomunicazioni che del telerilevamento, sono raggruppate in un certo numero di regioni spettrali contigue, come indicato in fig.6_2.

La gamma delle radio frequenze è caratterizzata da lunghezze d'onda tra 0.1 cm e 100 Km (nel vuoto). Tra queste, la zona delle microonde è la più usata nel telerilevamento sia attivo che passivo. Tale regione comprende tutte le lunghezze d'onda che vanno da 1 mm a 30 cm ovvero le frequenze tra 1 GHz e 300 GHz. La tab.6_1 mostra un'ulteriore classificazione della regione delle microonde in bande di frequenze più ristrette.

Nome banda	Frequenze f [GHz]	Lunghezze d'onda λ
SHF: Super High Frequencies	3-30	1-10 cm
EHF: Extra High Frequencies	30-300	1-10 mm
L	1-2	15-30 cm
S	2-4	7.5-15 cm
C	4-8	3.75-7.5 cm
X	8-12	2.5-3.75 cm
Ku	12-18	1.67-2.5 cm
K	18-27	1.11-1.67 cm
Ka	27-40	7.5 mm-1.11 cm
Millimetriche	40-300	1-7.5 mm

Tab.6_1. Gamma delle microonde.

Dopo la regione delle onde millimetriche troviamo le onde sub-millimetriche e di seguito la regione dell'infrarosso che copre le lunghezze d'onda tra 0.75 μm e 100 μm . Questa è suddivisa a sua volta in altre quattro bande:

- a) l'infrarosso estremo tra 15 e 100 μm
- b) l'infrarosso lontano tra 6 e 15 μm
- c) l'infrarosso medio tra 3 e 6 μm
- d) l'infrarosso vicino tra 0.75 e 3 μm

Contigua all'infrarosso vicino troviamo la gamma di lunghezze d'onda percepibili dall'occhio umano ovvero la regione del visibile compresa tra 350 nm (estremo inferiore della gamma del colore violetto) e 750 nm (estremo superiore della gamma del colore rosso). In tab.6_2 sono riportate le diverse bande in cui a sua volta è divisa la gamma del visibile.

A seguire abbiamo la regione dell'ultravioletto tra 0.35 μm e 300 \AA , la gamma dei raggi X tra 0.3 e 300 \AA e quella dei raggi Γ con lunghezze d'onda minori di 0.3 \AA , particolarmente utilizzate nelle applicazioni di tipo astronomico.

Banda (colore)	f [THz]	λ [nm] (nel vuoto)
Rosso	400-482	622-750
Arancione	482-503	597-622
Giallo	503-520	577-597
Verde	520-610	492-577
Blu	610-659	455-492
Violetto	659-857	350-455

Tab.6_2. Gamma del visibile.

Nel telerilevamento della superficie terrestre e marina le zone spettrali maggiormente utilizzate sono la regione del visibile/infrarosso, tra circa 0.4 a 12 μm , e la regione delle microonde tra circa 30 e 300 mm (bande L, S, C e X) che corrispondono ad un campo di frequenze di 0.025-0.75 THz e 1-10 GHz, rispettivamente. Per il telerilevamento dell'atmosfera si utilizza spesso la gamma delle microonde tra 20 e 60 GHz.

Alla base di una siffatta suddivisione dello spettro si trovano i meccanismi di interazione tra campo elettromagnetico e materia che sono diversi a seconda della particolare gamma di lunghezze d'onda su cui è distribuita l'energia radiante che investe gli oggetti osservati. Ad esempio nella gamma del visibile/infrarosso l'energia radiante misurata da un sensore per il telerilevamento marino o terrestre dipende fortemente da alcune proprietà dei corpi osservati quali la pigmentazione e la struttura cellulare nella vegetazione, il contenuto di sedimenti e fitoplancton nell'acqua, il contenuto di minerali ed umidità del terreno. Nell'infrarosso cosiddetto termico (infrarosso lontano) l'intensità della radiazione misurata dipende in massima parte dalle proprietà termiche di uno strato sottilissimo della superficie che delimita gli oggetti osservati (ad esempio si prenda in considerazione l'interfaccia aria-acqua nell'osservazione della superficie marina). Nella gamma delle microonde usata per i sensori attivi, il fenomeno della

retrodiffusione del campo incidente è regolato sia dalle proprietà elettriche del materiale osservato, espresse in termini di permittività complessa, sia dal grado di rugosità della sua superficie. Nella zona delle onde millimetriche tra 20 e 60 GHz la propagazione dell'energia radiante è fortemente influenzata dal contenuto di ossigeno e vapore acqueo in atmosfera; le misure in tale banda possono essere utilizzate per ricavare informazioni su tali costituenti. In generale, quindi, ciascuna zona spettrale, per sua natura, consente di acquisire particolari informazioni sulle proprietà fisico/chimiche dei corpi osservati.

6.2 La misura a distanza di grandezze fisiche.

La misura delle grandezze fisiche che caratterizzano un corpo materiale tramite un sensore posto ad una certa distanza da esso è, in generale, di natura indiretta. Un sensore che opera all'interno di una fissata regione dello spettro elettromagnetico effettua una sorta di campionamento spettrale dell'energia elettromagnetica che proviene dall'oggetto osservato. Il sensore esegue cioè una misura dell'energia radiante media all'interno di un certo numero di bande (o canali) la cui larghezza spettrale dipende sia dall'applicazione considerata che dai limiti tecnologici incontrati nella costruzione del sensore stesso. L'uscita da ciascun canale è un segnale legato al flusso di potenza radiante medio che emerge dalla porzione di superficie di volta in volta osservata. I segnali in uscita dai singoli canali sono legati in qualche modo alle grandezze di interesse che possono quindi essere stimate ricorrendo all'uso di particolari algoritmi che elaborano in maniera opportuna i segnali stessi.

Un sensore di tipo passivo misura la radiazione solare che la superficie osservata rinvia verso il sensore stesso o/e la radiazione che la superficie emette naturalmente a causa di meccanismi fisici a cui si accennerà nel proseguo. La radiazione solare che giunge al sensore e che ha interagito con il corpo materiale può avere due nature distinte. Infatti, la radiazione solare che incide sulla superficie dell'oggetto può essere diffusa in tutte le direzioni a causa di interazioni di tipo superficiale o volumetrico (fig.6_3). Al sensore giungerà una parte della radiazione solare direttamente diffusa dalla superficie del corpo ed un'altra parte che ha interagito con il corpo al suo interno e che riemerge dalla sua superficie per poi propagarsi nuovamente nello spazio circostante e verso il sensore. La presenza dell'atmosfera terrestre oltre che introdurre dei disturbi sul segnale di uscita al sensore, influisce anche sulla propagazione del segnale elettromagnetico verso il sensore stesso introducendo delle distorsioni che dovranno essere opportunamente compensate in fase di elaborazione del dato telerilevato.

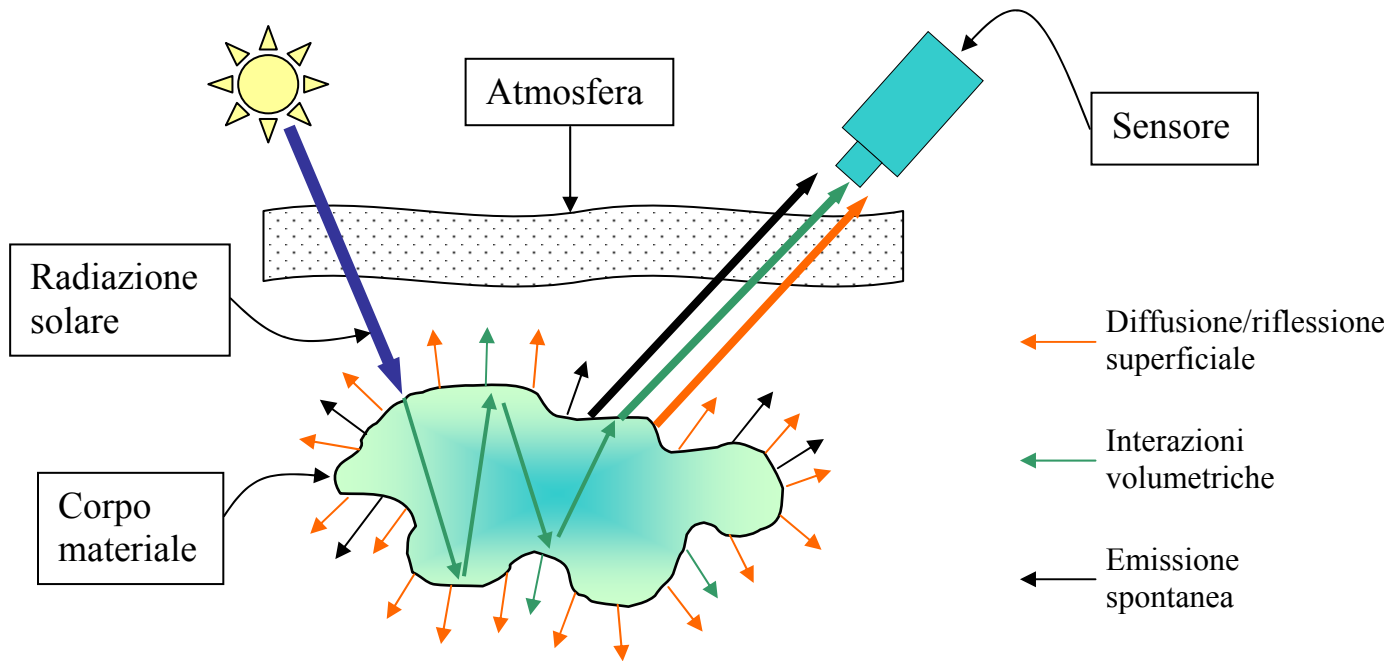


Fig.6_3. Misura a distanza di grandezze fisico/chimiche relative ad un corpo materiale.

I sensori per il telerilevamento passivo che operano nel visibile o nell'infrarosso sono costituiti principalmente, come indicato in fig.6_4, da un sistema ottico di ripresa, da un sensore elettro-ottico e da un convertitore analogico digitale. Il sistema ottico ha la funzione di focalizzare la radiazione ricevuta dalla superficie osservata sulla superficie del sensore vero e proprio. Questo a sua volta è un sistema elettro-ottico che ha il compito di convertire la potenza elettromagnetica che lo investe in un segnale elettrico di caratteristiche opportune. Il segnale così ottenuto viene successivamente digitalizzato dal sistema di conversione A/D.

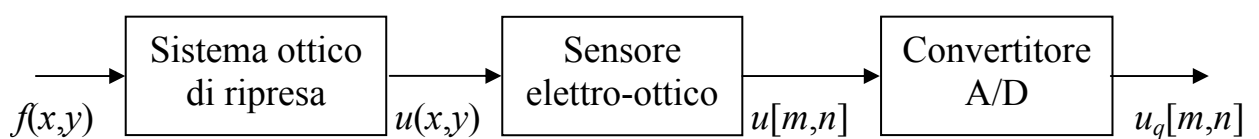


Fig.6_4. Sottosistemi di un sensore per il telerilevamento passivo operante a frequenze ottiche.

Il campo di vista del sistema ottico e la geometria di ripresa del sensore determinano l'estensione della superficie di volta in volta osservata ovvero la risoluzione spaziale a terra del sistema. In linea di principio questa dipenderà, come evidenziato in fig.6_5, oltre che dal campo di vista, cioè dall'angolo θ_c , anche dall'angolo di vista θ e dalla posizione del sensore nello spazio.

Per operare la misura della grandezza fisica di interesse in maniera indiretta tramite l'elaborazione di dati telerilevati di solito ci si basa su un approccio che prevede l'inversione di un modello diretto. Si definisce per prima cosa il problema diretto che

porterà alla realizzazione di un modello fisico che permette di calcolare il segnale di uscita al sensore fissato il valore di un determinato numero di parametri di ingresso. Tali parametri comprendono: i) le grandezze fisiche che si intende stimare caratterizzanti l'oggetto osservato, ii) i parametri che determinano lo stato dell'atmosfera attraverso cui si propaga, verso il sensore, la radiazione proveniente dalla superficie illuminata e iii) le caratteristiche del sensore. Alla base del modello diretto troviamo tutti i fenomeni fisici che regolano l'interazione della superficie illuminata con la radiazione elettromagnetica che incide su di essa. Fissato il particolare tipo di sensore e le caratteristiche di propagazione attraverso l'atmosfera, il modello permette di prevedere il comportamento dell'oggetto osservato in risposta a determinati valori dei parametri che si intende stimare. La stima di tali parametri si effettua risolvendo il cosiddetto problema inverso. Questa è la fase in cui il modello diretto è inserito in uno schema di inversione che permette di stimare dalle misure effettuate dal sensore i parametri di interesse. Gli algoritmi d'inversione una volta definiti ed applicati vengono successivamente sottoposti a validazione tramite il confronto delle stime ottenute con dati di verità a terra.

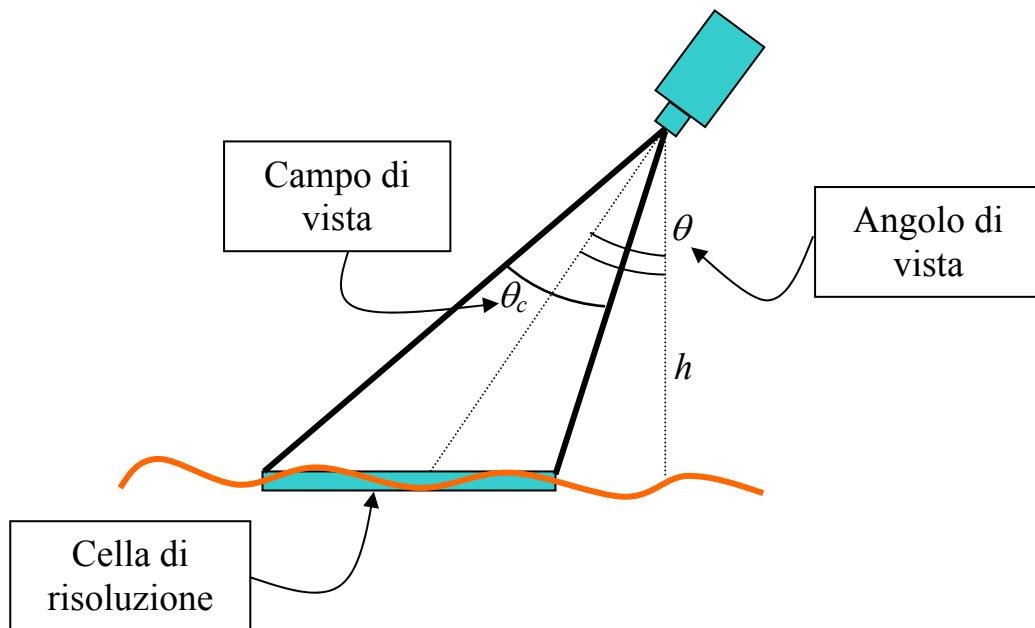


Fig.6_5. Configurazione geometrica di un sensore per il telerilevamento.

6.3 Richiami di teoria della radiazione.

La misurazione dell'energia radiante, in una regione qualsiasi dello spettro elettromagnetico, effettuata tramite rivelatori fisici, è l'oggetto di studio della radiometria. Per caratterizzare la radiazione che incide su o che proviene dalla superficie di un determinato oggetto la radiometria fa uso di una serie di grandezze dette appunto radiometriche. Con esse il fenomeno della propagazione delle onde elettromagnetiche all'interno di un mezzo materiale viene studiato dal punto vista puramente energetico. Nel definire tali grandezze si dovrà tener conto che in generale l'energia associata ad un'onda elettromagnetica può essere emessa da una sorgente, propagarsi nel vuoto o in un mezzo materiale, incidere sopra un mezzo materiale ed

essere in parte reirradiata nello spazio circostante ed in parte assorbita da e/o trasmessa attraverso il mezzo stesso. Nel telerilevamento passivo tali grandezze sono largamente usate. Esse sono alla base dei modelli fisici diretti che permettono di stimare, tramite opportune procedure di inversione, i parametri fisici che caratterizzano le superfici osservate, dai dati misurati attraverso i sensori.

La grandezza radiometrica di base è l'**energia radiante** definita come la quantità di energia associata ad un'onda elettromagnetica che incide su, attraversa o emerge da una data superficie in un certo intervallo di tempo. Di solito si usa indicare l'energia radiante con Q e nel sistema internazionale essa è misurata in [Joule]:

$$Q \text{ [Joule]}. \quad (6.2)$$

Per tale grandezza e per quelle che saranno introdotte successivamente è possibile definire una corrispondente **densità spettrale** (%tav.6_1%) di energia come l'energia radiante per intervallo unitario di lunghezza d'onda alla lunghezza d'onda λ ovvero come derivata dell'energia radiante rispetto a λ :

$$Q_\lambda = \frac{dQ}{d\lambda} \text{ [Joule/nm]}. \quad (6.3)$$

Se λ è misurata in [nm] (assunto che sarà valido anche nel seguito) allora la densità spettrale di energia è misurata in [Joule/nm]. Questa rappresenta la distribuzione spettrale dell'energia che incide su, attraversa o emerge da una data superficie. Integrando la (6.3) su un determinato intervallo di lunghezze d'onda, $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, si ottiene la quantità di energia associata a tale banda:

$$Q = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Q_\lambda \cdot d\lambda. \quad (6.4)$$

Derivando rispetto al tempo l'energia radiante Q si ottiene il **flusso di potenza radiante** Φ :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \text{ [W]}. \quad (6.5)$$

che rappresenta la velocità di variazione dell'energia radiante nel tempo ovvero l'energia radiante che transita da una determinata superficie nell'unità di tempo; si misura in Watt. Analogamente a quanto fatto per l'energia radiante, derivando Φ rispetto alla lunghezza d'onda è possibile definire la corrispondente densità spettrale di flusso:

$$\Phi_\lambda = \frac{d\Phi}{d\lambda} = \frac{d^2Q}{d\lambda dt} \text{ [W/nm]}, \quad (6.6)$$

che fornisce il flusso di potenza radiante per intervallo unitario di lunghezza d'onda alla lunghezza d'onda λ misurato in [W/nm].

L'energia radiante che transita attraverso una superficie nell'intervallo di tempo $t_1 < t < t_2$ si ottiene integrando il flusso di potenza radiante tra t_1 e t_2 :

$$Q_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) \cdot dt. \quad (6.7)$$

L'**intensità radiante** è definita come il flusso di potenza radiante per unità di angolo solido (%tav.6_2%) che incide su, attraversa o emerge da un punto nello spazio e si propaga in una certa direzione (%tav.6_3%):

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad [W/sr]; \quad (6.8)$$

si misura in Watt su steradiano [W/sr].

La corrispondente intensità radiante spettrale misurata in [W/sr·nm] si ottiene derivando I rispetto alla lunghezza d'onda:

$$I_\lambda = \frac{dI}{d\lambda} = \frac{d^2\Phi}{d\Omega d\lambda} \quad \left[\frac{W}{sr \cdot nm} \right]. \quad (6.9)$$

L'intensità radiante è una grandezza che viene impiegata per descrivere l'intensità della radiazione proveniente da sorgenti puntiformi. In generale essa è una funzione della direzione di propagazione della radiazione.

Per caratterizzare sorgenti che hanno una certa estensione spaziale o per descrivere la distribuzione dell'energia radiante su superfici comunque estese (energia che può emergere da o incidere sulla superficie considerata) si ricorre a due grandezze di uso frequente in radiometria: l'irradianza e la radianza.

L'**irradianza** è definita come il flusso radiante per unità di area che incide su, attraversa o emerge da un punto di una determinata superficie (%tav.6_4%):

$$E = \frac{d\Phi}{ds_0} \quad [W/m^2], \quad (6.10)$$

ed è misurata in Watt su metro quadro [W/m²].

L'irradianza spettrale al solito viene definita come l'irradianza per intervallo unitario di lunghezza d'onda alla lunghezza d'onda λ ovvero come derivata dell'irradianza rispetto a λ :

$$E_{\lambda} = \frac{dE}{d\lambda} = \frac{d^2\Phi}{ds_0 d\lambda} \left[\frac{W}{m^2 \cdot nm} \right]. \quad (6.11)$$

Se l'irradianza si riferisce ad un flusso di potenza uscente da una superficie, allora essa prende anche il nome di **exitanza** e si indica di solito con M . Nel seguito si farà uso solo del termine irradianza seguito dagli aggettivi incidente o emergente a seconda che si faccia riferimento ad un flusso incidente sulla o emergente dalla superficie considerata. L'irradianza può essere definita anche considerando, rispetto al sistema di riferimento fissato, solo il flusso proveniente dall'emisfero posto al di sopra della superficie. Si avrà in tal caso l'irradianza cosiddetta *downward* E_d . Analogamente è possibile definire l'irradianza *upward* E_u considerando il flusso che proviene dall'emisfero inferiore (%tav.6_5%). L'irradianza tiene conto del flusso di potenza proveniente da tutte le direzioni dell'emisfero al di sopra e/o al di sotto del punto considerato sulla superficie di interesse. Non è una grandezza che tiene conto cioè della direzione di propagazione del flusso. Essa è funzione solo delle coordinate del punto sulla superficie rispetto ad un fissato sistema di riferimento. Per lo studio della distribuzione del flusso al variare della direzione di propagazione oltre che del punto sulla superficie considerata si utilizza la **radianza**. Essa è definita come il flusso radiante per unità di area proiettata (%tav.6_2%) e di angolo solido che incide su, attraversa o emerge in una data direzione da un determinato punto di una superficie (%tav.6_6%):

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\Omega ds} = \frac{d^2\Phi}{d\Omega ds_0 \cdot \cos(\theta)} \left[\frac{W}{m^2 \cdot sr} \right], \quad (6.12)$$

ed è misurata in Watt su metro quadro su steradiano [$W/m^2 \cdot sr$]. La radianza è una grandezza che risulta funzione sia della posizione del punto sulla superficie sia della direzione considerata.

La corrispondente grandezza spettrale, la radianza spettrale, si ottiene derivando la radianza rispetto alla lunghezza d'onda λ :

$$L_{\lambda} = \frac{dL}{d\lambda} = \frac{d^3\Phi}{d\Omega ds d\lambda} \left[\frac{W}{m^2 \cdot sr \cdot nm} \right]. \quad (6.13)$$

Anche per la radianza, come per l'irradianza, si indicherà convenzionalmente con radianza incidente o emergente quella associata ad un flusso di potenza che incide su o emerge da una determinata superficie di un oggetto, rispettivamente.

La tab.6_3 riassume la definizione delle grandezze radiometriche introdotte e le relative unità misura del Sistema Internazionale.

Grandezza	Definizione	Simbolo	Unità di misura (SI)
Energia radiante		Q	J (joule)
Flusso di potenza radiante	dQ/dt	ϕ	W (watt)
Irradianza	$d\phi/ds_0$	E	W/m^2

Radianza	$L = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Omega \cdot \partial s_0 \cdot \cos(\theta)}$	L	W/(sr·m ²)
Flusso spettrale di potenza radiante	$\phi_\lambda = \partial \phi / \partial \lambda$	ϕ_λ	W/nm
Irradianza spettrale	$E_\lambda = \partial E / \partial \lambda$	E_λ	W/(m ² nm)
Radianza spettrale	$L_\lambda = \partial L / \partial \lambda$	L_λ	W/(m ² sr nm)

Tab.6_3. Tabella riassuntiva delle definizioni delle principali grandezze radiometriche e delle relative grandezze spettrali.

Nota il valore della radianza di un punto P di una superficie generica S, è possibile ricavare il valore dell'irradianza sullo stesso punto. Ricordando la definizione di radianza:

$$L = \frac{d^2 \Phi}{d\Omega ds_0 \cdot \cos(\theta)}, \quad (6.14)$$

da questa è possibile ricavare l'irradianza infinitesima associata al flusso infinitesimo che emerge dalla superficie (o che incide sulla stessa) nel punto P attraverso l'angolo solido infinitesimo $d\Omega$ verso la direzione definita dagli angoli θ e ϕ :

$$dE = d\left(\frac{d\Phi}{ds_0}\right) = L(\theta, \phi) \cdot \cos(\theta) \cdot d\Omega, \quad (6.15)$$

dove si è omessa la dipendenza dalle coordinate del generico punto P per semplicità di notazione. Se ad esempio si considera il flusso che si propaga verso l'emisfero superiore, integrando sull'angolo solido pari a $2 \cdot \pi$ sr si ottiene la radianza uscente dal punto:

$$E = \frac{d\Phi}{ds_0} = \int_{2 \cdot \pi} L(\theta, \phi) \cdot \cos(\theta) \cdot d\Omega. \quad (6.16)$$

Ricordando che in coordinate sferiche l'angolo solido infinitesimo è pari a $d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\phi$, la (6.16) diventa:

$$E = \int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^\pi L(\theta, \phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta \cdot d\phi. \quad (6.17)$$

Il flusso totale che emerge dalla superficie si ottiene da quest'ultima equazione calcolando l'integrale superficiale su tutta la superficie considerata.

Se nella (6.17) la radianza è indipendente dalla direzione di propagazione, ovvero $L(\theta, \phi) = L$, allora la superficie irradia in maniera isotropa e la radianza nel generico punto P risulta pari a:

$$E = L \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta \cdot d\phi = \pi \cdot L \quad (6.18)$$

La superficie costituisce in tal modo un radiatore ideale denominato radiatore **Lambertiano**.

Un esempio di uso delle grandezze radiometriche introdotte si ha nel calcolo del flusso di potenza radiante che incide su una superficie ricevente di area A_0 posta ad una certa distanza da una superficie sorgente di area S_0 caratterizzata da una radianza emergente $L(\theta, \phi)$. Questo caso può servire a schematizzare un sensore passivo per telerilevamento che riprende ad esempio una porzione di superficie terrestre. La **%tav.6_7%** mostra la geometria a cui si farà riferimento per effettuare il calcolo del flusso su A_0 data la radianza della sorgente. Si considerino due punti generici P_S e P_A posizionati sulla superficie sorgente e ricevente rispettivamente e gli elementi infinitesimi di superficie ds_0 e da_0 ad essi associati. L'elemento infinitesimo di flusso di potenza radiante emesso dall'elemento ds_0 in direzione (θ, ϕ) e all'interno dell'angolo solido infinitesimo $d\Omega$ è pari, tenendo conto della (6.14), a:

$$d^2\Phi = L(\theta, \phi) \cdot \cos(\theta) \cdot d\Omega \cdot ds_0 \quad (6.19)$$

L'angolo solido $d\Omega$ sotteso dalla superficie ricevente infinitesima da_0 proiettata lungo la direzione (θ, ϕ) è dato da:

$$d\Omega = \frac{da}{R^2} = \frac{da_0 \cdot \cos(\psi)}{R^2}, \quad (6.20)$$

dove R è la distanza tra i punti P_S e P_A . Sostituendo la (6.20) nella (6.19) si ottiene:

$$d^2\Phi = \frac{L(\theta, \phi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\psi)}{R^2} \cdot da_0 \cdot ds_0. \quad (6.21)$$

Integrando la (6.21) su tutta la superficie S_0 della sorgente si ottiene l'irradianza sulla superficie ricevente:

$$E = \frac{d\Phi}{da_0} = \int_{S_0} \frac{L(\theta, \phi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\psi)}{R^2} \cdot ds_0. \quad (6.22)$$

Infine, integrando la (6.22) su tutta la superficie ricevente A_0 si avrà il flusso di potenza radiante ricevuto in funzione della radianza emergente dalla superficie sorgente:

$$\Phi = \int_{S_0} \int_{A_0} \frac{L(\theta, \phi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\psi)}{R^2} \cdot da_0 \cdot ds_0. \quad (6.23)$$

Un caso particolare in cui si può ottenere una notevole semplificazione della (6.22) e della (6.23) si ha quando l'area S_0 della sorgente è piccola rispetto alla distanza sorgente/ricevitore (%tav.6_8%). In tale condizione i valori di R^2 , $\cos(\psi)$ e $\cos(\theta)$ non variano apprezzabilmente nel campo di integrazione. Inoltre, se la sorgente è di tipo Lambertiano, la (6.22) può essere approssimata dalla seguente relazione:

$$E \cong \frac{L \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\psi)}{R^2} \cdot S_0, \quad (6.24)$$

che esprime la cosiddetta **legge dell'inverso del quadrato della distanza** che fornisce la riduzione dell'irradianza su una superficie al variare della distanza da una sorgente puntiforme. Le relazioni tra radianza, irradianza e flusso di potenza radiante che sono state introdotte rimangono valide qualora si sostituiscano le varie grandezze radiometriche con le corrispondenti grandezze spettrali. Le relazioni risultanti descriveranno la distribuzione spettrale di una grandezza rispetto alla distribuzione spettrale delle altre. Per ottenere le grandezze radiometriche dalle equazioni relative alle grandezze spettrali si dovrà effettuare l'integrazione di queste ultime sulla banda di lunghezze d'onda di interesse (vedere la (6.4) relativa alla distribuzione spettrale dell'energia radiante). Ciò risulta estremamente utile quando si voglia, ad esempio, conoscere il flusso di potenza radiante che incide sulla superficie di un sensore, caratterizzato da una risposta spettrale selettiva, in funzione della radianza spettrale emergente dalla superficie del corpo osservato dal sensore stesso.

6.4 Emissione e riflessione diffusa.

La radiazione elettromagnetica che proviene dalla superficie di un corpo può avere origine da due fenomeni distinti: i) per emissione spontanea, dovuta alla natura del corpo stesso ed alle condizioni fisiche in cui esso si trova in un dato istante e ii) per riflessione, diretta o diffusa, da parte della superficie del corpo, della radiazione che incide sulla superficie del corpo stesso e che proviene da una o più sorgenti da esso distinte (come ad esempio la luce solare che incide sulla superficie terrestre).

In natura qualsiasi corpo che possiede una temperatura $T > 0 \text{ } ^0K$ costituisce una sorgente di radiazioni elettromagnetiche. L'energia termica fornita ad un corpo contribuisce al moto di agitazione termica degli atomi e delle molecole che costituiscono il corpo stesso. Tale moto, che avviene a spese dell'energia termica, è responsabile dell'emissione di radiazione elettromagnetica. Al contrario, nel caso in cui non vi siano altri scambi energetici, l'assorbimento di energia elettromagnetica da parte di un corpo comporta un incremento della sua energia termica. Se il corpo è tenuto a temperatura costante allora si instaura una condizione di equilibrio tale che l'energia emessa e quella assorbita dal corpo nell'unità di tempo sono uguali.

Un **corpo nero** è un radiatore ideale che trasforma la massima quantità di energia termica, permessa dalle leggi della termodinamica, in energia radiante. Il processo di assorbimento è allo stesso modo massimo: un corpo nero converte in energia termica tutta l'energia radiante incidente in maniera indipendente dalla distribuzione spettrale di questa. La denominazione di corpo nero deriva dal fatto che la superficie di un oggetto che possiede tali proprietà non riflette la radiazione incidente e quindi all'occhio di un osservatore esso apparirebbe completamente scuro. La radianza spettrale emergente da un corpo nero che si trova ad una temperatura T è data dalla legge di Planck:

$$L_{bb}(\lambda, T) = \frac{2 \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\left(e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot K \cdot T}} - 1 \right)}, \quad (6.25)$$

dove h è la costante di Planck, c la velocità della luce nel vuoto e K la costante di Boltzmann.

Il corpo nero ha la proprietà di essere un radiatore Lambertiano quindi, dalla (6.18), l'irradianza emessa è pari a π volte la radianza (6.25):

$$E_{bb}(\lambda, T) = \pi \cdot L_{bb}(\lambda, T). \quad (6.26)$$

Integrando l'irradianza spettrale di corpo nero su tutte le possibili lunghezze d'onda si ottiene la legge di Stefan-Boltzmann che fornisce l'irradianza di corpo nero al variare della temperatura:

$$E_{bb}(T) = \int_0^{\infty} E_{bb}(\lambda, T) \cdot d\lambda = \sigma \cdot T^4, \quad (6.27)$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann pari a $5.67 \times 10^{-8} [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^4]$. La lunghezza d'onda corrispondente al massimo della radianza di corpo nero è data, in funzione della temperatura, dalla legge dello spostamento di Wien:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (6.28)$$

dove $b = 2897.8 [\text{m} \cdot \mu \cdot \text{K}]$. La legge con cui varia la radianza spettrale di un radiatore reale è in genere diversa da quella del corpo nero. Una sorgente reale irradia in misura minore rispetto ad un corpo nero alla stessa temperatura T ed in generale l'emissione avviene in maniera diffusa nello spazio circostante. Si usa esprimere quindi la radianza spettrale di un radiatore ideale come prodotto della radianza di corpo nero per un fattore dipendente dalla lunghezza d'onda:

$$L(\theta, \phi; \lambda, T) = \varepsilon(\theta, \phi; \lambda) \cdot L_{bb}(\lambda, T), \quad (6.29)$$

dove $\varepsilon(\theta, \phi; \lambda)$ è un parametro caratteristico della sorgente che prende il nome di **emittanza spettrale** e che dipende oltre che dalla lunghezza d'onda, anche dalla direzione di irradiazione. In generale, a seconda dell'andamento dell'emittanza spettrale al variare della lunghezza d'onda, la sorgente può irradiare in una determinata banda o in una serie di bande aventi opportune caratteristiche. I radiatori di questo tipo sono detti **selettivi**. Un corpo nero ha emittanza spettrale costante ed unitaria $\varepsilon(\lambda)=1$. Un **corpo grigio** è invece un radiatore non selettivo con emittanza spettrale costante, ma minore di uno (che può dipendere o no dalla direzione di propagazione). La radianza emessa dalla sorgente si ottiene integrando la (6.29) rispetto alla lunghezza d'onda (si è omessa la dipendenza dalla direzione per semplicità di notazione):

$$L(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda) \cdot L_{bb}(\lambda, T) \cdot d\lambda . \quad (6.30)$$

Si può definire inoltre un opportuno fattore di emittanza come rapporto tra la radianza della sorgente e la radianza di un corpo nero alla stessa temperatura T :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{L(T)}{L_{bb}(T)} = \frac{\pi}{\sigma \cdot T^4} \cdot \int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda) \cdot L_{bb}(\lambda, T) \cdot d\lambda . \quad (6.31)$$

Le caratteristiche radiative di un corpo a temperatura T infine possono essere descritte anche attraverso un parametro detto temperatura di brillantezza. Questa è definita come la temperatura T_b di un corpo nero che ha, ad una fissata lunghezza d'onda, la stessa radianza spettrale del radiatore reale considerato. Se $\varepsilon(\theta, \phi; \lambda)$ è l'emittanza spettrale del radiatore allora dalla legge di Planck la temperatura di brillantezza è definita attraverso la seguente equazione:

$$L_{bb}(\lambda, T_b) = \varepsilon(\theta, \phi; \lambda) \cdot L_{bb}(\lambda, T) . \quad (6.32)$$

Nella **fig. 6.9** è mostrata una serie di curve dell'irradianza spettrale emessa da un corpo nero a diverse temperature. La curva con $T=6000$ °K corrisponde all'incirca alla distribuzione spettrale dell'irradianza emessa dal sole il quale emette in maggior misura nella regione del visibile e dell'infrarosso. Il picco di emissione è posizionato nella regione del visibile infatti dalla legge dello spostamento di Wien si ha all'incirca $\lambda_{\max} = 483$ nm. La curva a $T=300$ °K fornisce approssimativamente l'irradianza spettrale associata al flusso di potenza radiante emesso dalla superficie terrestre. La **fig. 6.10** mostra l'irradianza spettrale di sorgenti selettive costituite da alcuni tipi di lampada ad incandescenza.

La radiazione elettromagnetica che incide sulla superficie di interfaccia tra due mezzi omogenei (**fig. 6.11**) può essere, in misura dipendente dalle caratteristiche dei mezzi stessi, diffusa nel semispazio di provenienza o trasmessa nel secondo mezzo (indicato in cui può continuare a propagarsi e/o essere assorbita dal mezzo stesso (i due mezzi sono indicati nella **fig. 6.11** come mezzo 1 e mezzo 2 rispettivamente). La

frazione di flusso di potenza radiante incidente diffusa nel mezzo da cui proviene la radiazione, rapportata al flusso totale incidente, prende il nome di riflettanza R :

$$R = \frac{\phi_r}{\phi_i}, \quad (6.33)$$

dove ϕ_r è il flusso di potenza uscente dalla superficie di interfaccia e ϕ_i quello incidente.

La trasmittanza T è un parametro che tiene conto della frazione di flusso radiante che viene trasmessa nel secondo mezzo. Essa è definita come rapporto tra il flusso di potenza trasmesso nel secondo mezzo e il flusso incidente sulla superficie di interfaccia:

$$T = \frac{\phi_t}{\phi_i}, \quad (6.34)$$

dove con ϕ_t si è indicata l'irradianza associata al flusso trasmesso.

L'assorbanza invece rappresenta la frazione del flusso di potenza incidente assorbita nel secondo mezzo rapportata al flusso totale incidente:

$$A = \frac{\phi_a}{\phi_i}, \quad (6.35)$$

in cui ϕ_a rappresenta il flusso di potenza radiante assorbita nel secondo mezzo.

Sostituendo nelle (6.33), (6.34) e (6.35) le distribuzioni spettrali del flusso di potenza radiante si ottengono le definizioni dei corrispondenti parametri di riflettanza, trasmittanza e assorbanza spettrali R_λ , T_λ , A_λ :

$$R_\lambda = \frac{\phi_{\lambda r}}{\phi_{\lambda i}}, \quad T_\lambda = \frac{\phi_{\lambda t}}{\phi_{\lambda i}}, \quad A_\lambda = \frac{\phi_{\lambda a}}{\phi_{\lambda i}}. \quad (6.36)$$

Se all'interno dei mezzi in cui si propaga la radiazione elettromagnetica non avvengono processi di generazione di energia radiante allora, per il principio di conservazione del flusso di potenza, la somma della riflettanza, della trasmittanza e dell'assorbanza deve essere necessariamente uguale ad uno:

$$R_\lambda + T_\lambda + A_\lambda = 1 \quad (6.37)$$

Se la trasmittanza risulta nulla allora il mezzo 2 è detto opaco. Il flusso incidente interagendo con la superficie di interfaccia sarà quindi in parte rinviato nell'emisfero superiore ed in parte assorbito all'interno del mezzo 2. Quando si instaura l'equilibrio termico vale la **legge di Kirchhoff** secondo cui l'assorbanza è uguale all'emittanza. Nel

caso di materiali opachi quindi, essendo $R_\lambda = 1 - A_\lambda$, un buon riflettore risulta essere un pessimo emettitore e viceversa.

La riflettanza definita tramite la (6.33) o la corrispondente riflettanza spettrale nella (6.36) sono di tipo diffuso dato che tengono conto del flusso radiante complessivo reirradiato in tutto il semispazio superiore e del flusso radiante incidente proveniente da ogni direzione. In pratica, la misurazione del flusso di potenza non avviene necessariamente all'interno di un angolo solido emisferico, ma si possono effettuare misure differenti ad esempio di tipo direzionale o conico (%tav.6_12%). Tali sistemi di scansione angolare a seconda di come sono combinati possono dare luogo a differenti definizioni della riflettanza o dei parametri di trasmittanza e assorbanza come riportato a titolo di esempio nella (%tav.6_13%) la quale mostra le geometrie di scansione per la definizione della riflettanza e della trasmittanza direzionale-emisferica.

Se il mezzo 2 presenta delle disomogeneità, una parte della radiazione che si propaga in esso, dalla superficie di interfaccia (ovvero una parte del flusso di potenza radiante trasmesso attraverso l'interfaccia), sarà di volta in volta diffusa dagli strati sottostanti verso gli strati superiori del mezzo stesso. Il flusso di potenza diffuso verso il mezzo 1 non sarà dovuto unicamente all'interazione superficiale del flusso incidente con l'interfaccia tra i due mezzi, ma anche alla radiazione diffusa verso l'emisfero superiore dagli strati sottostanti del mezzo 2. Per caratterizzare tale fenomeno si definisce la riflettanza spettrale, $R(z, \lambda)$, come il rapporto tra l'irradianza spettrale diffusa *upward*, che emerge dal basso da un piano di riferimento posto a profondità z rispetto ad un determinato sistema di assi cartesiani, e l'irradianza spettrale diffusa *downward* che incide dall'alto sul piano stesso:

$$R(z, \lambda) = \frac{E_u(z, \lambda)}{E_d(z, \lambda)}, \quad (6.38)$$

dove $E_d(z, \lambda)$ ed $E_u(z, \lambda)$ sono l'irradianza spettrale *downward* ed *upward* rispettivamente. Se il piano di riferimento a $z=0$ viene scelto in corrispondenza dell'interfaccia tra i due mezzi, allora il parametro $R(z=0^-, \lambda)$ è la cosiddetta riflettanza spettrale (diffusa) sub-superficiale. Essa fornisce la distribuzione spettrale della frazione di flusso radiante emergente dalla superficie di interfaccia dovuto alla diffusione della radiazione da parte degli strati sottostanti in rapporto al flusso totale che incide appena al di sotto della superficie di interfaccia stessa. La radiazione che penetrando nel mezzo 2 si propaga e successivamente riemerge dalla superficie d'interfaccia verso l'emisfero superiore a causa della diffusione da parte delle disomogeneità del mezzo 2, porta con se informazioni sulla composizione di quest'ultimo. La misura del flusso di potenza radiante associato, fornisce un segnale utile da cui è possibile in teoria ricavare, attraverso opportuni algoritmi di stima, i parametri che caratterizzano le proprietà fisico/chimiche del mezzo stesso al suo interno.

Dal punto di vista del telerilevamento passivo la riflettanza è il parametro più importante dato che permette di valutare le caratteristiche di reirradiazione di un corpo materiale alle diverse lunghezze d'onda quando su esso incide la radiazione

elettromagnetica proveniente dal sole attraverso l'atmosfera terrestre. Essa dipende, oltre che dalle caratteristiche di illuminazione dell'oggetto, anche dalle sue proprietà fisiche e chimiche, quindi, la sua conoscenza consente di capire l'effetto che i vari componenti di un corpo materiale esercitano sulla radiazione elettromagnetica che interagisce con essi alle varie lunghezze d'onda.

6.5 *Sostanze otticamente attive.*

Le sostanze che interagiscono con la radiazione luminosa attraverso vari fenomeni quali ad esempio l'assorbimento e la diffusione sono dette otticamente attive. Quando attraversate dalla radiazione luminosa tali sostanze ne modificano la distribuzione spettrale di energia in maniera caratteristica dando luogo ad una particolare "firma spettrale" rilevabile ad esempio misurando la riflettanza spettrale o l'irradianza spettrale emergente. Un corpo potrà essere costituito da differenti sostanze otticamente attive. A seconda della concentrazione relativa di queste, il corpo potrà rispondere in maniera differente alla radiazione luminosa che incide su di esso.

Esempi di sostanze otticamente attive sono quelle contenute nell'acqua marina e nell'atmosfera. L'acqua di mare è composta oltre che dall'acqua di mare pura da tre costituenti principali che possono interagire con la radiazione luminosa tramite i fenomeni di assorbimento e diffusione: i) il fitoplancton, ii) le particelle non clorofillacee e iii) la sostanza organica decomposta detta sostanza gialla (%tav.6_15%).

Il *Fitoplancton* è costituito da alghe unicellulari che interagiscono con la radiazione solare tramite sostanze denominate pigmenti quali la clorofilla-a e la feofitina-a. Tali organismi sono localizzati all'interno della cosiddetta zona eufotica, lo strato in cui si concentra il 90% dell'energia solare che raggiunge la superficie d'interfaccia aria-acqua, e sono in grado di produrre carbonio organico tramite il processo di fotosintesi clorofilliana, assorbendo anidride carbonica dagli strati superficiali d'acqua ed assumendo nutrienti costituiti da fosfati e sostanze azotate provenienti dagli strati sottostanti.

Le particelle non clorofillacee possono essere di natura organica od inorganica. Il particolato di natura organica è costituito in massima parte da microrganismi, batteri o virus, le cui dimensioni sono tali da rendere possibile l'interazione con la radiazione solare nel visibile da cui sono investiti. Le particelle di origine inorganica sono costituite principalmente da silicati e carbonati di origine sia biologica (ad esempio i coccoliti, scheletri carbonatici di alcune specie di alghe fitoplanctoniche) che terrestre (apporti in mare di detriti da parte di fiumi o scarichi industriali, erosione delle coste).

La sostanza organica in soluzione o *sostanza gialla* è costituita dal prodotto di degradazione di sostanze organiche incluso il fitoplancton stesso. Notevoli quantità di sostanza gialla sono presenti nelle zone costiere.

La radiazione solare incidente sulla superficie d'interfaccia aria-acqua può essere reirradiata in maniera dipendente dalla concentrazione delle tre sostanze precedentemente introdotte.

La %tav.6_16% mostra ad esempio la riflettanza spettrale sub-superficiale (all'interfaccia aria-acqua) dell'acqua di mare pura, in assenza cioè di fitoplancton di particelle non-clorofillacee e di sostanza gialla, nella regione del visibile tra 400 nm e 700 nm. Si può notare che la curva di riflettanza presenta i valori più alti nella parte

dello spettro relativa alle lunghezze d'onda del colore blu tra 400 nm e 500 nm. In tali condizioni, la maggior parte del flusso di potenza reirradiato dall'acqua di mare verso l'atmosfera (flusso dovuto alla diffusione, da parte degli strati di acqua più profondi, della radiazione solare trasmessa attraverso la superficie di interfaccia) è trasportato dalle componenti appartenenti alla banda spettrale del blu.

La [fig. 6_17](#) mostra invece alcune curve di riflettanza corrispondenti a diversi valori della concentrazione di fitoplancton e particelle non-clorofillacee. All'aumentare della concentrazione di fitoplancton, a parità di concentrazione delle altre due sostanze, la riflettanza spettrale nella regione del blu tende a diminuire assumendo valori confrontabili con quelli assunti nella banda del verde tra circa 500 nm e 590 nm. Se aumenta la concentrazione di particelle non clorofillacee si osserverà la curva di riflettanza spettrale traslare verso l'alto ed il suo picco spettrale spostarsi sempre di più verso la regione del verde fino a quella del giallo-arancio. Tale comportamento può essere sfruttato, ad esempio, per stimare le concentrazioni delle tre sostanze otticamente attive misurando il flusso di potenza emergente dalla superficie marina in alcune bande posizionate nella regione del visibile e centrate su lunghezze d'onda in cui è più sensibile la variazione della riflettanza spettrale rispetto alle variazioni dei valori di concentrazione dei vari costituenti.

Per i sensori passivi adibiti all'osservazione della superficie terrestre o marina la presenza dell'atmosfera terrestre costituisce una fonte di disturbo per il segnale di uscita. Non solo essa agisce da filtro per la radiazione solare lungo i cammini dal sole alla superficie terrestre e dalla superficie terrestre al sensore, alterandone la distribuzione spettrale dell'energia, ma fa in modo di introdurre componenti indesiderate di segnale dovute alla porzione di radiazione solare che non raggiunge la superficie terrestre e che viene direttamente diffusa dall'atmosfera in direzione del sensore. L'atmosfera terrestre interagisce con la radiazione solare tramite i processi di assorbimento e diffusione da parte di un elevato numero di sostanze che possono essere suddivise in due classi principali: i) gas permanenti e ii) particelle di aerosol atmosferico. La prima classe comprende tutti i gas che sono presenti stabilmente in atmosfera con concentrazioni percentuali uniformi e ben conosciute. L'aerosol è costituito da particelle solide o liquide provenienti dalla superficie terrestre e trasportate in atmosfera dai venti o formate dalla sublimazione o condensazione di gas già presenti in atmosfera. Rispetto ai gas permanenti, l'aerosol è il costituente atmosferico che possiede le caratteristiche più variabili sia nel tempo che nello spazio e quindi risulta difficile una sua modellizzazione al fine di compensare gli effetti indesiderati indotti sulla radiazione che raggiunge la superficie di un sensore che osserva un determinato corpo materiale. Esistono comunque, come sarà spiegato in seguito, procedure che sfruttano misurazioni in diversi canali spettrali che permettono un'efficace riduzione di tali effetti di disturbo.

6.6 Il trasferimento radiativo in atmosfera.

L'atmosfera, quando non è essa stessa oggetto di studio, costituisce uno dei maggiori fattori che limitano le prestazioni di un sistema elettro-ottico. L'interazione tra la radiazione che proviene da una sorgente ed un mezzo materiale introduce delle perdite nel flusso di potenza radiante che investe la superficie di un sensore. Tali perdite sono

dovute a tre fenomeni principali: i) l'assorbimento della radiazione nel mezzo, ii) la diffusione della radiazione da parte del mezzo materiale in direzioni diverse da quella del sensore, iii) la turbolenza del mezzo.

La turbolenza è un fenomeno molto complesso legato alle fluttuazioni della velocità delle particelle di aria ed alla presenza di moti vorticosi a varie scale spaziali che inducono variazioni in quelle caratteristiche dell'atmosfera che influiscono più direttamente sulla propagazione della radiazione elettromagnetica. La trattazione di tali fenomeni esula dagli scopi di questo corso per cui per eventuali approfondimenti si rimanda a (rif.6_1). Di seguito verrà trattato il caso di atmosfera non turbolenta formata da costituenti assorbenti e/o diffusivi presenti in varie percentuali.

Le variazioni della radianza spettrale lungo un cammino di lunghezza r che va dall'origine di un fissato sistema di riferimento nello spazio ad un generico punto di coordinate $\underline{r} = (x, y, z)$ sono regolate dalla cosiddetta equazione del trasferimento radiativo. Sia $L_\lambda(r)$ la radianza spettrale in funzione di r lungo il cammino specificato e si consideri un volume infinitesimo intorno al punto \underline{r} (tav.6.18). La radianza uscente da tale volume in direzione del cammino r considerato si ipotizza essere pari a $L_\lambda(r + dr) = L_\lambda(r) + dL_\lambda(r)$ dove $dL_\lambda(r)$ è la variazione della radianza lungo il cammino infinitesimo dr . Nel caso in cui la variazione della radianza sia dovuta a fenomeni di assorbimento, diffusione ed emissione termica di radiazione all'interno del volume infinitesimo allora $dL_\lambda(r)$ può essere espresso come somma di due termini:

$$dL_\lambda(r) = -K_{\lambda e}(r) \cdot L_\lambda(r) \cdot dr + J_\lambda(r) \cdot dr. \quad (6.39)$$

Il primo termine della somma tiene conto della variazione (di segno negativo) della radianza dovuta ad assorbimento e diffusione da parte del mezzo. Tale termine è proporzionale alla radianza spettrale in r secondo un fattore, $K_{\lambda e}(r)$, detto coefficiente di estinzione spettrale misurato in $[m^{-1}]$. Gli effetti dovuti all'assorbimento e alla diffusione possono essere separati considerando il coefficiente di estinzione come somma $K_{\lambda e}(r) = K_{\lambda a}(r) + K_{\lambda s}(r)$ dei coefficienti di assorbimento e diffusione, $K_{\lambda a}(r)$ e $K_{\lambda s}(r)$ rispettivamente, definiti come:

$$K_{\lambda a}(r) = - \frac{1}{L_\lambda(r)} \cdot \frac{dL_\lambda(r)}{dr} \Big|_{\substack{\text{In assenza di diffusione} \\ \text{e sorgenti}}} \quad (6.40)$$

e

$$K_{\lambda s}(r) = - \frac{1}{L_\lambda(r)} \cdot \frac{dL_\lambda(r)}{dr} \Big|_{\substack{\text{In assenza di assorbimento} \\ \text{e sorgenti}}} \quad (6.41)$$

L'atmosfera è costituita, come anticipato nel paragrafo 6.5, da una mistura di molecole gassose e di particelle di varia dimensione e natura (areosol) in diverse concentrazioni.

Il coefficiente di estinzione risulta pari alla somma dei coefficienti di estinzione relativi ai singoli costituenti:

$$K_{\lambda e}(r) = \sum_i K_{\lambda e,i}(r) = \sum_i [K_{\lambda a,i}(r) + K_{\lambda s,i}(r)], \quad (6.42)$$

dove $K_{\lambda e,i}$, $K_{\lambda a,i}$, $K_{\lambda s,i}$ sono i coefficienti di estinzione, di assorbimento e di diffusione, rispettivamente, relativi ai diversi costituenti presenti. Per tenere conto inoltre della concentrazione dei diversi costituenti la (6.42) può essere espressa come:

$$K_{\lambda e}(r) = \sum_i N_i(r) \cdot K'_{\lambda e,i}(r) = \sum_i N_i(r) \cdot [K'_{\lambda a,i}(r) + K'_{\lambda s,i}(r)], \quad (6.43)$$

dove $K'_{\lambda e,i}$, $K'_{\lambda a,i}$, $K'_{\lambda s,i}$ sono definite come le sezioni equivalenti spettrali di estinzione, assorbimento e diffusione dei costituenti espresse in $[m^2]$ e $N_i(r)$ il numero di molecole o particelle per unità di volume relative al costituente i -mo espresso in $[m^{-3}]$.

La diffusione della radiazione da parte delle molecole e/o delle particelle può essere di tipo singolo o multiplo. La diffusione multipla avviene quando la radiazione diffusa da un determinato costituente subisce a sua volta diffusione da parte di altri costituenti presenti nel mezzo. La teoria prevede un determinato limite per il manifestarsi di tale fenomeno al di sotto del quale la diffusione può essere considerata di tipo singolo. Tale situazione si ha quando $K_{\lambda s} \cdot r < 0.1$. Inoltre, a seconda delle dimensioni delle particelle o delle molecole dei singoli costituenti rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione che attraversa il mezzo, i fenomeni che sono alla base della diffusione possono essere descritti attraverso due teorie (%rif.6_1%): i) la teoria di Rayleigh usata per descrivere la diffusione da parte di molecole di gas permanenti, ii) la teoria di Mie per particelle di dimensioni tipiche dell'aerosol.

Il secondo termine della (6.39) è proporzionale alla radianza, $J_{\lambda}(r)$, dovuta all'emissione termica ed alla diffusione lungo il cammino r di radiazione da parte delle molecole e delle particelle di cui è costituito il mezzo.

Il modello che viene preso in considerazione nella maggior parte delle applicazioni prevede l'atmosfera divisa in strati piani paralleli ed omogenei in modo tale che le proprietà dell'atmosfera quali la concentrazione dei singoli costituenti e l'indice di rifrazione varino solo lungo la coordinata z (%tav.6_19%).

Integrando l'equazione differenziale (6.39) a partire da un generico punto r_0 si ottiene la radianza spettrale in funzione della lunghezza r del cammino:

$$L_{\lambda}(r) = L_{\lambda}(r_0) \cdot e^{-\tau_{\lambda OD}(r)} + \int_{r_0}^r J_{\lambda}(r') \cdot e^{\tau_{\lambda OD}(r')} \cdot e^{-\tau_{\lambda OD}(r)} \cdot dr', \quad (6.44)$$

dove

$$\tau_{\lambda OD}(r) = \int_{r_0}^r K_{\lambda e}(r') \cdot dr' \quad (6.45)$$

è la cosiddetta profondità ottica del mezzo. Se la trasmissione all'interno del mezzo è alta, il termine dipendente da $J_{\lambda}(r)$ nella (6.44) diventa molto piccolo e può essere trascurato:

$$L_{\lambda}(r) = L_{\lambda}(r_0) \cdot e^{-\tau_{\lambda OD}(r)}, \quad (6.46)$$

che rappresenta la legge di Lambert-Bouger. Per il generico cammino inclinato di un angolo θ rispetto all'asse z (%tav.6_19%) essendo $z = r \cdot \cos(\theta)$ la (6.46) può essere espressa in funzione dell'altitudine come segue:

$$L_{\lambda}(z) = L_{\lambda}(z_0) \cdot e^{-\int_{z_0}^z \frac{K_{\lambda e}(z)}{\cos(\theta)} dz} = L_{\lambda}(z_0) \cdot e^{-\frac{\tau_{\lambda}(z)}{\cos(\theta)}}, \quad (6.47)$$

dove la profondità o spessore ottico del mezzo è stato ridefinito come

$$\tau_{\lambda}(z) = \int_{z_0}^z K_{\lambda e}(z) \cdot dz. \quad (6.48)$$

Se il cammino ottico è omogeneo ovvero $K_{\lambda e}(z)$ è costante al variare della coordinata z , allora lo spessore ottico varia linearmente con l'altitudine cioè $\tau_{\lambda}(z) = K_{\lambda e} \cdot (z - z_0)$.

Dalla legge di Lambert-Bouger valida per un mezzo privo di sorgenti è possibile definire la trasmittanza come il rapporto tra la radianza in z e la radianza in z_0 :

$$T_{\lambda}(z) = \frac{L_{\lambda}(z)}{L_{\lambda}(z_0)} = e^{-\frac{\tau_{\lambda}(z)}{\cos(\theta)}} \quad (6.49)$$

che rappresenta la frazione di radianza nel punto iniziale che viene trasmessa lungo il cammino ottico in direzione θ fino al generico punto z .

La (%tav.6_20%) mostra l'effetto dell'atmosfera sulla propagazione della radiazione solare confrontando misurazioni dell'irradianza solare fuori dell'atmosfera (al *top* dell'atmosfera) e dell'irradianza solare al livello del mare. Il grafico mostra le bande di attenuazione di diversi costituenti atmosferici quali ad esempio l'acqua (sotto forma di vapore), l'ossigeno e l'anidride carbonica. L'irradianza al *top* dell'atmosfera viene confrontata inoltre con la curva dell'irradianza spettrale di un corpo nero ad una temperatura di 5900 °K.

6.7 Richiami di ottica geometrica e ottica fisica.

La soluzione per onda piana delle equazioni di Maxwell in un mezzo isotropo, omogeneo e privo di sorgenti, permette di porre in relazione la velocità di propagazione v dell'onda che si propaga nel mezzo con la costante dielettrica ε e la permeabilità magnetica μ del mezzo stesso:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}. \quad (6.50)$$

La costante dielettrica e la permeabilità magnetica del mezzo possono essere espresse come il prodotto delle corrispondenti costanti relative, ε_r e μ_r , caratteristiche del mezzo considerato, per la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto ε_0 e μ_0 rispettivamente, ovvero $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ e $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$. La velocità di propagazione v diventa:

$$v = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}}, \quad (6.51)$$

dove $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$ è la velocità della luce nel vuoto pari a circa 3×10^8 m/sec. Dato che per tutti i mezzi materiali vale $\varepsilon_r \cdot \mu_r > 1$ dalla (6.51) risulta che la massima velocità di propagazione della radiazione elettromagnetica si ha nel vuoto. Il rapporto n tra la velocità della luce nel vuoto e quella nel mezzo materiale è definito come l'indice di rifrazione del mezzo:

$$n = \frac{c_0}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}. \quad (6.52)$$

In generale, a differenza del vuoto in cui le onde elettromagnetiche si propagano tutte alla stessa velocità c_0 indipendentemente dalla frequenza, i mezzi materiali possono manifestare delle caratteristiche di dispersione ovvero la propagazione di un'onda può avvenire con velocità dipendente dalla sua frequenza. In tali mezzi l'indice di rifrazione dipende dalla frequenza dell'onda elettromagnetica monocromatica che lo attraversa.

Quando un'onda elettromagnetica piana incide sopra una superficie piana infinita che separa due mezzi materiali questa può essere in parte riflessa nel primo mezzo (da cui proviene l'onda elettromagnetica) ed in parte trasmessa nel mezzo sottostante. Le percentuali di energia riflessa e trasmessa dipendono dalle caratteristiche dei due mezzi e dall'angolo di incidenza dell'onda piana. Questi fenomeni possono essere studiati in maniera estremamente conveniente tramite le leggi dell'**ottica geometrica** che si basano sul concetto di raggio. Per un mezzo isotropo i raggi sono definiti come le traiettorie ortogonali ai fronti d'onda. In ciascun punto dello spazio, sede del mezzo considerato, la direzione definita da un raggio coincide con la direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica piana all'interno del mezzo. I risultati ottenuti tramite la teoria

dell'ottica geometrica hanno validità fino a che le dimensioni lineari degli oggetti colpiti dalla radiazione risultano molto maggiori della lunghezza d'onda considerata.

La **riflessione** da superfici levigate, caratterizzate cioè da irregolarità che sono in media di dimensioni molto più piccole della lunghezza d'onda della radiazione incidente, può essere descritto attraverso tre semplici leggi confermate sperimentalmente (%tav.6_21%):

- a) il raggio incidente, quello riflesso e la normale alla superficie nel punto di incidenza sono complanari qualsiasi sia la geometria della superficie, piana o curva;
- b) gli angoli di incidenza e di riflessione, θ_i e θ_r , che i raggi incidenti e riflessi formano con la normale alla superficie nel punto di incidenza sono uguali;
- c) il percorso raggio incidente-raggio riflesso è perfettamente invertibile.

La riflessione da superfici regolari obbedisce a tali leggi e viene detta riflessione speculare: i raggi di un fascio di raggi paralleli incidenti sulla superficie vengono riflessi tutti nella stessa direzione uguale a quella di incidenza. Quando la rugosità della superficie è tale che le irregolarità che essa presenta siano caratterizzate da dimensioni non trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione incidente allora la riflessione è di tipo diffuso. In questo caso i singoli raggi di un fascio di raggi incidenti paralleli, pur essendo valide le leggi della riflessione in ciascun punto della superficie, vengono riflessi in direzioni diverse (%tav.6_22%).

La frazione dell'onda incidente che si propaga nel mezzo 2 (%tav.6_21%) subisce il fenomeno della **rifrazione** ovvero il brusco cambiamento della direzione di propagazione nel passare da un mezzo all'altro. Facendo riferimento ancora al concetto di raggio, le leggi che regolano tale fenomeno sono le seguenti:

- a) il raggio incidente, quello rifratto e la normale alla superficie nel punto di incidenza sono complanari qualsiasi sia la geometria della superficie, piana o curva;
- b) l'angolo di incidenza e di rifrazione (riferiti alla normale alla superficie) sono in relazione tra loro tramite la **legge di Snell**: il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza θ_i ed il seno dell'angolo di rifrazione θ_r è indipendente dall'angolo di incidenza e pari al rapporto tra l'indice di rifrazione del secondo mezzo e l'indice di rifrazione del primo mezzo (%tav.6_21%);
- c) il percorso raggio incidente-raggio rifratto è perfettamente invertibile.

Se l'indice di rifrazione del mezzo 2 n_2 è maggiore del indice di rifrazione del mezzo 1 n_1 allora il mezzo 2 è detto essere più rifrangente. Sotto questa ipotesi l'angolo di rifrazione è minore dell'angolo di incidenza e nel passare dal mezzo 1 al mezzo 2 il raggio si avvicina alla normale. Se l'angolo di incidenza è pari a $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ rad allora dalla legge di Snell il seno dell'angolo di rifrazione θ_L risulta pari a:

$$\sin(\theta_L) = \frac{n_1}{n_2}. \quad (6.53)$$

Se dal mezzo 2 si fa propagare un raggio con angolo di incidenza maggiore di θ_L allora il raggio sarà totalmente riflesso e non si avrà passaggio di radiazione nel mezzo 1. L'angolo θ_L è un angolo limite entro cui vengono rifratti i raggi provenienti da qualsiasi direzione del mezzo 1. Ad esempio per l'interfaccia aria-acqua si ha $\sin(\theta_L) = n_{aria}/n_{H_2O} = 1.0004/1.333$ ovvero $\theta_L = 48.6^\circ$.

Il comportamento della radiazione luminosa che propagandosi in un mezzo incontra ostacoli quali fenditure, diaframmi e mezzi riflettenti o rifrangenti, può essere estremamente diverso a seconda delle dimensioni lineari di tali oggetti rapportate alla lunghezza d'onda della radiazione. Come evidenziato in precedenza, se tali dimensioni sono molto maggiori della lunghezza d'onda, l'ottica geometrica fornisce una descrizione semplice dei fenomeni di rifrazione e riflessione basandosi sul concetto di raggio. Quando le dimensioni degli oggetti diventano confrontabili con la lunghezza d'onda, allora la radiazione luminosa che interagisce con tali oggetti dà luogo a comportamenti tipici dei fenomeni ondulatori come il manifestarsi di interferenza e diffrazione. Il comportamento della radiazione luminosa sotto questa ipotesi è descritto dalle teorie dell'**ottica fisica**. I fenomeni di interferenza, diffrazione e riflessione possono essere spiegati con completezza ricorrendo alla teoria elettromagnetica della luce risolvendo le equazioni di Maxwell. Spesso però diverse leggi dell'ottica possono essere ricavate ricorrendo a teorie che richiedono una complessità di calcolo estremamente minore di quella necessaria a risolvere le equazioni di Maxwell per il problema preso in considerazione. A questo scopo risulta estremamente utile fare riferimento al principio di Huygens-Fresnel. Secondo tale principio ogni punto di un fronte d'onda, ad un dato istante t , può essere considerato come una sorgente puntiforme di onde sferiche secondarie. Il fronte dell'onda principale all'istante $t + \Delta t$ può essere ricavato come involuppo dei fronti d'onda sferica secondaria allo stesso istante $t + \Delta t$. In termini matematici tale principio viene espresso dalla formula di diffrazione di Fresnel-Kirchhoff in forma scalare. L'ampiezza del campo elettrico generato in un punto P del fronte d'onda principale da una sorgente coerente di onde sferiche puntiforme, posta ad una distanza R da P (tav.6_23%), è pari, in notazione fasoriale, a:

$$E_S = \frac{1}{R} \cdot e^{j \cdot k \cdot R}, \quad (6.54)$$

dove $k = 2 \cdot \pi / \lambda$ è il numero d'onda e λ la lunghezza d'onda del campo incidente. Si assume implicitamente che la dipendenza dal tempo sia del tipo $e^{-j \cdot \omega \cdot t}$. L'espressione del campo si ottiene dal fasore come $e_S(\underline{R}, t) = \Re e(E_S \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t})$ dove $\underline{R} \equiv (x, y, z)$ è il vettore delle coordinate di P rispetto ad un fissato sistema di riferimento. L'elemento infinitesimo di area dS in P contribuisce al campo in un punto Q posto ad una certa distanza r da P con un'ampiezza dE_Q pari a:

$$dE_Q = E_S \cdot \frac{1}{j \cdot \lambda} \cdot \frac{1}{r} \cdot D(\theta) \cdot e^{j \cdot k \cdot r} \cdot dS =$$

$$\frac{1}{R \cdot r} \cdot \frac{1}{j \cdot \lambda} \cdot D(\theta) \cdot e^{j \cdot k \cdot R} \cdot e^{j \cdot k \cdot r} \cdot dS,$$
(6.55)

dove $D(\theta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\underline{n} \cdot \underline{i}_R) - \cos(\underline{n} \cdot \underline{i}_r)]$ è il fattore di obliquità, \underline{n} è la normale alla superficie in P, \underline{i}_R e \underline{i}_r i versori che individuano le direzioni sorgente-P e P-Q rispettivamente e θ l'angolo tra \underline{i}_r ed \underline{n} (%tav.6_23%). Integrando la (6.55) su tutta la superficie S del fronte d'onda principale si ottiene il campo totale in Q:

$$E_Q = \frac{1}{j \cdot \lambda} \cdot \iint_S \frac{1}{R \cdot r} \cdot D(\theta) \cdot e^{j \cdot k \cdot R} \cdot e^{j \cdot k \cdot r} \cdot dS,$$
(6.56)

relazione valida nel caso $r \gg \lambda$ e $R \gg \lambda$.

6.8 La risposta impulsiva di un sistema ottico.

Un sistema ottico è costituito da una successione di superfici lisce riflettenti e rifrangenti che separano mezzi con indice di rifrazione diverso. Le superfici nella maggior parte dei casi sono superfici piane o sferiche a simmetria radiale. Nel caso in cui i centri di curvatura delle singole superfici siano posizionati tutti su una stessa linea il sistema è detto **sistema ottico centrato** e la linea su cui sono disposti i centri di curvatura **asse ottico** (%tav.6_24%). L'asse ottico costituisce un'asse di simmetria radiale del sistema.

I componenti di un sistema ottico, in generale, comprendono specchi riflettenti, lenti ed aperture (diaframmi), disposti in maniera tale da permettere la formazione di un'immagine di un oggetto, posizionato ad una certa distanza dal sistema, su un piano detto **piano immagine**, in corrispondenza del quale può essere posizionato un sensore che misura il flusso radiante proveniente dall'oggetto stesso permettendo in tal modo di acquisire l'immagine in forma digitale. Per costruire l'immagine di un punto oggetto formata da un sistema ottico è possibile utilizzare le leggi dell'ottica geometrica e avvalersi del concetto di raggio. In particolare si giunge ad una notevole semplificazione delle equazioni che regolano il comportamento del sistema ottico considerando i **raggi parassiali** i quali sono tracciati in prossimità dell'asse ottico all'interno di una zona cilindrica detta **zona parassiale**. Sotto tale ipotesi si ottengono le equazioni dell'ottica del primo ordine (approssimazione di Gauss) valide per un sistema ottico perfetto.

Il comportamento di un sistema ottico perfetto può essere descritto efficacemente considerando alcuni punti caratteristici quali i fuochi ed i punti principali. La (%tav.6_24%) riporta la schematizzazione di un generico sistema ottico semplice formato da due superfici di interfaccia rifrangenti (il sistema può essere costituito ad esempio da una lente costruita con materiale avente indice di rifrazione n immersa nel vuoto). I raggi paralleli provenienti da sinistra vengono rifratti due volte nel passaggio

attraverso le due superfici di interfaccia. I raggi uscenti, detti **raggi coniugati**, convergono tutti in un punto posizionato sull'asse ottico detto **fuoco secondario**. In maniera analoga è possibile definire il **fuoco primario** come il punto sull'asse ottico in cui convergono i raggi coniugati che si propagano da destra verso sinistra. I luoghi dei punti di incontro ottenuti prolungando i raggi paralleli incidenti ed i corrispondenti raggi coniugati come indicato in (%tav.6_24%) sono detti, in prossimità della zona parassiale, **piano principale primario** e **piano principale secondario**. I punti di intersezione di tali piani con l'asse ottico sono chiamati **punti principali** primario e secondario. La distanza tra il fuoco primario ed il punto principale primario è detta **prima distanza focale**. Analogamente la **seconda distanza focale** è definita come la distanza tra il fuoco secondario ed il punto principale secondario.

Definita la posizione dei piani principali del sistema ottico e le distanze focali, la costruzione dell'immagine di un punto oggetto posto ad un'altezza h dall'asse ottico e su un piano distante d_0 dal piano principale primario, può essere effettuata come riportato nella %tav.6_25%. Il raggio P_0D parallelo all'asse ottico appare rifratto dal secondo piano principale. Il raggio rifratto AP_i passerà dal fuoco secondario F_2 . Il raggio P_0C passante per F_1 apparirà rifratto dal piano principale primario e per la reversibilità del cammino ottico emergerà dalla seconda superficie rifrangente parallelamente all'asse ottico. Il punto di incontro tra i raggi AP_i e BP_i è l'immagine del punto P_0 formata su un piano distante d_i dal piano principale secondario. Se i mezzi estremi sono gli stessi allora le due distanze focali sono uguali ($f_1 = f_2 = f$). In tali condizioni la relazione che lega le distanze d_0 e d_i alla distanza focale f è data detta formula di Huygens:

$$\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f}. \quad (6.57)$$

La distanza dell'immagine dal fuoco F_2 è data dalla relazione di Newton per mezzi estremi uguali:

$$x' = \frac{f^2}{x}. \quad (6.58)$$

L'ingrandimento lineare trasversale m del sistema è definito come il rapporto tra le altezze h ed h' . Sempre nel caso di mezzi estremi uguali m è dato da:

$$m = \frac{h'}{h} = -\frac{d_i}{d_0}. \quad (6.59)$$

A seconda della posizione dell'oggetto rispetto al fuoco F_1 , l'immagine può apparire ingrandita o ridotta sul piano immagine e invertita o no rispetto all'asse ottico. Per sistemi di tipo convergente se il piano oggetto è posizionato in $d_0 > 2f$ allora l'immagine è invertita rispetto all'asse ottico con $h' < h$.

Una lente semplice sottile, immersa in aria e costituita da materiale con indice di rifrazione n , con superfici di interfaccia sferiche aventi raggi di curvatura R_1 ed R_2 , ha una potenza ϕ , definita come l'inverso della distanza focale, pari a:

$$\phi = \frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (6.60)$$

Le tecniche a raggi permettono di ricavare le immagini di punti sul piano oggetto formate da un qualsiasi sistema ottico composto da più sistemi semplici. Ad esempio nella [%tav.6_26%](#) è schematizzato un sistema costituito da due elementi semplici aventi distanze focali f_a ed f_b . La potenza ottica del sistema equivalente è pari a:

$$\phi_{ab} = \frac{1}{f_{ab}} = \frac{1}{f_a} + \frac{1}{f_b} - \frac{d}{f_a \cdot f_b} = \phi_a + \phi_b - d \cdot \phi_a \cdot \phi_b, \quad (6.61)$$

dove d è la distanza tra il piano principale secondario del sistema a ed il piano principale primario del sistema b .

Le prestazioni di un sistema ottico sono limitate in parte dal fatto che il flusso radiante proveniente dal piano oggetto giunge sul piano immagine attraverso un'apertura di dimensioni finite che diffrange il campo incidente. L'effetto dell'apertura è tale che un oggetto puntiforme risulterà disperso sul piano immagine su un'area di forma e dimensioni dipendente dalla geometria dell'apertura. L'apertura quindi agisce in modo tale da limitare la risoluzione spaziale del sistema di *imaging*.

La risposta impulsiva di un sistema ottico rappresenta la distribuzione spaziale del flusso radiante sul piano immagine proveniente da una sorgente puntiforme posizionata sul piano oggetto. La risposta impulsiva quindi non è altro che l'immagine dell'oggetto puntiforme prodotta dal sistema ottico. Essa permette di modellare l'effetto di diffrazione dell'apertura attraverso cui l'oggetto viene ripreso.

Per valutare la risposta di un sistema ottico è necessario valutare la distribuzione del campo elettrico sul piano immagine dovuta ad una sorgente puntiforme posizionata sul piano oggetto. Il campo in forma scalare può essere calcolato utilizzando il principio di Huygens e la formula di Fresnel-Kirchhoff (6.55) considerando l'oggetto come una sorgente puntiforme di onde sferiche. A tale scopo si farà riferimento alla geometria indicata nelle [%tav.6_27-a%](#) e [%tav.6_27-b%](#). Rispetto ad un sistema di riferimento di coordinate cartesiane (x,y,z) , si consideri una sorgente puntiforme di onda sferica monocromatica posizionata in $S \equiv (x_0, y_0, z_0)$. Sull'origine del sistema di riferimento sia posizionato il piano dell'apertura orientato in modo normale all'asse z . Il piano dell'apertura sia costituito da uno schermo opaco (con trasmittanza nulla) eccetto che in corrispondenza dell'apertura vera e propria attraverso cui il campo sorgente viene diffratto. L'apertura sia caratterizzata da una trasmittanza unitaria e da una fissata geometria. Ad una distanza d_i dal piano di apertura sia posizionato il piano immagine su cui siamo interessati a valutare l'ampiezza del campo. Sul piano dell'apertura sia inoltre definito un sistema di coordinate ausiliario (x_a, y_a) usato per indicare la posizione di un

generico punto dell'apertura stessa. Tra l'apertura ed il piano immagine e/o il piano oggetto sono posizionati i componenti del sistema ottico vero e proprio come ad esempio una serie di lenti ideali utilizzate per focalizzare l'oggetto sul piano immagine. Si consideri per il momento il sistema costituito solo dall'apertura e si valuti l'effetto che questa induce sull'immagine prodotta sul relativo piano. Secondo il principio di Huygens, il campo totale su un punto del piano immagine può essere calcolato, conoscendo la distribuzione di campo sull'apertura dovuta alla sorgente S, come sovrapposizione dei campi irradiati da sorgenti elementari di onda sferica posizionate sull'apertura stessa. Se le dimensioni dell'apertura sono molto maggiori della lunghezza d'onda del campo incidente, è possibile considerare la distribuzione di campo sull'apertura pari a quella del campo irradiato dalla sorgente sull'apertura nel caso in cui lo schermo fosse assente. Il contributo al campo in un punto $Q \equiv (x, y, d_i)$ del piano immagine, dovuto ad una sorgente elementare posizionata in un punto $P \equiv (x_a, y_a)$ è pari, quindi, secondo la (6.55), a:

$$dE_Q = \frac{1}{r_0 \cdot r} \cdot \frac{1}{j \cdot \lambda} \cdot D(\theta) \cdot e^{j \cdot k \cdot r_0} \cdot e^{j \cdot k \cdot r} \cdot dS \quad (6.62)$$

Se le distanze r ed r_0 dei punti S e Q dall'origine sono molto maggiori delle dimensioni lineari dell'apertura, allora $D(\theta)$ non varia apprezzabilmente al variare della posizione del punto P sull'apertura stessa. Sotto tale ipotesi il fattore di obliquità può essere approssimato all'unità. Il campo totale in P si ottiene integrando i contributi (6.62) su tutta la superficie S dell'apertura:

$$E_Q(x, y) = \frac{1}{j \cdot \lambda} \cdot \iint_S \frac{1}{r_0 \cdot r} \cdot e^{j \cdot k \cdot r_0} \cdot e^{j \cdot k \cdot r} \cdot dS = \frac{1}{j \cdot \lambda} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_a, y_a) \cdot \frac{1}{r_0 \cdot r} \cdot e^{j \cdot k \cdot r_0} \cdot e^{j \cdot k \cdot r} \cdot dx_a \cdot dy_a, \quad (6.63)$$

dove $p(x_a, y_a)$ è detta funzione pupilla ed è definita come:

$$p(x_a, y_a) = \begin{cases} 1 & (x_a, y_a) \in S \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (6.64)$$

Le distanze r_0 e r in funzione di x_a e y_a sono pari a $r = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + d_i^2}$ e $r_0 = \sqrt{(x_0 - x_a)^2 + (y_0 - y_a)^2 + d_0^2}$ dove $d_0 = |z_0|$ è la distanza del piano oggetto dal piano dell'apertura. Sviluppando i quadrati sotto radice, le espressioni per le distanze diventano:

$$r = \sqrt{d_i^2 - 2 \cdot (x \cdot x_a + y \cdot y_a) + (x_a^2 + y_a^2) + (x^2 + y^2)}, \quad (6.65)$$

$$r_0 = \sqrt{d_0^2 - 2 \cdot (x_0 \cdot x_a + y_0 \cdot y_a) + (x_a^2 + y_a^2) + (x_0^2 + y_0^2)}. \quad (6.66)$$

Supponendo le distanze d_i e d_0 molto maggiori delle dimensioni dell'apertura e considerando solo la zona parassiale intorno all'asse ottico del sistema, è possibile sviluppare le distanze r e r_0 in serie di Taylor come segue:

$$\left. \begin{aligned} r &\approx d_i - \frac{(x \cdot x_a + y \cdot y_a)}{d_i} + \frac{(x_a^2 + y_a^2)}{2 \cdot d_i} + \frac{(x^2 + y^2)}{2 \cdot d_i} \dots \dots \dots \\ r_0 &\approx d_0 - \frac{(x_0 \cdot x_a + y_0 \cdot y_a)}{d_0} + \frac{(x_a^2 + y_a^2)}{2 \cdot d_0} + \frac{(x_0^2 + y_0^2)}{2 \cdot d_0} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}. \quad (6.67)$$

Nella (6.63), per quanto riguarda il denominatore, le distanze possono essere approssimate arrestando lo sviluppo (6.67) al termine di ordine zero ponendo $r \approx d_i$ e $r_0 \approx d_0$. I termini di ordine superiore invece influenzano gli argomenti degli esponenziali complessi. Quelli di secondo ordine però dipendenti da x_a e y_a (e quelli di ordine successivo) possono essere trascurati se il contributo di fase ad essi associato è molto minore di 2π . Ciò implica a sua volta

$$d_i, d_0 \gg (x_a^2 + y_a^2)_{\max} / \lambda, \quad (6.68)$$

limite che definisce la cosiddetta zona di Fraunhofer. Sotto tali ipotesi la (6.63) può essere riscritta in modo approssimato come segue:

$$E_Q(x, y, d_i) = C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_a, y_a) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_a, y_a)} \cdot dx_a \cdot dy_a, \quad (6.69)$$

dove $f(x_a, y_a) = -\left(\frac{x}{d_i} + \frac{x_0}{d_0}\right) \cdot x_a - \left(\frac{y}{d_i} + \frac{y_0}{d_0}\right) \cdot y_a$ e

$C = \frac{1}{j \cdot \lambda} \cdot \frac{e^{j \cdot k \cdot (d_0 + d_i)}}{d_0 \cdot d_i} \cdot e^{j \cdot k \cdot \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2d_0} + \frac{x^2 + y^2}{2d_i}\right)}$ è un termine complesso indipendente da x_a e y_a ,

ma dipendente dalla posizione della sorgente S e del punto Q sul piano immagine. Ponendo $x'_a = x_a / (\lambda \cdot d_i)$ e $y'_a = y_a / (\lambda \cdot d_i)$ nell'espressione della funzione $f(x_a, y_a)$, la (6.69) diventa (senza indicare in maniera esplicita la dipendenza da d_i considerata come una costante):

$$E_Q(x, y) = C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda \cdot d_i \cdot x'_a, \lambda \cdot d_i \cdot y'_a) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot [(x - m \cdot x_0) x'_a + (y - m \cdot y_0) y'_a]} \cdot dx'_a \cdot dy'_a, \quad (6.70)$$

dove $m = -d_i/d_0$ è il fattore di ingrandimento trasversale. La (6.70) costituisce la formula di diffrazione di Fraunhofer che esprime il campo sul piano immagine come prodotto di C per la trasformata di Fourier della funzione pupilla.

La formula di diffrazione di Fraunhofer ha notevole importanza per quanto riguarda la valutazione delle prestazioni di un sistema ottico centrato intorno alla zona parassiale dell'asse ottico. Il fenomeno di diffrazione di Fraunhofer è osservabile a patto che le distanze d_i e d_0 soddisfino la condizione (6.68) per cui è possibile trascurare i termini di fase di ordine superiore al primo nell'integrale (6.63). Ad esempio con una lunghezza d'onda di 500 nm ed una apertura massima di 1mm, ciò implica $d_i, d_0 \gg 2$ m distanza che va oltre le dimensioni lineari di un normale sensore ottico per il telerilevamento passivo montato ad esempio su una piattaforma satellitare. Il fenomeno di Fraunhofer è però osservabile sul piano immagine di un sistema ottico centrato ideale per cui valga la relazione di Huygens (6.57). Tale condizione, nella zona parassiale, è ottenibile, ad esempio, ponendo una lente sottile convergente, caratterizzata da una lunghezza focale f , in corrispondenza dell'apertura e posizionando i piani oggetto ed immagine in modo tale da verificare la (6.57) (se l'oggetto può essere considerato a distanza infinita dal piano di apertura allora il piano immagine è posizionato sul fuoco della lente ovvero $d_i = f$). In tali condizioni il sistema ottico è a fuoco e la (6.70) può essere usata per valutare gli effetti dell'apertura sul piano immagine anche nei casi in cui la (6.68) non è verificata.

Nell'integrale (6.70), il fattore complesso C dipende dalla posizione (x,y) sul piano immagine solo per quanto riguarda la fase. L'informazione di fase non viene presa in considerazione dalla maggior parte dei sistemi di *imaging* quindi C può essere considerata una costante al variare di (x,y) . Si noti quindi che in questo caso la distribuzione di campo (6.70) dipende solo dalla differenza tra le coordinate $x, m \cdot x_0$ e $y, m \cdot y_0$ ovvero il sistema ottico comprendente l'apertura, sotto le ipotesi utilizzate per ottenere la (6.70), è un sistema invariante a traslazioni. La risposta impulsiva del sistema può essere ottenuta quindi dalla (6.70) supponendo la sorgente posizionata nell'origine del piano oggetto ovvero per $x_0=y_0=0$. Sotto tale ipotesi la **risposta impulsiva coerente** del sistema (essendo l'illuminazione da parte dell'oggetto monocromatica con relazione di fase conosciuta a priori) è definita come la trasformata di Fourier della funzione pupilla $p(\lambda \cdot d_i \cdot x'_a, \lambda \cdot d_i \cdot y'_a)$:

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda \cdot d_i \cdot x'_a, \lambda \cdot d_i \cdot y'_a) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (x \cdot x'_a + y \cdot y'_a)} \cdot dx'_a \cdot dy'_a, \quad (6.71)$$

indicata spesso con l'acronimo di PSF (*Point Spread Function*).

L'immagine di una sorgente puntiforme posizionata sul piano oggetto fuori dall'asse z può essere ottenuta traslando la $h(x, y)$ di una quantità pari a $m \cdot x_0$ lungo l'asse x e $m \cdot y_0$ lungo l'asse y . Per valutare la risposta di un oggetto esteso si considera questo come costituito da una serie di sorgenti di onda sferica elementari. Sfruttando la

linearità e la stazionarietà del sistema, è possibile valutare la distribuzione di campo sul piano immagine come integrale di convoluzione tra la risposta $h(x, y)$ e la distribuzione di campo sul piano oggetto come segue:

$$E_i(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x - x_0, y - y_0) \cdot E_0(m \cdot x_0, m \cdot y_0) \cdot dx_0 \cdot dy_0, \quad (6.72)$$

La relazione che lega l'intensità dei campi, proporzionale al modulo quadro degli stessi, risulta a sua volta di tipo lineare. Infatti, tramite la (6.72), è possibile dimostrare che l'intensità $I_i(x, y) = E[E_i(x, y) \cdot E_i^*(x, y)]$ sul piano immagine ($E[\cdot]$ è l'operatore di aspettazione) può essere ricavata come convoluzione dell'intensità $I_0(x_0, y_0)$ sul piano oggetto (proiettata sul piano immagine tramite il fattore di scala m) per il modulo quadro della risposta impulsiva coerente:

$$I_i(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x - x_0, y - y_0)|^2 \cdot I_0(m \cdot x_0, m \cdot y_0) \cdot dx_0 \cdot dy_0. \quad (6.73)$$

$|h(x, y)|^2$ è definita come la **risposta impulsiva non coerente** del sistema (PSF non coerente). Questa permette di ricavare l'intensità sul piano immagine in condizioni di illuminazione di tipo non-coerente cioè prodotta da un oggetto esteso pensato come costituito da sorgenti puntiformi che irradiano un campo in cui la fase varia in maniera aleatoria e indipendente da punto a punto. In tal caso la dipendenza temporale del campo è del tipo $e^{-j[\omega \cdot t + \phi(t)]}$ con $\phi(t)$ termine di fase aleatorio indipendente da punto a punto.

In generale, quindi, un sistema ottico, in cui le prestazioni sono limitate dalla presenza di un'apertura (sistema detto *diffraction limited*), può essere schematizzato come la cascata di due blocchi. Nel caso non coerente, ad esempio, il primo blocco esegue una proiezione dell'intensità dell'oggetto sul piano immagine con un fattore di scala pari ad m , il secondo esegue la convoluzione con la risposta impulsiva non-coerente $|h(x, y)|^2$ (%tav6_28%).

Le aperture di interesse pratico sono quelle a geometria rettangolare e circolare. Nel caso di apertura rettangolare la risposta impulsiva è la trasformata di Fourier di una funzione *gate* bidimensionale che è pari ad una funzione *sampling* in due dimensioni (%tav.6_29%). L'apertura circolare è caratterizzata da una risposta impulsiva a simmetria radiale esprimibile attraverso la funzione di Bessel del primo tipo di primo ordine $J_1(\cdot)$ (%tav.6_30%).

6.9 Funzione di trasferimento e funzione di trasferimento della modulazione.

La funzione di trasferimento $H(X, Y)$ di un sistema ottico è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva $h(x, y)$. Dalla (6.71), quindi, sfruttando la proprietà di dualità

della trasformata di Fourier, la funzione di trasferimento nel caso coerente non è altro che la funzione pupilla scalata del fattore $-\lambda \cdot d_i$:

$$H(X, Y) = p(-\lambda \cdot d_i \cdot X, -\lambda \cdot d_i \cdot Y), \quad (6.74)$$

indicata con l'acronimo di **OTF** (*Optical Transfer Function*).

La funzione di trasferimento incoerente invece è definita come la trasformata di Fourier normalizzata della PSF incoerente. Quest'ultima a sua volta è definita come il modulo quadro della PSF coerente che corrisponde al modulo quadro della trasformata di Fourier della funzione pupilla. Da tale considerazione segue che la PSF incoerente non è altro che lo spettro di energia della funzione pupilla. Segue quindi che la funzione di trasferimento incoerente (OTF incoerente) è data dalla funzione di autocorrelazione spaziale normalizzata della funzione pupilla:

$$H(X, Y) = \frac{R_p(X, Y)}{R_p(0, 0)} = \quad (6.75)$$

dove con $R_p(X, Y)$ si è indicata la funzione di autocorrelazione spaziale della funzione pupilla scalata $p(\lambda \cdot d_i \cdot x, \lambda \cdot d_i \cdot y)$:

$$R_p(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda \cdot d_i \cdot x, \lambda \cdot d_i \cdot y) \cdot p(\lambda \cdot d_i \cdot x - X, \lambda \cdot d_i \cdot y - Y) \cdot dx \cdot dy \quad (6.76)$$

Il modulo della funzioni di trasferimento coerente o incoerente è definito come la funzione di trasferimento della modulazione indicata con l'acronimo inglese **MTF** (*Modulation Transfer Function*). La OTF e la MTF indicano quanto un sistema ottico è in grado di rappresentare sul piano immagine variazioni di tipo sinusoidale caratterizzate da determinati valori delle frequenze spaziali. In generale un sistema di *imaging* digitale è schematizzabile come la cascata di più sottosistemi attraverso cui l'immagine passa in sequenza. Nell'ipotesi di linearità ciascun blocco può essere modellato tramite una MTF specifica. Il sistema sarà caratterizzato da una MTF globale data dal prodotto delle MTF dei singoli sottosistemi. Ciò che limita le prestazioni in termini di risoluzione di un sistema di *imaging* sono in massima parte i componenti che si trovano tra l'oggetto ripreso ed il convertitore analogico digitale. Questi sono di due tipi: a) i componenti del sistema ottico di ripresa, costituito da lenti, specchi, filtri e diaframmi e b) il sensore optoelettronico che effettua la misura del flusso radiante incidente sul piano immagine. La risoluzione del sistema di *imaging* sarà fortemente limitata dal sottosistema dotato della banda di frequenze spaziali più stretta.

6.10 Aberrazioni.

Le prestazioni di un sistema ottico possono essere limitate, oltre che dagli effetti di diffrazione dovuti alle dimensioni finite dell'apertura attraverso cui entra la radiazione

luminosa, anche dalla non idealità dei componenti di tipo rifrangente (lenti) e/o riflettente (specchi) che costituiscono il sistema stesso. Le deviazioni dal comportamento ideale di tali componenti sono indicate con il termine di aberrazioni ottiche. Le aberrazioni di un sistema ottico, in una zona non troppo lontana da l'asse ottico, possono essere modellate tramite una generalizzazione della funzione pupilla esprimendola come prodotto della trasmittanza totale del sistema ottico per un opportuno termine di fase:

$$p(x_a, y_a) = T(x_a, y_a) \cdot e^{j \cdot k \cdot W(x_a, y_a)}. \quad (6.77)$$

Il termine di fase $k \cdot W(x_a, y_a)$ tiene conto della differenza di cammino ottico dei raggi che giungono sul piano immagine rispetto al caso ideale. Per luce monocromatica le aberrazioni osservabili sono: il coma, l'aberrazione sferica, l'astigmatismo, la curvatura del campo e la distorsione.

Coma. In presenza di coma, i raggi paralleli incidenti su una lente, aventi una certa inclinazione rispetto all'asse ottico, una volta rifratti non convergono tutti sullo stesso punto a causa del fatto che le superfici principali possono essere approssimate a dei piani solo in prossimità della zona parassiale. Il coma della lente è definito come la distanza indicata nella (%tav.6_31%) del raggio P, passante per il centro della lente, e l'intersezione dei raggi rifratti estremi A e B.

Aberrazione sferica. I raggi incidenti sulla lente e lontani dall'asse ottico una volta rifratti non convergono nel fuoco definito per raggi parassiali (%tav.6_31%). La lunghezza AF misura l'aberrazione sferica longitudinale mentre la lunghezza BF l'aberrazione sferica trasversale.

Astigmatismo. I raggi provenienti da un oggetto puntiforme non sull'asse ottico (%tav.6_32%) e che giacciono sul piano tangenziale (piano individuato dalla sorgente e dall'asse ottico) e sul piano sagittale (piano passante per il raggio principale e perpendicolare al piano tangenziale) convergono su due fuochi diversi dando luogo a due immagini lineari distinte giacenti sui due piano e dette immagine tangenziale ed immagine sagittale. L'immagine su un piano posizionato tra i due fuochi (detti astigmatici) ha la forma di una macchia luminosa ellittica o circolare.

Curvatura del campo (%tav.6_33%). Se la posizione dell'oggetto varia su un piano perpendicolare all'asse ottico allora la sua immagine si sposta su un piano solo all'interno della zona parassiale. Fuori tale zona, le superfici immagine per cui il sistema risulta a fuoco sono curve.

Distorsione (%tav.6_33%). Si ha distorsione dell'immagine quando questa non è ottenuta per semplice proiezione geometrica dell'oggetto sul piano immagine. In tali condizioni, il fattore di scala m , ovvero l'ingrandimento trasversale del sistema ottico, varia al variare della posizione sul piano immagine. Tipiche distorsioni sono quella a cuscinetto ed a botte.

Tali aberrazioni sono possedute, oltre che da componenti rifrangenti come le lenti, anche da componenti riflettenti. Nel caso di radiazione non monocromatica, i componenti di tipo rifrangente possono essere affetti dalla cosiddetta **aberrazione cromatica**, dovuta al fatto che l'indice di rifrazione del mezzo, attraverso cui passa la

radiazione, varia con la lunghezza d'onda della stessa. Tali sistemi rifrangono in maniera diversa le varie componenti spettrali della radiazione incidente. Tipicamente l'indice di rifrazione di un materiale ottico cresce al diminuire della lunghezza d'onda, quindi le componenti a minore lunghezza d'onda sono rifratte in misura maggiore ed il fuoco relativo ad esse si avvicina alla superficie della lente (%tav.6_34%).

6.11 Sistemi optoelettronici

In un sistema di *imaging* digitale, la misura del flusso di potenza radiante viene effettuata con appositi rivelatori su cui viene focalizzato, tramite il sistema ottico di ripresa, il fascio di radiazione proveniente dall'oggetto osservato. Il rivelatore in pratica è un trasduttore che converte il flusso radiante in un segnale elettrico legato all'irradianza incidente sulla superficie del sensore stesso. Il segnale in uscita successivamente va in ingresso ad un sistema di amplificazione seguito da un convertitore analogico digitale. Per ottenere una misura della distribuzione spaziale del flusso radiante proveniente dall'oggetto, l'intero sistema è inoltre dotato di opportuni apparati elettro-meccanici di scansione o di una serie di sensori elementari che misurano la radiazione proveniente da direzioni diverse. Per quanto riguarda i trasduttori, questi possono essere ad effetto termico, cioè sensibili alle variazioni di temperatura dovute all'assorbimento della radiazione da parte della superficie del sensore, o realizzati in maniera tale da convertire la radiazione luminosa direttamente in un segnale elettrico. Le prestazioni globali del sistema, quindi, dipendono, oltre che dalla qualità dell'ottica di ripresa, anche dalle prestazioni dei sottosistemi trasduttore-elettronica di amplificazione e convertitore analogico-digitale. Questi limitano le prestazioni principalmente in termini di sensibilità del sistema ovvero di minima quantità di radiazione misurabile.

6.11.1 Conversione analogico-numerica.

Un convertitore analogico digitale effettua la quantizzazione dell'ampiezza di un segnale continuo. Il sistema mappa una variabile continua u in una variabile discreta u_q che assume dei valori in un insieme finito $(u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_L)$ di numeri detti livelli di quantizzazione. La regola di quantizzazione consiste nell'associare il valore discreto u_k ad un campione del segnale di ingresso quando l'ampiezza di questo è compresa tra i livelli t_k e t_{k+1} . Tali livelli fanno parte di un insieme crescente di valori $(t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_{L+1})$ detti soglie di transizione. Le soglie t_1 e t_{L+1} sono i valori minimo e massimo, rispettivamente, dell'ampiezza del segnale di ingresso.

Il dimensionamento di un sistema di quantizzazione consiste nel fissare, date le proprietà statistiche dell'ampiezza del segnale di ingresso, i valori discreti $(u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_L)$ e le soglie $(t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_{L+1})$ secondo un determinato criterio di ottimo. Il criterio più comunemente usato è quello della minimizzazione dell'errore quadratico medio tra i valori discreti ed il valore della variabile continua per un fissato numero L di livelli di quantizzazione. Il quantizzatore che si ottiene è detto di Lloyd-Max. Sia u una variabile casuale continua avente densità di probabilità $f_U(u)$. Fissato L si vogliono trovare i

valori $(u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_L)$ e $(t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_{L+1})$ tali che l'errore quadratico medio di quantizzazione MSE , pari a

$$MSE = E[(u - u_q)^2] = \int_{t_1}^{t_{L+1}} (u - u_q)^2 \cdot f_U(u) \cdot du, \quad (6.78)$$

sia minimo. Scrivendo la (6.78) come

$$MSE = \sum_{k=1}^L \int_{t_k}^{t_{k+1}} (u - u_k)^2 \cdot f_U(u) \cdot du \quad (6.79)$$

il minimo dell'errore di quantizzazione si ottiene differenziando la (6.79) rispetto alle incognite t_k e u_k ed uguagliando a zero:

$$\frac{\partial MSE}{\partial t_k} = (t_k - u_{k-1})^2 \cdot f_U(t_k) - (t_k - u_k)^2 \cdot f_U(t_k) = 0 \quad (6.80)$$

$$\frac{\partial MSE}{\partial u_k} = 2 \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} (u - u_k) \cdot f_U(u) \cdot du = 0, \quad k = 1, \dots, L. \quad (6.81)$$

Essendo $t_{k-1} \leq t_k$ le (6.80) e (6.81) diventano:

$$t_k = \frac{u_k + u_{k-1}}{2}, \quad (6.82)$$

$$r_k = \frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} u \cdot f_U(u) \cdot du}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_U(u) \cdot du}, \quad (6.83)$$

Nel caso in cui u sia uniformemente distribuita tra t_1 e t_{L+1} il sistema di equazioni non-lineari (6.82) e (6.83) è facilmente risolvibile e fornisce per i valori incogniti cercati la seguente soluzione:

$$t_k = t_{k-1} + q, \quad r_k = t_k + q/2, \quad (6.84)$$

dove q è il passo di quantizzazione uniforme pari a $q = (t_{L+1} - t_1)/L$. Il quantizzatore ottimo in questo caso ha i livelli di soglia e di quantizzazione ugualmente spazati.

L'errore di quantizzazione è uniformemente distribuito nell'intervallo $(-q/2, q/2)$ e pari a:

$$MSE = \frac{1}{q} \cdot \int_{-q/2}^{q/2} u^2 \cdot du = q^2/12 \quad (6.85)$$

Supponendo la variabile u distribuita tra 0 ed A la varianza σ_u^2 è pari a $A^2/12$. Se il quantizzatore uniforme è dotato di $L = 2^B$ livelli allora $q = A/2^B$ ed il rapporto segnale-rumore di quantizzazione è pari a:

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sigma_u^2}{MSE} \right) = 10 \cdot \log_{10} (2^{2 \cdot B}) = 6 \cdot B \text{ dB}, \quad (6.86)$$

ovvero il rapporto segnale-rumore di quantizzazione di un quantizzatore uniforme è pari a 6 dB per bit.

Nel caso di $f_U(u)$ non uniforme il quantizzatore di Lloyd-Max può essere approssimato tramite un sistema non-lineare detto **compandor** (%tav.6_35%). Questo è costituito da un primo blocco che effettua una compressione del segnale di ingresso tramite la trasformazione non-lineare $f(u)$, riportando la dinamica del segnale nell'intervallo $[-a, a]$. L'uscita dal compressore viene quantizzata uniformemente su L livelli. La trasformazione $g(u)$ effettua un'espansione per riportare la dinamica di uscita alla dinamica originaria di ingresso. Le trasformazioni non lineari sono scelte in modo tale da rendere minimo l'errore quadratico medio di quantizzazione (6.78). Il sistema nel suo complesso si comporta come un quantizzatore non-uniforme che approssima il quantizzatore ottimo di Lloyd-Max. Ad esempio, nel caso in cui la densità di probabilità $f_u(U)$ è Laplaciana con dinamica limitata nell'intervallo $[-A, A]$, ovvero:

$$f_U(u) = c \cdot e^{-\eta \cdot |u|} \quad -A \leq u \leq A, \quad (6.87)$$

dove $c = \frac{\eta}{2} \cdot [1 - e^{-\eta \cdot A}]^{-1}$, allora le trasformazioni non lineari $f(u)$ e $g(u)$ hanno la seguente forma:

$$f(u) = \begin{cases} a \cdot \frac{1 - e^{-\frac{\eta \cdot u}{3}}}{1 - e^{-\frac{\eta \cdot A}{3}}} & 0 \leq u \leq A \\ -f(-u) & -A \leq u < 0 \end{cases} \quad (6.88)$$

$$g(u) = \begin{cases} -\frac{3}{\eta} \ln \left[1 - \frac{u}{a} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\eta \cdot A}{3}} \right) \right] & 0 \leq u \leq a \\ -g(-u) & -a \leq u < 0 \end{cases} \quad (6.89)$$

6.11.2 Indici di prestazione: risoluzione, campo di vista, sensitività, potenza equivalente di rumore.

Le principali figure di merito che servono a descrivere le prestazioni di un sensore, sono:

- la risoluzione spaziale,
- il campo di vista,
- la sensitività o responsività,
- la potenza equivalente di rumore e la detettività.

Risoluzione spaziale (o potere risolutivo). Tale parametro fornisce la minima distanza, sul piano immagine, tra due sorgenti puntiformi, caratterizzate dalla stessa intensità radiante, affinché queste possano essere considerate distinte. La risoluzione del sistema è tanto maggiore quanto più piccola è tale distanza. Questa può essere definita conoscendo la PSF totale del sistema. Ad esempio, per sistemi *diffraction limited*, con apertura circolare, il primo zero della PSF è posizionato ad una distanza dall'origine pari a $r_0 = 1.22 \cdot \frac{\lambda \cdot d_i}{a}$. Secondo il criterio di Rayleigh, due oggetti puntiformi possono essere risolti se, sul piano immagine, sono separati da una distanza maggiore di $\delta = r_0$ (%tav.6_36%).

Campo di vista (FOV: Field Of View). Il campo di vista del sistema è l'angolo solido attraverso il quale il flusso radiante, proveniente dall'oggetto inquadrato, raggiunge il sensore. Esso dipende dalla configurazione ottica del sistema stesso. L'ampiezza del campo di vista influisce sul valore del flusso di potenza radiante che raggiunge la superficie del sensore. Nella (%tav.6_37%) è schematizzata la configurazione di un **radiometro semplice** che misura la radiazione che riceve attraverso un'apertura circolare di raggio r_a . L'angolo θ è denominato campo di vista angolare e dipende dalle dimensioni dell'apertura. Sempre con riferimento alla (%tav.6_37%), se $r_d/f \ll r_a/f$ allora $\theta \approx 2 \cdot \arctan(r_a/f)$ rad. Il campo di vista in funzione di θ è pari:

$$\omega_{fov} \approx \pi \cdot \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \text{ sr.} \quad (6.90)$$

Tutti raggi provenienti dall'area inquadrata dal sensore che sono all'interno dell'angolo solido ω_{fov} , entrano nel radiometro attraverso l'apertura e raggiungono il rivelatore. Se la sorgente irradia in maniera isotropica ed uniforme, allora il flusso di potenza radiante che incide sul rivelatore è pari a:

$$\Phi = \pi \cdot L \cdot A_d \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (6.91)$$

dove $A_d = \pi \cdot r_d^2$ è l'area del rivelatore ed L è la radianza costante emergente dalla superficie inquadrata.

Sensitività. È definita come il rapporto \mathfrak{R} tra la variazione ΔV di tensione in uscita al sensore e la corrispondente variazione $\Delta\Phi$ di flusso incidente:

$$\mathfrak{R} = \frac{\Delta V}{\Delta\Phi}. \quad (6.92)$$

Nei limiti in cui tale rapporto è costante al variare del flusso, il sensore si comporta linearmente e la tensione in uscita è data da:

$$V = \mathfrak{R} \cdot \Phi + V_0 \quad (6.93)$$

dove V_0 è la tensione di uscita in corrispondenza di flusso nullo, detta tensione di buio e determinata dal valore efficace della tensione di rumore in uscita. I sensori e l'ottica del sistema sono caratterizzati da una determinata risposta spettrale. In realtà quindi la sensitività dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente. L'ottica, inoltre, è caratterizzata da una trasmittanza $T(\lambda)$ anch'essa dipendente dalla lunghezza d'onda. Considerando l'illuminazione della superficie del rivelatore omogenea e l'incidenza della radiazione normale alla superficie del rivelatore stesso, allora la (6.93) può essere espressa nella seguente forma:

$$V = A_d \cdot \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) \cdot T(\lambda) \cdot \mathfrak{R}(\lambda) \cdot d\lambda + V_0 \quad (6.94)$$

dove A_d è l'area del rivelatore e $E_{\lambda}(\lambda)$ è l'irradianza spettrale incidente sulla superficie del rivelatore. Il sensore misura quindi il flusso di potenza radiante all'interno della banda complessiva del sistema determinata dalla banda della trasmittanza dell'ottica e della responsività del rivelatore.

Potenza equivalente di rumore (NEP: Noise Equivalent Power). La NEP è un parametro che misura il livello di rumore che un sensore produce in uscita in corrispondenza di flusso incidente nullo. È definito come il flusso equivalente di potenza radiante incidente in grado di produrre in uscita una tensione pari alla deviazione standard σ_n della tensione di rumore in uscita. In maniera equivalente può essere definito come il flusso che dovrebbe incidere sulla superficie del sensore per avere in uscita un rapporto segnale rumore unitario. La NEP quindi in termini di sensitività del sensore è pari a:

$$NEP = \frac{\sigma_n}{\mathfrak{R}}. \quad (6.95)$$

6.11.3 Telecamere e termocamere.

I rivelatori vengono solitamente classificati in base al tipo di fenomeno fisico grazie al quale si realizza la conversione della radiazione elettromagnetica in segnale elettrico. In base a tale criterio si possono suddividere i rivelatori in: a) rivelatori termici, b) rivelatori fotonici che sfruttano le interazioni tra fotoni e livelli energetici del materiale di cui è costituito il rivelatore stesso.

I primi forniscono un segnale elettrico proporzionale all'aumento di temperatura dovuto all'assorbimento della radiazione incidente da parte della superficie del rivelatore. L'aumento di temperatura provoca una variazione delle caratteristiche fisiche del rivelatore come ad esempio la resistenza elettrica o la polarizzazione del materiale. Tali variazioni si manifestano poi in variazioni del segnale elettrico di uscita. I rivelatori termici utilizzano processi di conversione che comprendono, ad esempio:

- a) l'effetto bolometrico; le variazioni di temperatura si traducono in una variazione della conduttività del materiale;
- b) l'effetto termovoltaiico; le variazioni di temperatura nella giunzione tra due metalli diversi (dovute alle variazioni di flusso incidente assorbito) inducono variazioni nella tensione generata dalla giunzione per effetto Seebeck;
- c) l'effetto piroelettrico; le variazioni di temperatura inducono un cambiamento nello stato di polarizzazione del materiale di cui è composto il rivelatore producendo un campo elettrico esterno osservabile.

I rivelatori fotonici sono sensibili alla variazione del numero di portatori di carica liberi (elettroni e/o lacune) dovuto alla variazione del numero di fotoni incidenti. I rivelatori di questo tipo possono sfruttare:

- a) l'effetto fotovoltaico; le variazioni del numero di fotoni incidenti su una giunzione semiconduttrice *p-n* causano una variazione di corrente generata dalla giunzione stessa;
- b) l'effetto fotoconduttivo; le variazioni del numero di fotoni incidenti su un materiale semiconduttore provocano una variazione del numero medio di portatori liberi di carica e quindi una variazione nella conduttività del materiale semiconduttore stesso;
- c) l'effetto fotoemissivo; l'energia dei fotoni incidenti sulla superficie del rivelatore viene trasferita agli elettroni liberi del materiale che acquistano energia cinetica sufficiente affinché possano essere emessi dalla superficie.

I moderni sensori utilizzati in applicazioni di acquisizione di immagini sono dotati di una matrice di rivelatori elementari integrati (%tav.6_38%). Per quanto riguarda i rivelatori di tipo fotonico, la tecnologia utilizzata per la realizzazione di tali dispositivi va sotto il nome di *Focal Planar Array* (FPA). Questi sono basati su rivelatori integrati denominati dispositivi ad accoppiamento di carica (*Charge Coupled Devices*: CCD). La matrice di rivelatori elementari è composta da una serie di capacità ciascuna realizzata con una struttura MOS. La struttura completa è composta da un unico "bulk" di materiale semiconduttore ricoperto da uno strato di materiale isolante (ossido) ed una serie di

elettrodi che fungono da *gate*. In fase di acquisizione del segnale, agli elettrodi metallici è imposta una tensione in modo tale che i portatori di carica elettrica generati durante il processo di fotorivelazione siano immagazzinati nello strato di inversione della capacità MOS. In corrispondenza di ciascun gate avremo, alla fine della fase di acquisizione, un pacchetto di carica proporzionale al flusso radiante proveniente da una determinata porzione della superficie dell'oggetto osservato. Ogni gate quindi corrisponde ad un punto dell'immagine acquisita dal sensore (pixel). La matrice di CCD viene successivamente fatta funzionare come un vero e proprio registro a scorrimento per inviare ciascun pacchetto di carica ad un circuito di misura. L'azione di scorrimento avviene grazie ad una sequenza impulsiva di forma opportuna applicata ai gate. Tale sequenza è temporizzata in modo tale che da un semplice conteggio dei pacchetti si risalga alla posizione del punto dell'immagine cui si riferisce il pacchetto sotto misura.

Gli FPA possono essere realizzati in due modi:

- a) tramite tecnologia ibrida (FPA ibrida), in cui ad una matrice di rivelatori fotovoltaici, realizzati con materiale rivelatore appropriato per lo spettro di lunghezze d'onda su cui deve operare il sensore, viene associata una matrice di cosiddetti dispositivi ad accoppiamento di carica (*Charge Coupled Devices: CCD*) utilizzati come elemento di memoria e di lettura;
- b) tramite tecnologia monolitica (FPA monolitica), in cui la matrice di CCD è costruita in maniera tale che possa operare sia da fotorivelatore che da dispositivo di memoria e lettura dei pacchetti di cariche immagazzinati.

Oltre ai FPA costituiti da sensori elementari di tipo fotovoltaico, negli ultimi tempi sono stati realizzati anche sistemi costituiti da matrici di rivelatori ad effetto termico. Ciò ha permesso di sopperire ad alcune limitazioni dei rivelatori termici, come ad esempio i lunghi tempi di risposta e la scarsa sensibilità, che ne rendevano impraticabile l'utilizzo in applicazioni di acquisizione d'immagini. Ad esempio nel campo dell'infrarosso tali strutture hanno le migliori prestazioni alle più alte temperature nella banda da 14 a 50 μm . Tale comportamento risulta complementare a quello dei rivelatori fotonici che hanno le migliori prestazioni alle più basse temperature e per lunghezze d'onda inferiori a 14 μm .

6.11.4 Sistemi a scansione.

Altri metodi di acquisizione dell'immagine di un oggetto prevedono l'utilizzo di sistemi cosiddetti a scansione molto usati nel campo del telerilevamento passivo per l'osservazione della superficie terrestre. Tali sistemi sono dotati di un rivelatore su cui viene focalizzata la radiazione proveniente da porzioni di superficie osservata. La radiazione viene convogliata al rivelatore tramite una serie di specchi rotanti che sono orientati automaticamente da un sistema elettromeccanico di controllo in modo tale da riprendere in maniera sequenziale porzioni adiacenti di superficie. Il sistema (%tav.6_39%) è caratterizzato da un campo di vista (*Field Of View: FOV*) che dipende dall'angolo di rotazione massimo del sistema di specchi e da un campo di vista istantaneo (*Instantaneous Field Of View: IFOV*) che rappresenta l'angolo solido attraverso cui passano i raggi provenienti dalla porzione di superficie di volta in volta inquadrata come definito nel paragrafo 3.11.2.