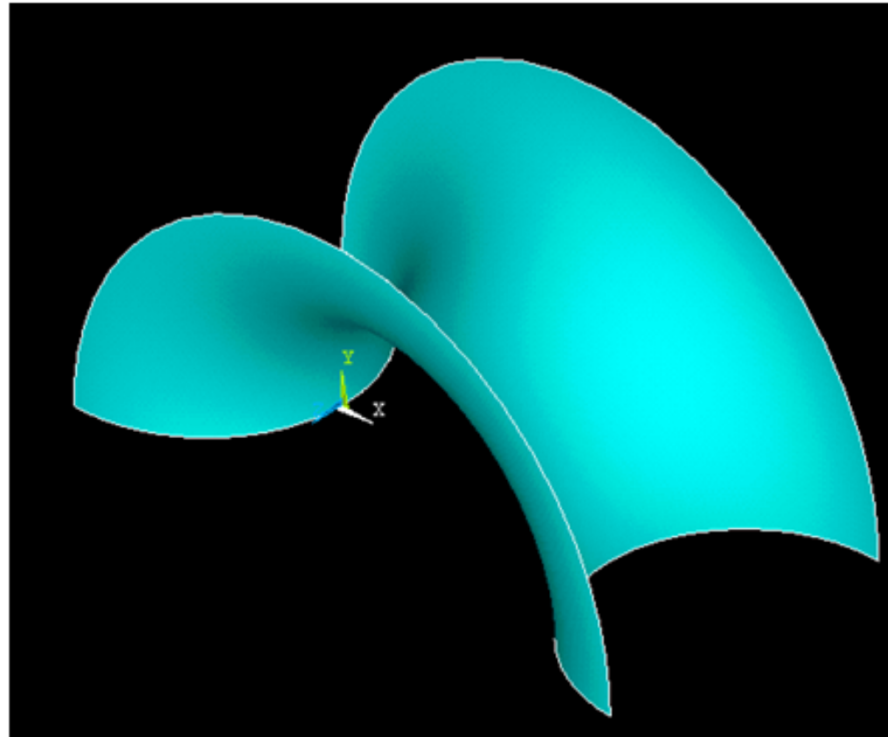




## Lezioni sull'analisi di gusci sottili assialsimmetrici

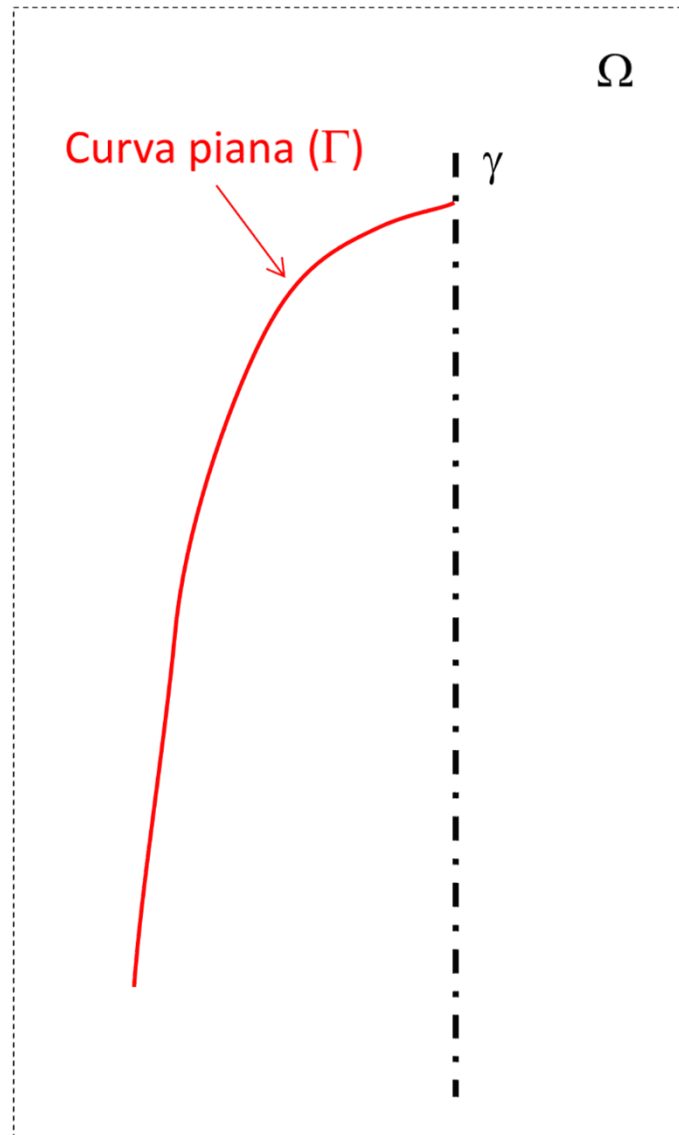
**Gusci sottili:** corpi bidimensionali la cui superficie media non è piana ma si sviluppa nello spazio, con carichi applicati sia giacenti sul piano medio che ortogonali ad esso.





## Lezioni sull'analisi di gusci sottili assialsimmetrici

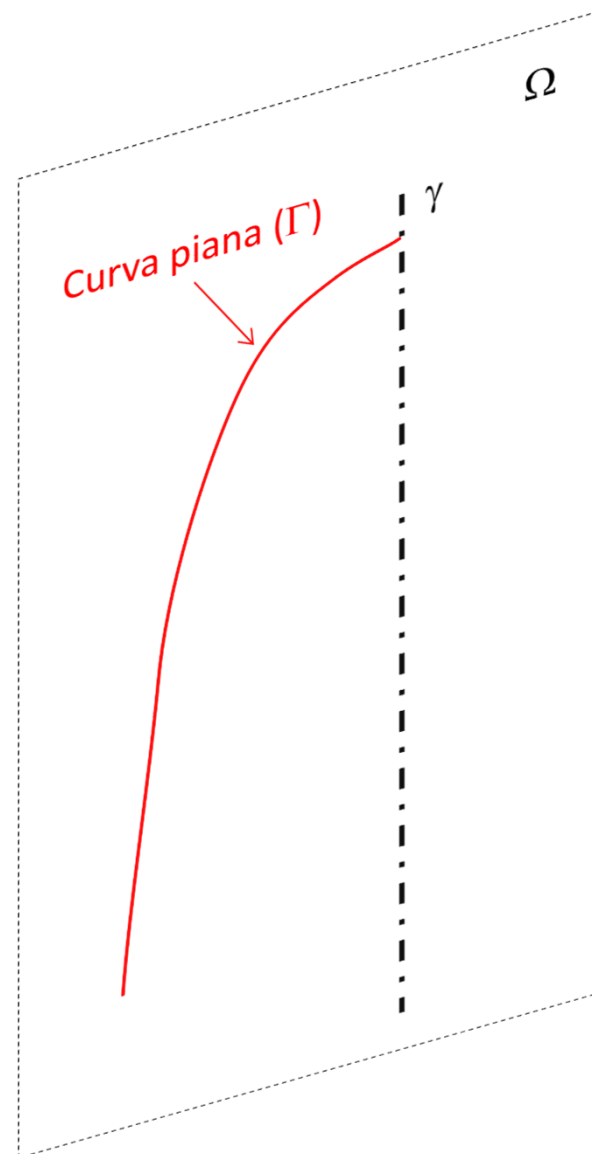
**Guscio sottile assialsimmetrico:** superficie media ottenuta da una curva piana ( $\Gamma$ ) che ruoti attorno ad un asse ( $\gamma$ ) appartenente allo stesso piano ( $\Omega$ ) della curva



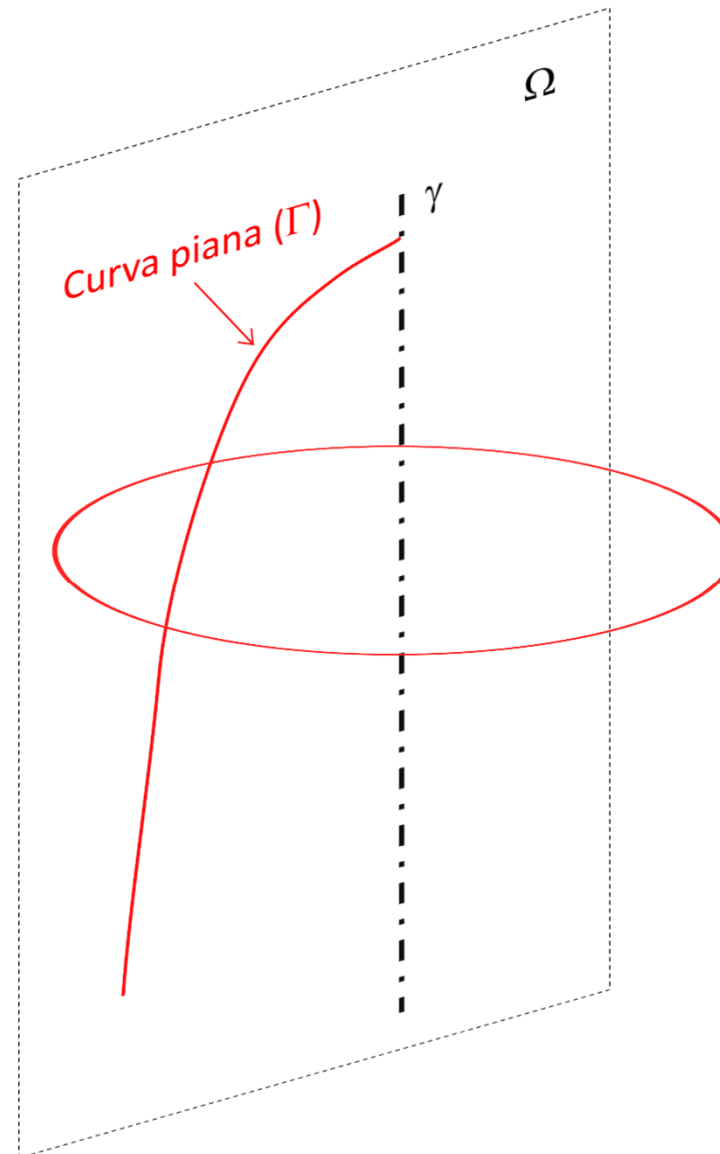


## Lezioni sull'analisi di gusci sottili assialsimmetrici

**Guscio sottile assialsimmetrico:** superficie media ottenuta da una curva piana ( $\Gamma$ ) che ruoti attorno ad un asse ( $\gamma$ ) appartenente allo stesso piano ( $\Omega$ ) della curva



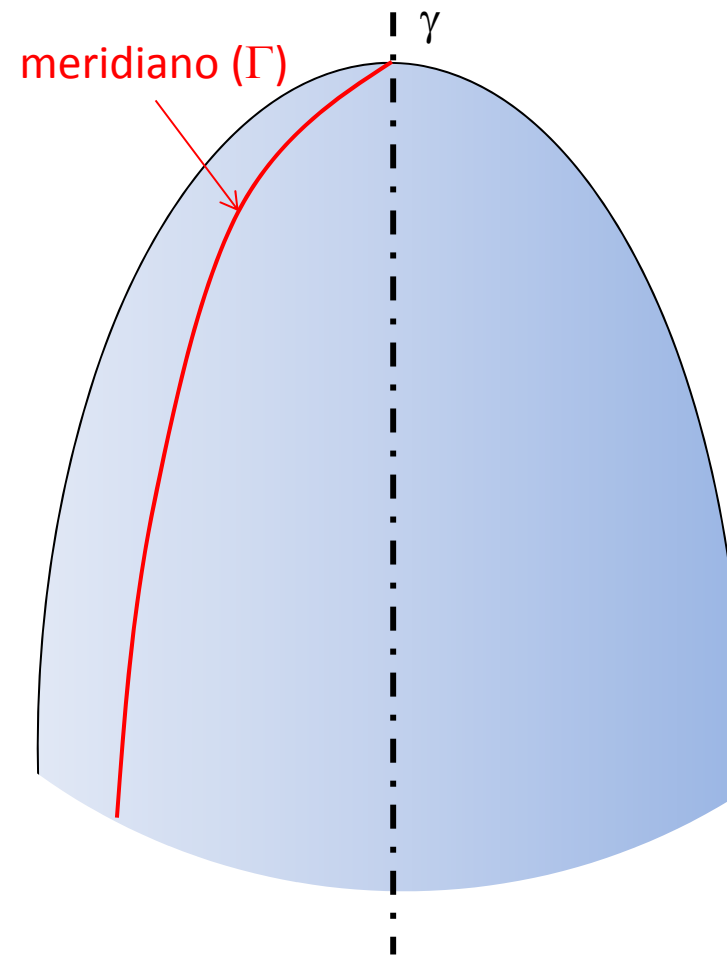
**Guscio sottile assialsimmetrico:** superficie media ottenuta da una curva piana ( $\Gamma$ ) che ruoti attorno ad un asse ( $\gamma$ ) appartenente allo stesso piano ( $\Omega$ ) della curva





## Lezioni sull'analisi di gusci sottili assialsimmetrici

La curva piana ( $\Gamma$ ) costituisce uno dei **meridiani** (curve ottenute per intersezione con un semipiano uscente dall'asse  $\gamma$ ).

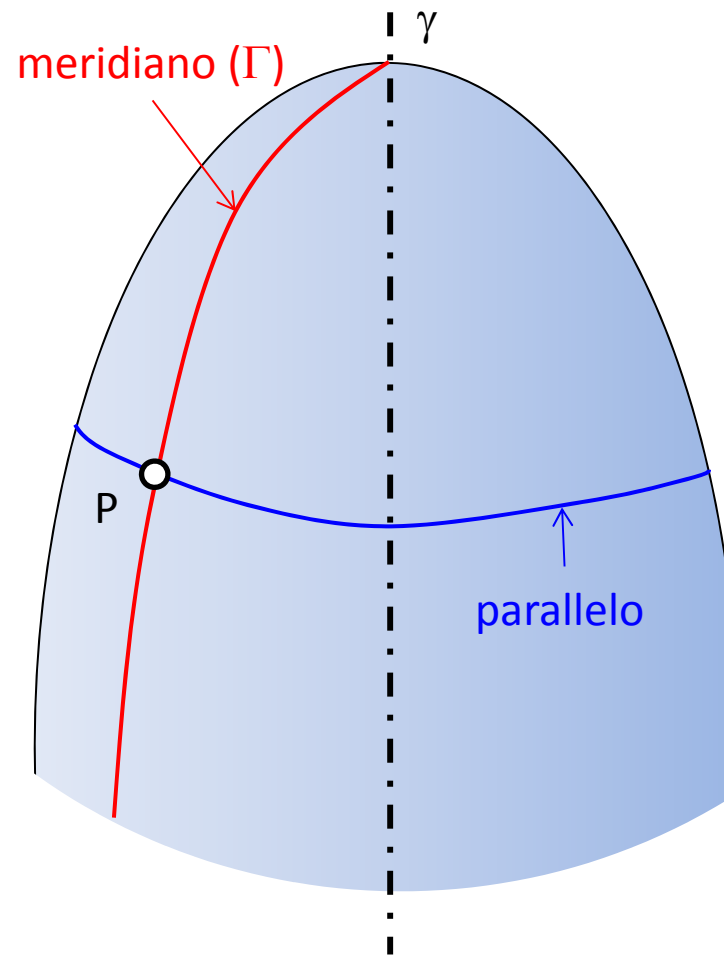




## Lezioni sull'analisi di gusci sottili assialsimmetrici

La curva piana ( $\Gamma$ ) costituisce uno dei **meridiani** (curve ottenute per intersezione con un semipiano uscente dall'asse  $\gamma$ ).

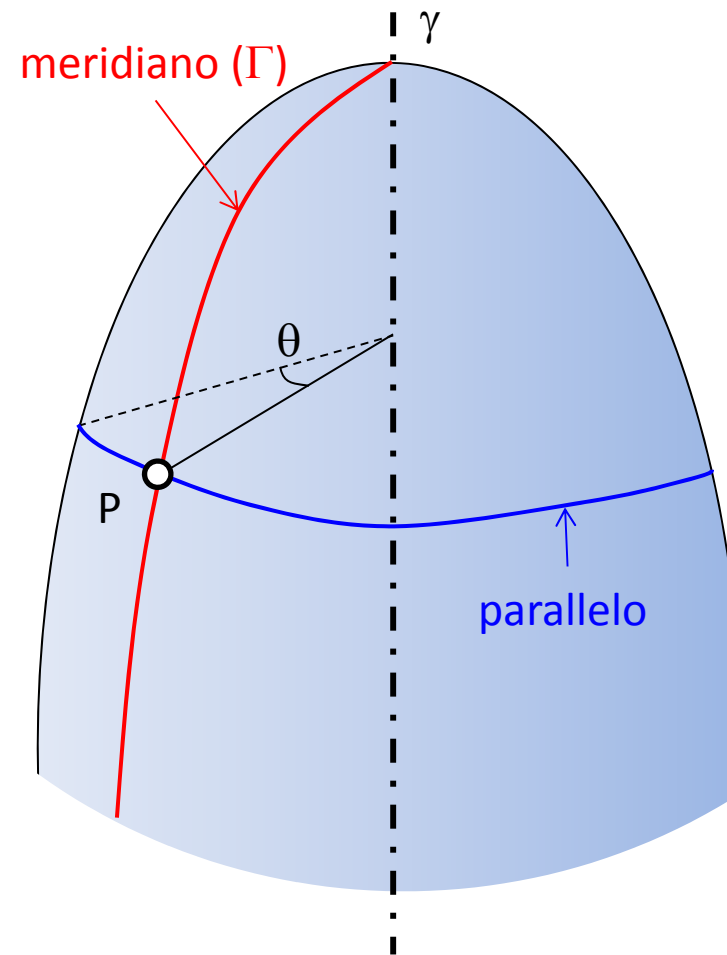
Le circonferenze ottenute sezionando con un piano ortogonale a  $\gamma$  costituiscono i **paralleli**.





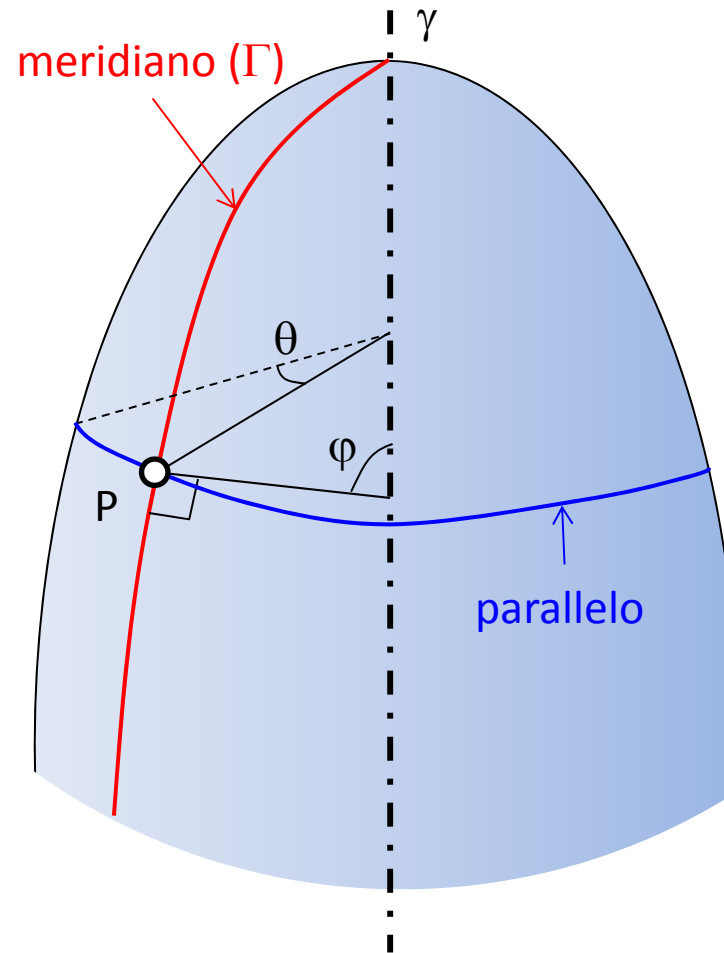
## Lezioni sull'analisi di gusci sottili assialsimmetrici

La posizione di un **meridiano** è definita dall'**angolo azimutale**  $\theta$ , misurato a partire da un meridiano origine arbitrario.



La posizione di un **meridiano** è definita dall'**angolo azimutale**  $\theta$ , misurato a partire da un meridiano origine arbitrario.

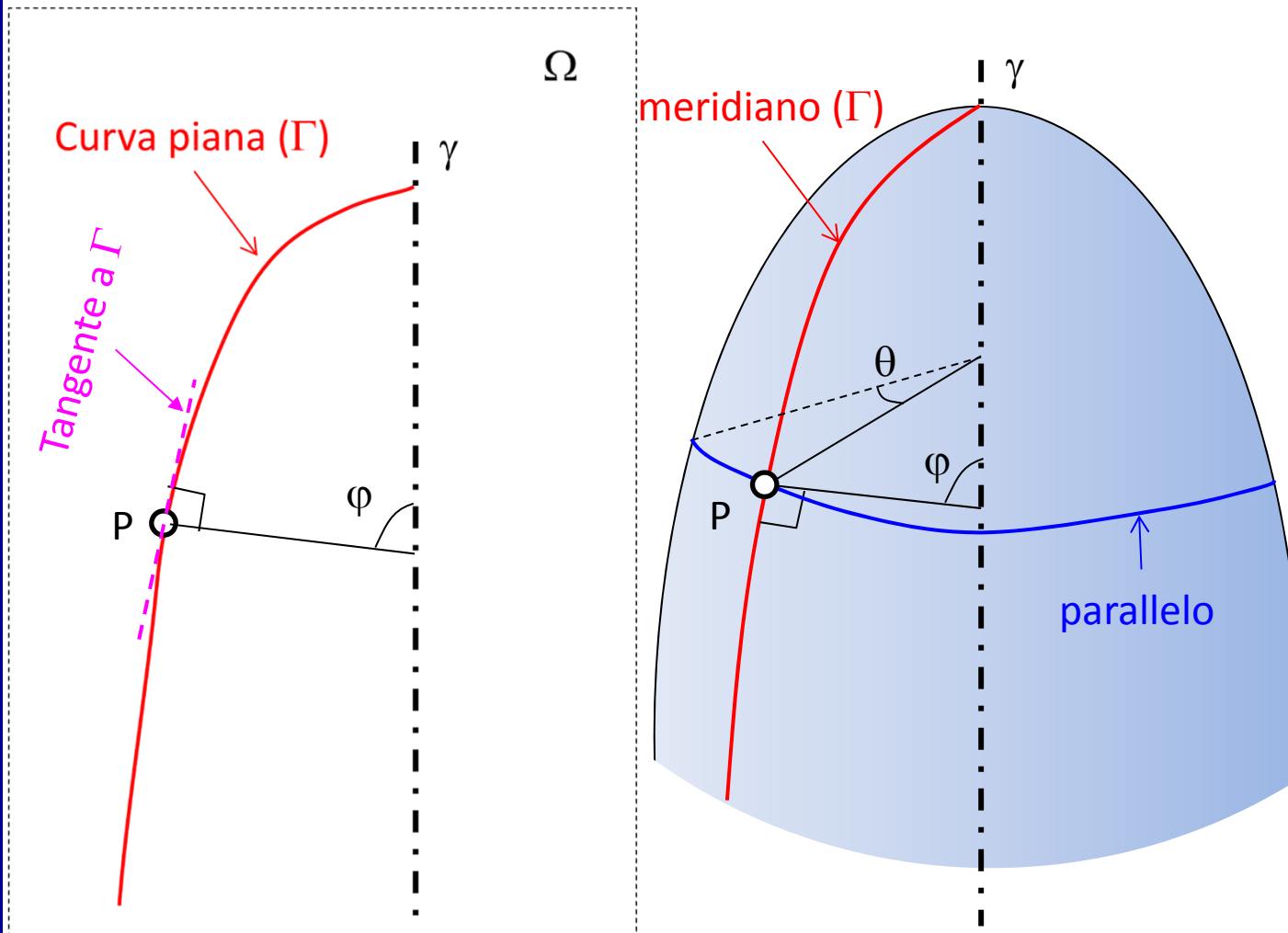
La posizione di un **parallelo** è definita dall'**angolo meridiano**  $\varphi$ , formato tra la normale alla superficie e l'asse di rotazione.





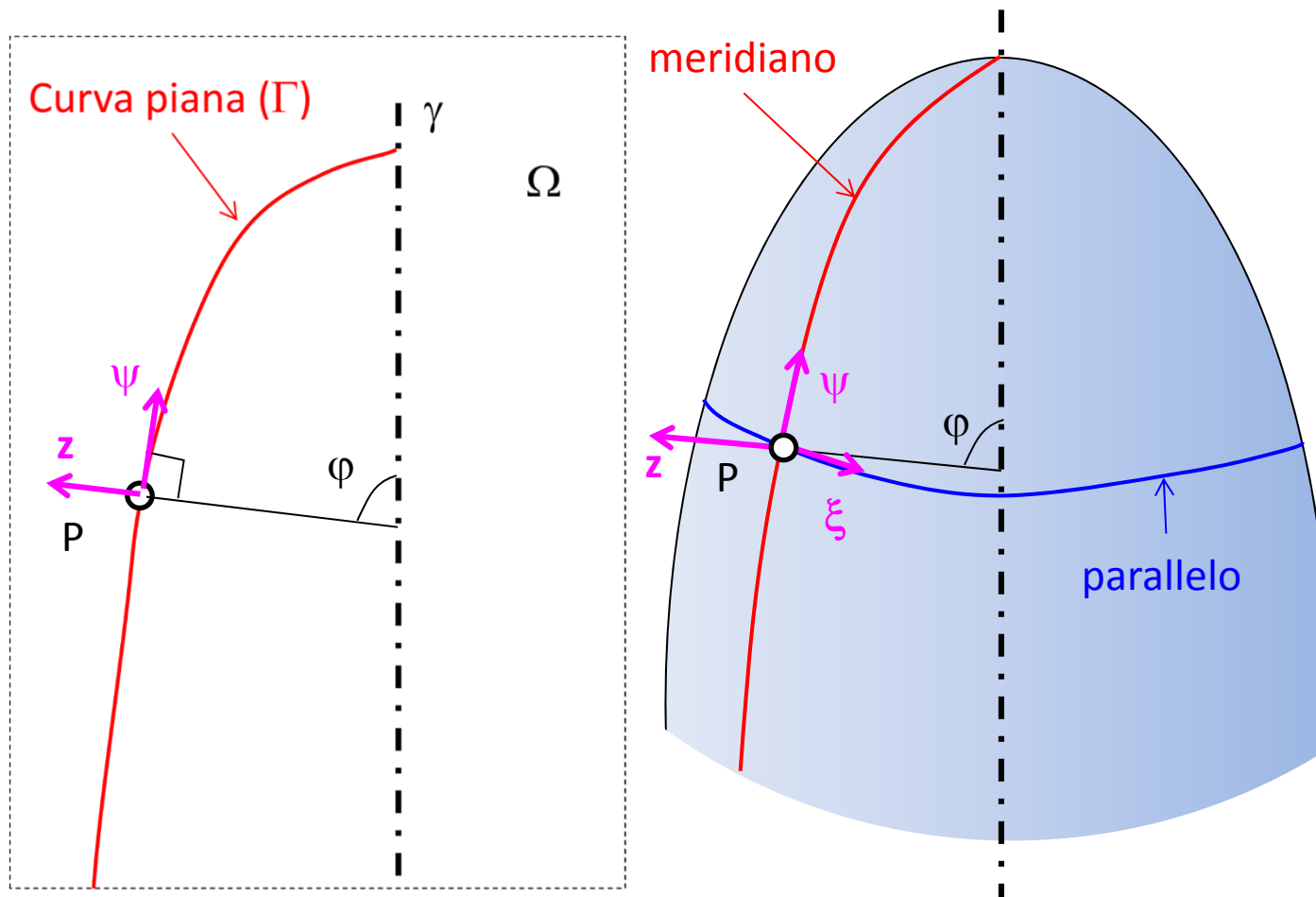
La posizione di un **meridiano** è definita dall'**angolo azimutale**  $\theta$ , misurato a partire da un meridiano origine arbitrario.

La posizione di un **parallelo** è definita dall'**angolo meridiano**  $\varphi$ , formato tra la normale alla superficie e l'asse di rotazione.



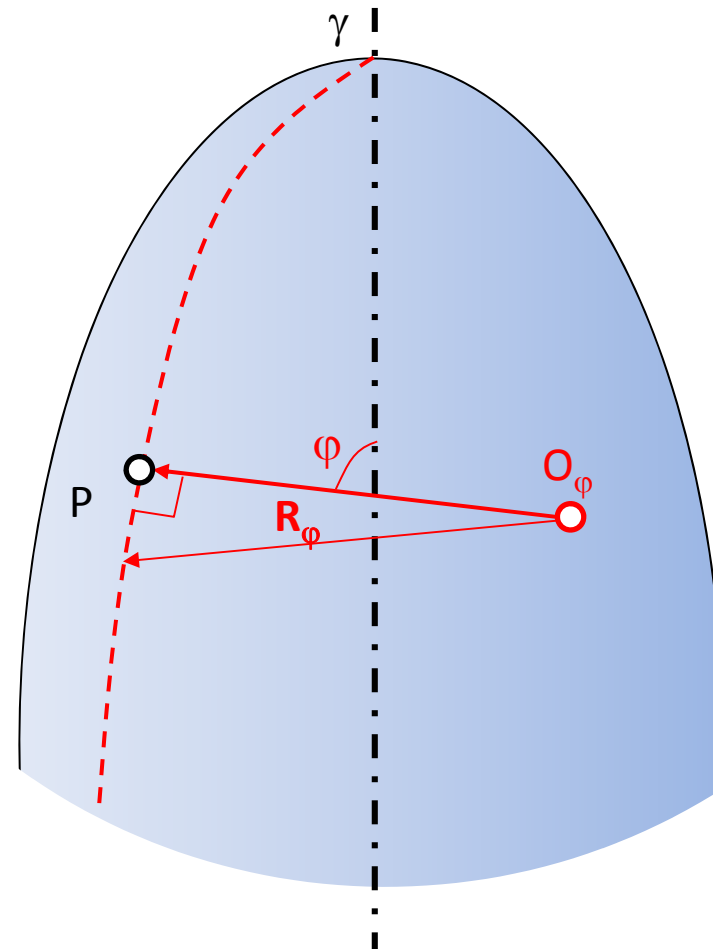
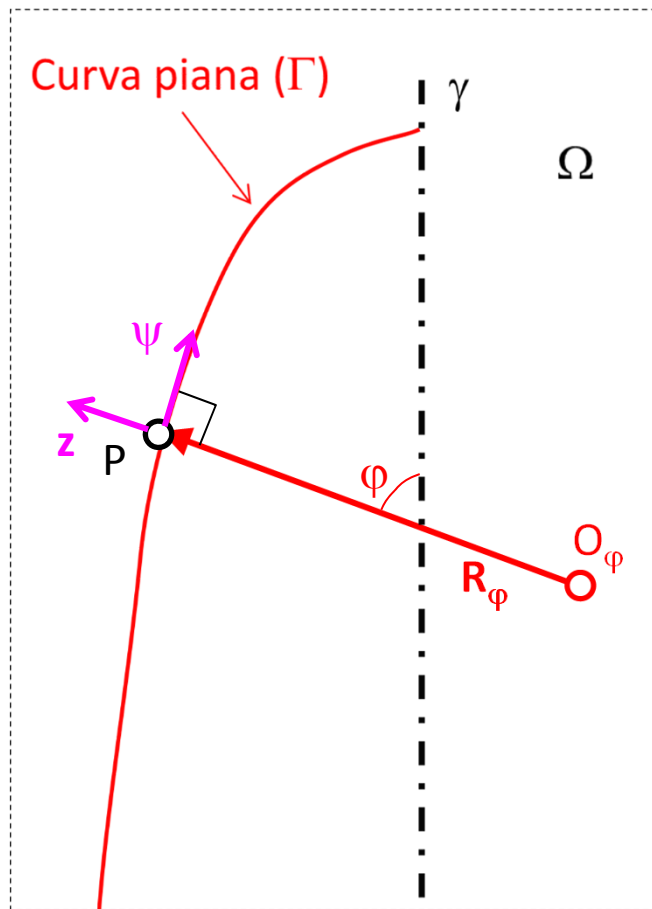
Fissato un punto P, si definisce in esso un SR locale con:

- Asse  $z$  ortogonale al piano tangente alla superficie media in P
- Asse  $\xi$  giacente sul piano tangente e diretto secondo il parallelo per P
- Asse  $\Psi$  giacente sul piano tangente e diretto secondo il meridiano per P



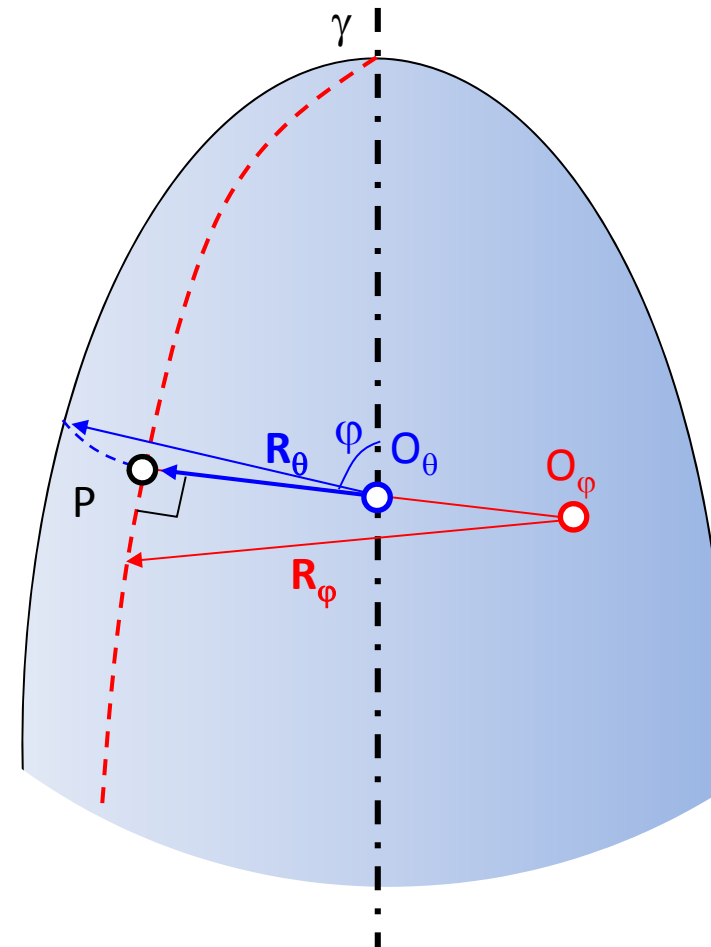
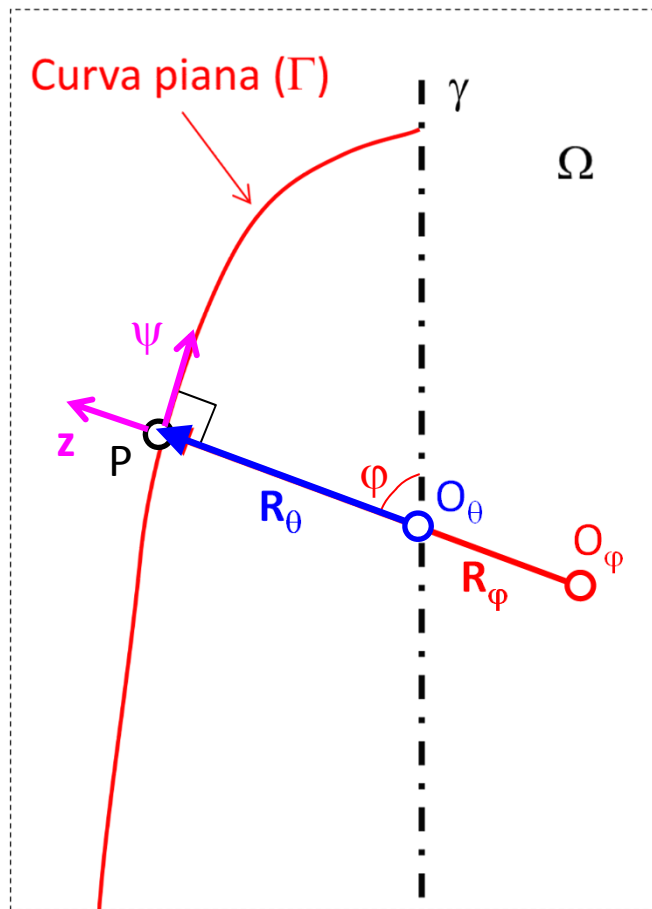
Raggi di curvatura rilevanti:

- **Raggio di curvatura meridiano ( $R_\varphi$ ):** curvatura sul piano  $\Psi$ -Z, corrisponde al raggio di curvatura della curva  $\Gamma$ ; il centro di curvatura giace sul prolungamento dell'asse Z.



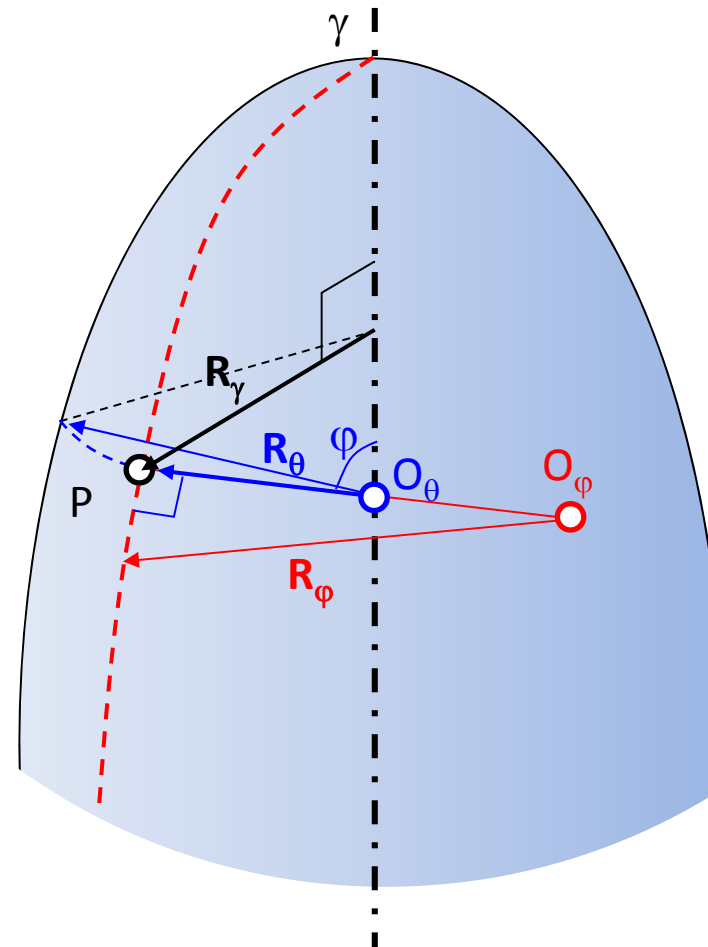
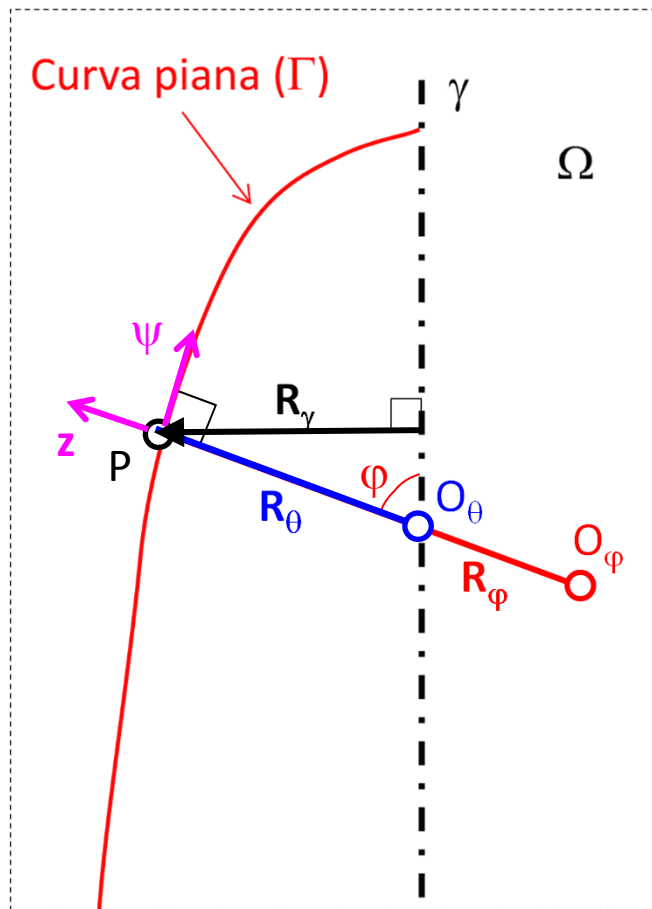
Raggi di curvatura rilevanti:

- **Raggio di curvatura azimutale ( $R_\theta$ ):** curvatura sul piano  $\xi$ - $Z$ ; distanza tra  $P$  e l'intersezione dell'asse  $z$  con l'asse di simmetria, su cui giace il centro di curvatura  $O_\theta$



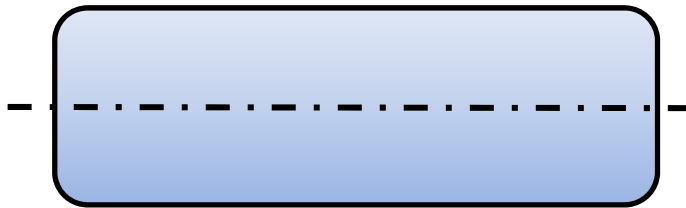
Raggi di curvatura rilevanti:

- **Raggio di curvatura assiale ( $R_\gamma$ ):** distanza tra P e l'asse di simmetria; risulta chiaramente  $R_\gamma = R_\theta \cdot \sin(\varphi)$



## Esercizio 1

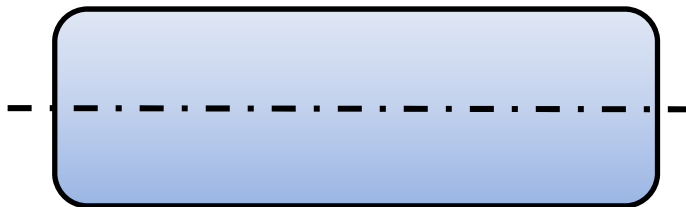
Verificare se le seguenti strutture possono essere studiate come gusci assialsimmetrici:



Recipiente cilindrico orizzontale pieno di acqua e soggetto al relativo peso proprio

SI

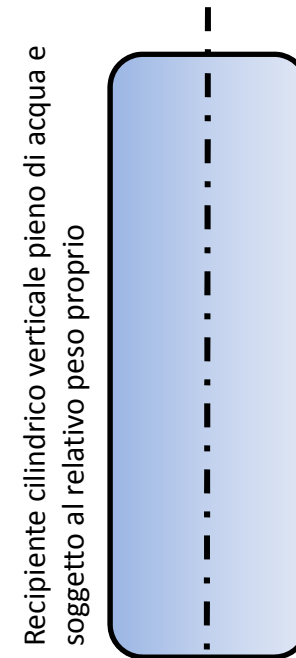
NO



Recipiente cilindrico orizzontale pieno di liquido e soggetto all'effetto di una accelerazione nella direzione del suo asse (Es.: autobotte che frena)

SI

NO



Recipiente cilindrico verticale pieno di acqua e soggetto al relativo peso proprio

SI

NO

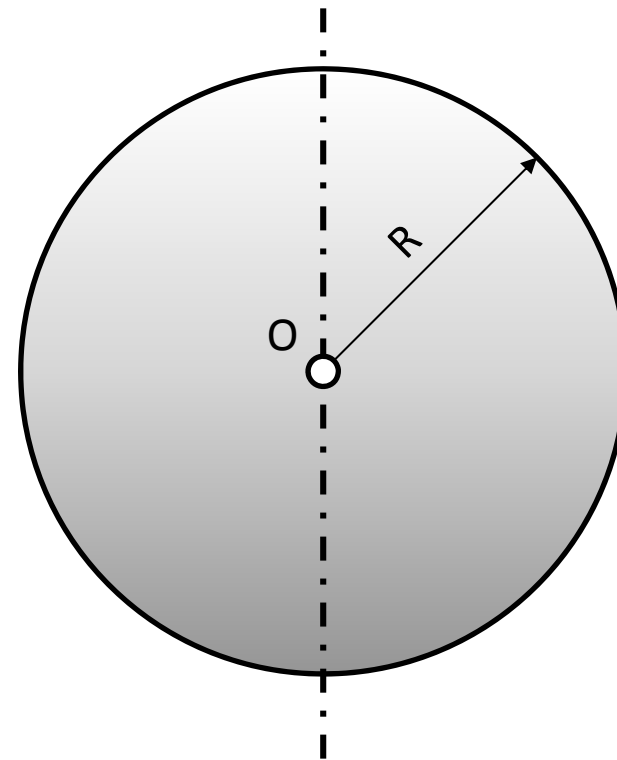


Raggi di curvatura per alcune figure geometriche significative

*Sfera*

$$O_{\theta} \equiv O_{\varphi} \equiv O$$

$$R_{\theta} = R_{\varphi} = R$$

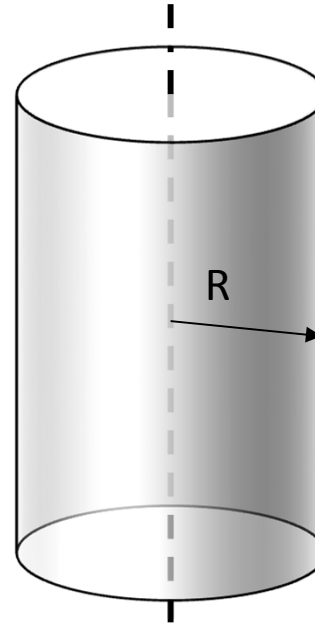


Raggi di curvatura per alcune figure geometriche significative

*Cilindro*

$$R_{\rho} = R_{\gamma} = R$$

$$R_{\varphi} \rightarrow \infty$$







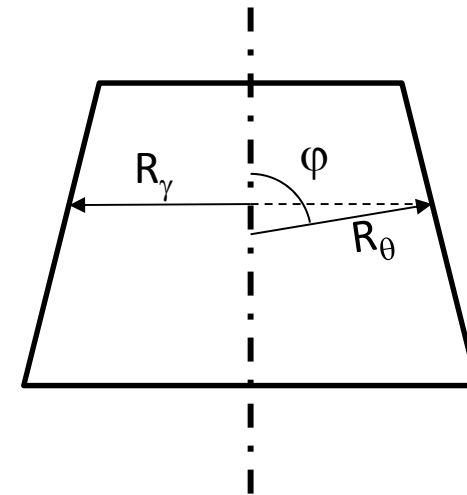
## Lezioni sull'analisi di gusci sottili assialsimmetrici

Raggi di curvatura per alcune figure geometriche significative

Cono (semi-apertura  $90^\circ - \varphi$ )

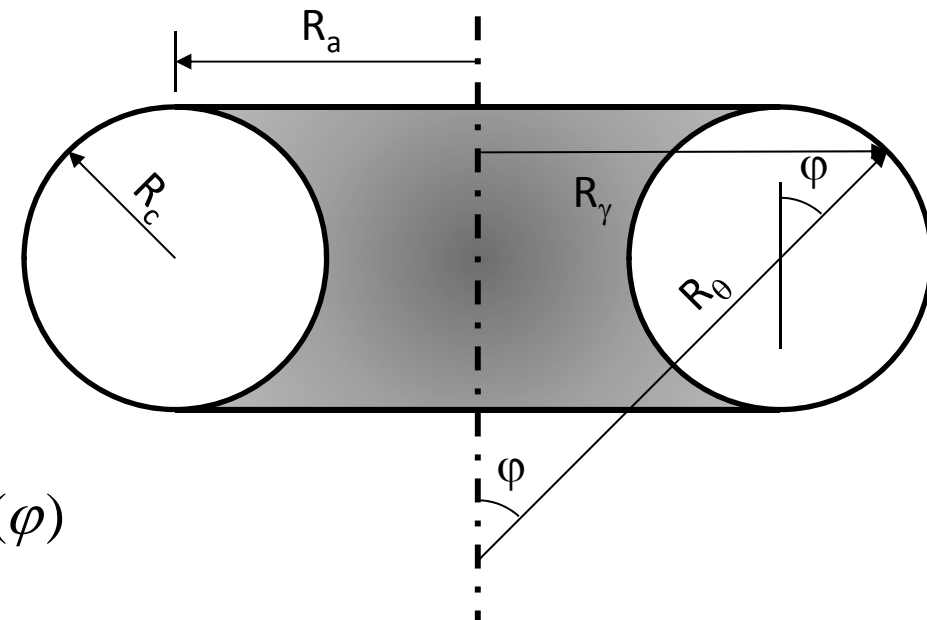
$$R_\theta = \frac{R_\gamma}{\sin(\varphi)}$$

$$R_\varphi \rightarrow \infty$$



Raggi di curvatura per alcune figure geometriche significative

Toro (Raggi  $R_a$  ed  $R_c$ )



$$R_\varphi = R_c$$

$$R_g \cdot \sin(\varphi) = R_\gamma = R_a + R_c \cdot \sin(\varphi)$$

$$R_g = \frac{R_a + R_c \cdot \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

## Raggi di curvatura per alcune figure geometriche significative

### Ellisse (Semi-assi $a$ e $b$ )

Nel punto di coordinate:

$$x_0 = a \cdot \cos(\alpha)$$

$$y_0 = b \cdot \sin(\alpha)$$

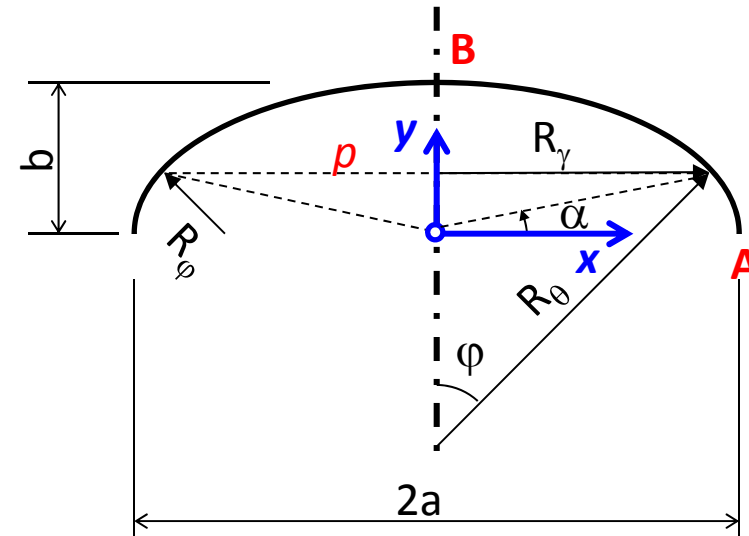
si ottiene:

$$R_\varphi = \frac{[a^2 \sin^2(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha)]^{3/2}}{a \cdot b}$$

$$R_\theta = a \sqrt{\cos^2(\alpha) + \frac{a^2}{b^2} \sin^2(\alpha)}$$

$$\varphi(\alpha) = \arccos \left[ \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \frac{a^2}{b^2} \sin^2(\alpha)}} \right]$$

$$R_\gamma = R_\theta \sin(\varphi)$$



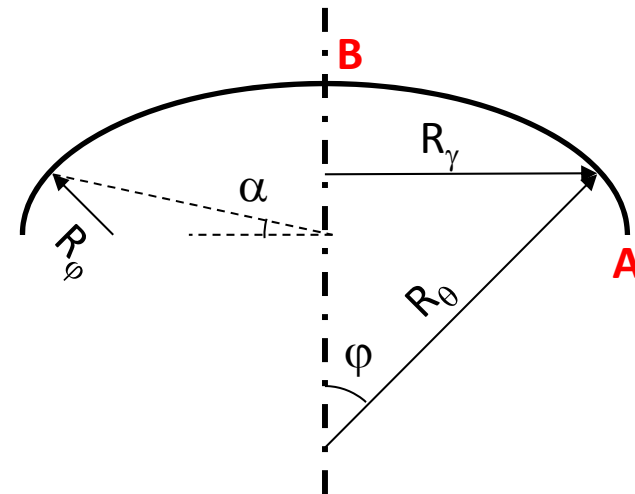
Raggi di curvatura per alcune figure geometriche significative

*Ellisse (Semi-assi  $a$  e  $b$ )*

In particolare si ottiene:

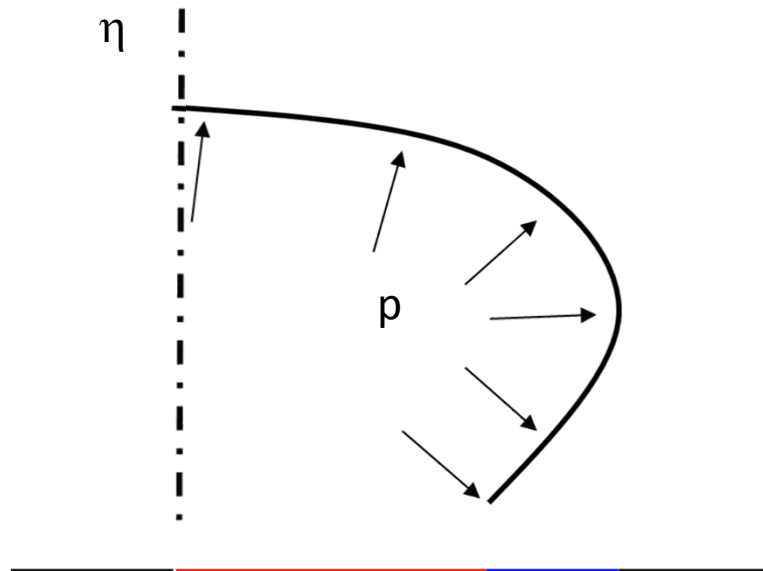
$$A(\alpha = 0^\circ) \left\{ \begin{array}{l} R_\varphi = \frac{b^2}{a} \\ R_\theta = a \end{array} \right.$$

$$B(\alpha = 90^\circ) \left\{ \begin{array}{l} R_\varphi = R_\theta = \frac{a^2}{b} \end{array} \right.$$



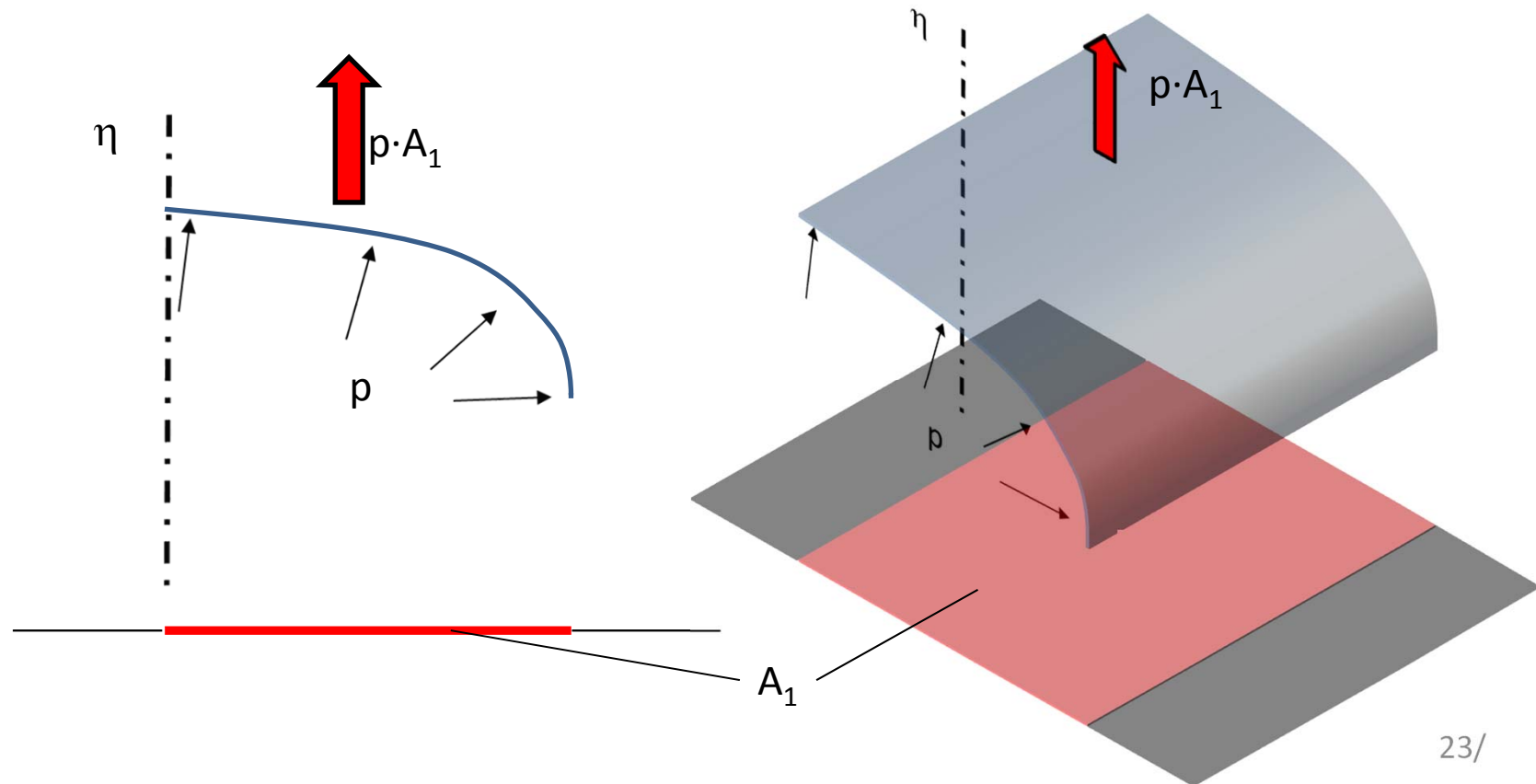
## Analisi dei carichi di pressione

Se una superficie è soggetta ad una pressione uniforme  $p$ , la risultante di tali forze di pressione in una direzione fissata  $\eta$ , indipendentemente dalla forma della superficie, è pari al prodotto di  $p$  per l'area della proiezione netta della superficie stessa su di un piano ortogonale ad  $\eta$ .



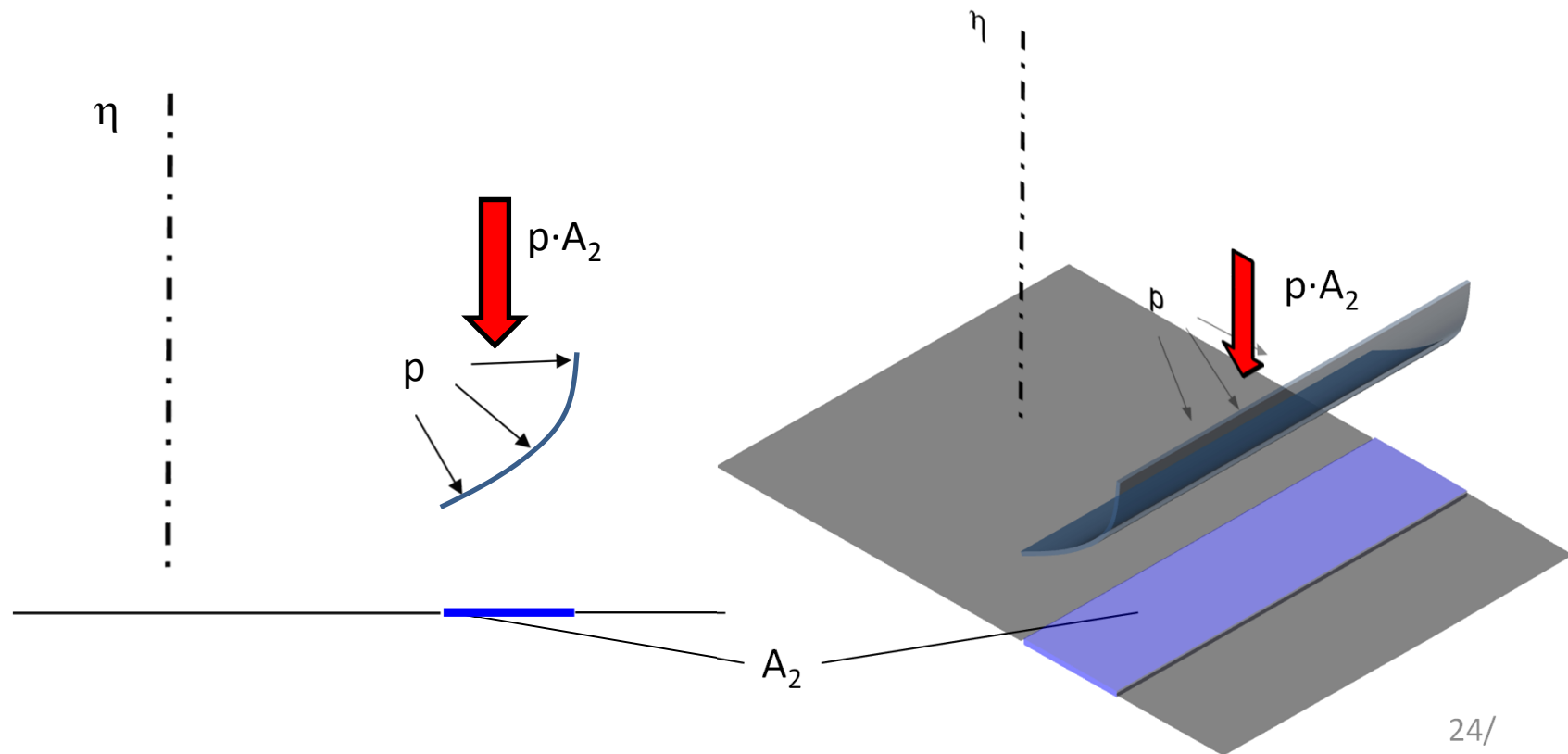
## Analisi dei carichi di pressione

Se una superficie è soggetta ad una pressione uniforme  $p$ , la risultante di tali forze di pressione in una direzione fissata  $\eta$ , indipendentemente dalla forma della superficie, è pari al prodotto di  $p$  per l'area della proiezione della superficie stessa su di un piano ortogonale ad  $\eta$ . Il verso è dato dalla componente del vettore che rappresenta la pressione sulla direzione  $\eta$ .



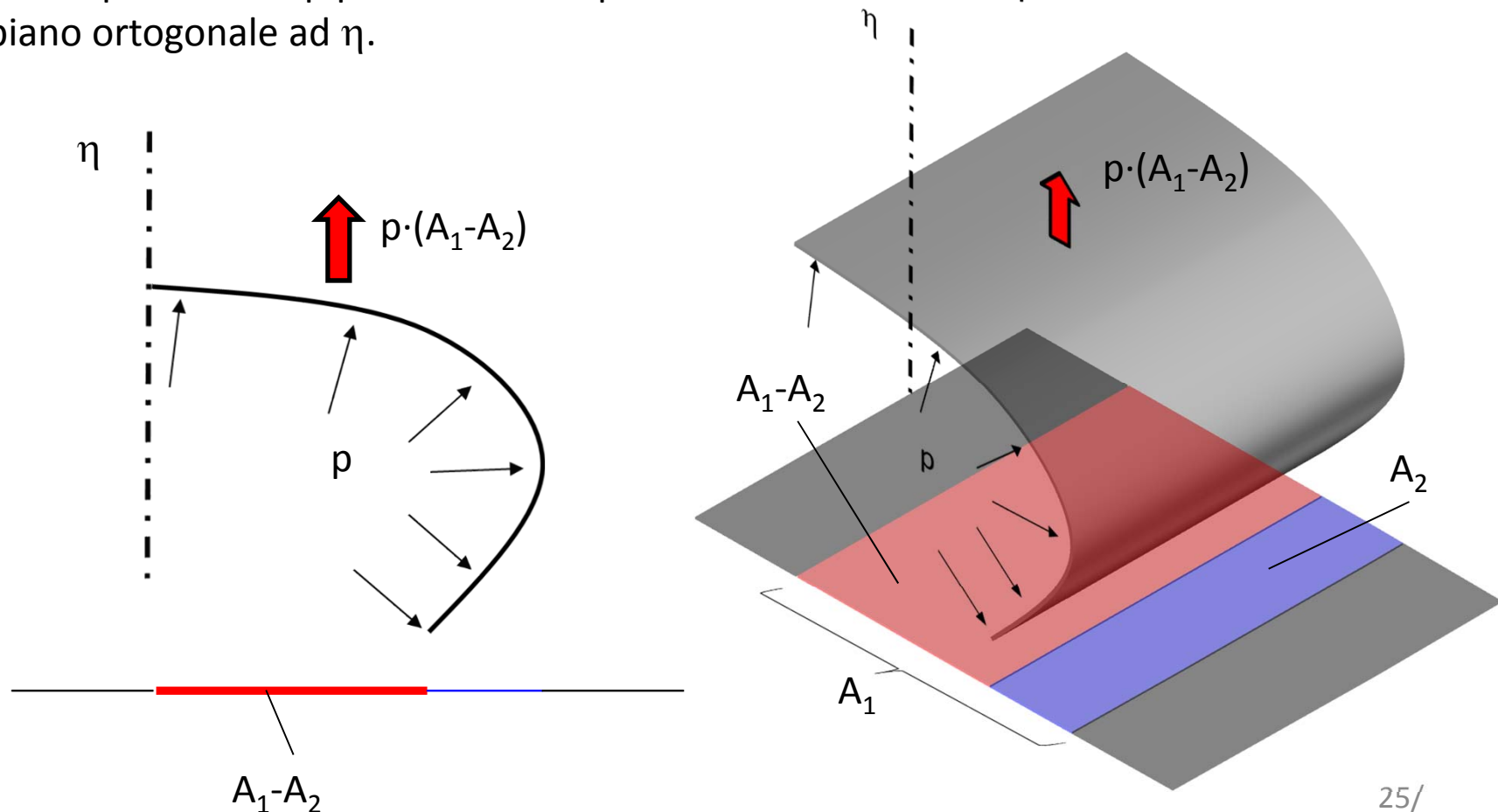
## Analisi dei carichi di pressione

Se una superficie è soggetta ad una pressione uniforme  $p$ , la risultante di tali forze di pressione in una direzione fissata  $\eta$ , indipendentemente dalla forma della superficie, è pari al prodotto di  $p$  per l'area della proiezione della superficie stessa su di un piano ortogonale ad  $\eta$ . Il verso è dato dalla componente del vettore che rappresenta la pressione sulla direzione  $\eta$ .



## Analisi dei carichi di pressione

Se una superficie è soggetta ad una pressione uniforme  $p$ , la risultante di tali forze di pressione in una direzione fissata  $\eta$ , indipendentemente dalla forma della superficie, è pari al prodotto di  $p$  per l'area della proiezione netta della superficie stessa su di un piano ortogonale ad  $\eta$ .







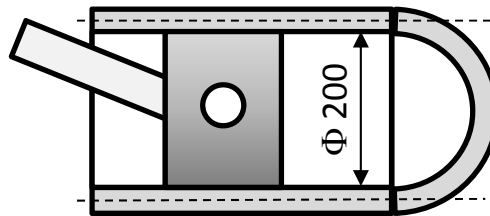
## Lezioni sull'analisi di gusci sottili assialsimmetrici

### Esercizio 2a

Calcolare la reazione vincolare assiale che devono esercitare i prigionieri che trattengono la testa emisferica di un compressore da 10 bar.

Come cambierebbe la risposta se la testa fosse piana?

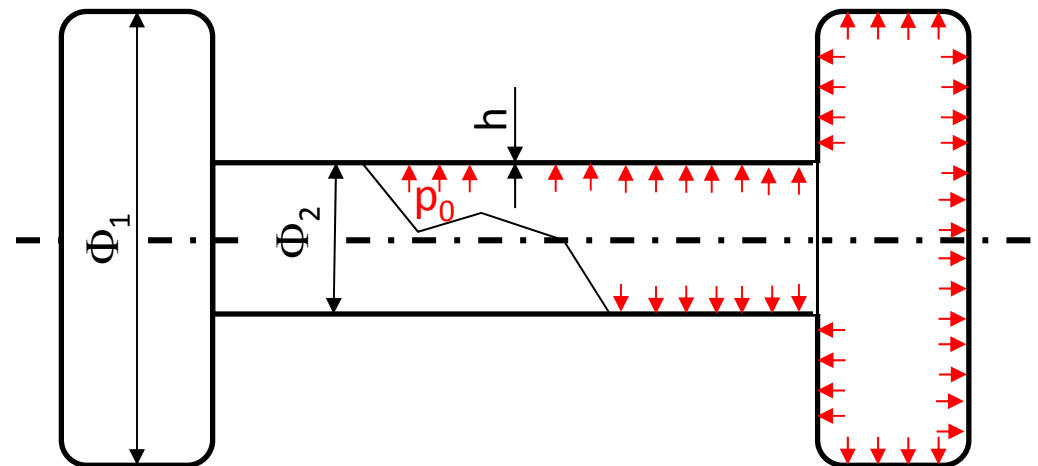
E se fosse semiellittica con rapporto 2 tra gli assi?



## Esercizio 2b

Il recipiente pressurizzato mostrato in Figura è composto da tre corpi cilindrici formanti all'interno un'unica cavità.

Quanto vale la forza assiale cui è sottoposto complessivamente il cilindro centrale?



$$\Phi_1 = 3\text{-m}$$

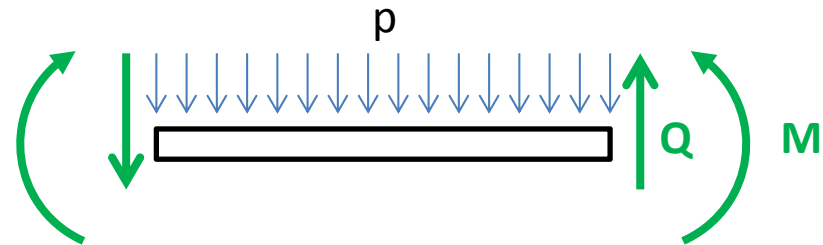
$$\Phi_2 = 1\text{-m}$$

$$p_0 = 1\text{ bar}$$

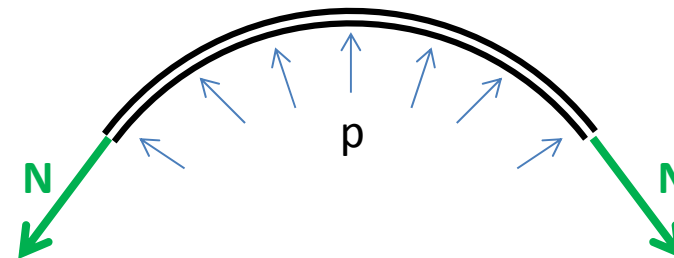
$$h = 2\text{ mm}$$

## Differenze fondamentali tra gusci e piastre

**Piastre:** superficie media piana, per cui i carichi esterni **non** potrebbero essere equilibrati da tensioni costanti nello spessore, la cui risultante non avrebbe componenti ortogonali al piano medio → **taglio + flessione in ogni punto**

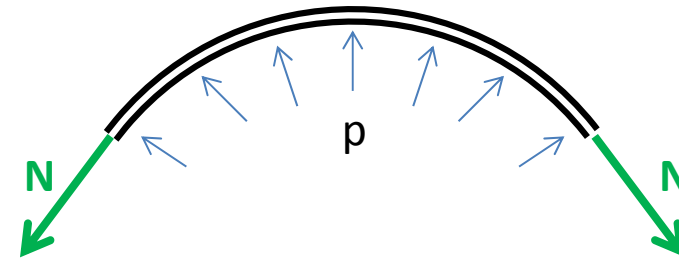


**Gusci:** superficie media curva, per cui i carichi esterni **possono** essere equilibrati da tensioni costanti nello spessore, la cui risultante  $N$  ha una componente nella risultante della pressione  $p$  → **taglio e flessione solo in particolari zone limitate**



## Teoria «membranale» dei gusci sottili

Escluse particolari zone, solitamente di limitata estensione, lo stato di tensione dei gusci sottili può essere analizzato ipotizzando che lo stato di tensione sia **costante nello spessore** (Teoria membranale dei gusci sottili)



## Ipotesi preliminari della teoria dei gusci sottili

- spostamenti sotto carico molto minori dello spessore
- punti dello spessore che, prima della deformazione, giacevano su di una retta ortogonale alla superficie media, dopo la deformazione continuano a formare una retta ortogonale alla superficie media deformata (ipotesi di Kirchoff).
- le tensioni normali agenti ortogonalmente al piano medio della piastra siano trascurabili (stato piano di tensione)

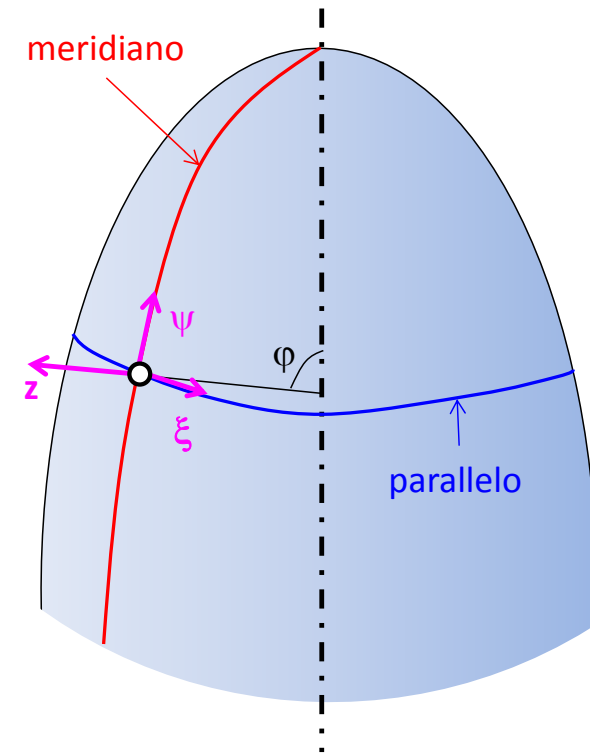


## Lezioni sull'analisi di gusci sottili assialsimmetrici

### Teoria membranale dei gusci sottili assialsimmetrici

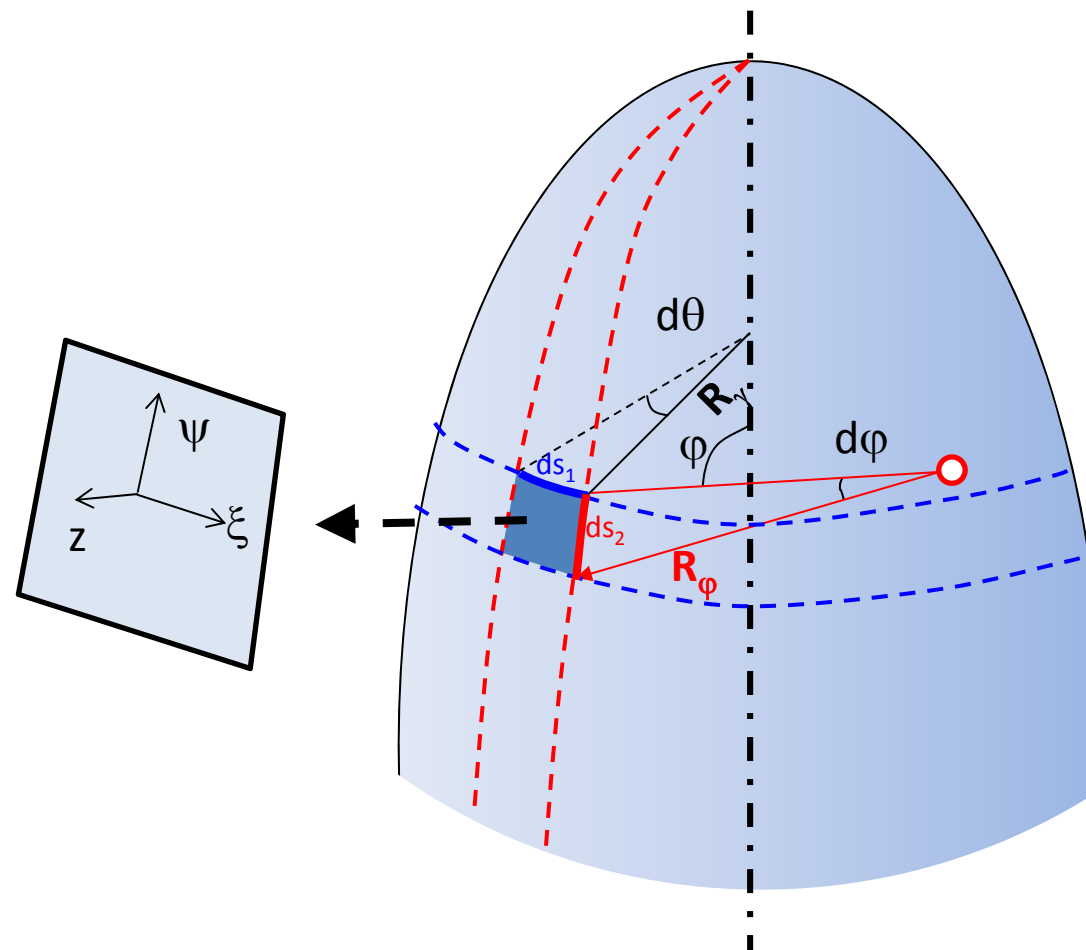
In base alle ipotesi generali fatte, per i gusci sottili assialsimmetrici possono essere introdotte le seguenti ulteriori semplificazioni:

- la componente di spostamento in direzione circonferenziale è nulla per simmetria
- le componenti di spostamento, tensione e deformazione sono costanti in direzione circonferenziale e cambiano solo nella direzione meridiana



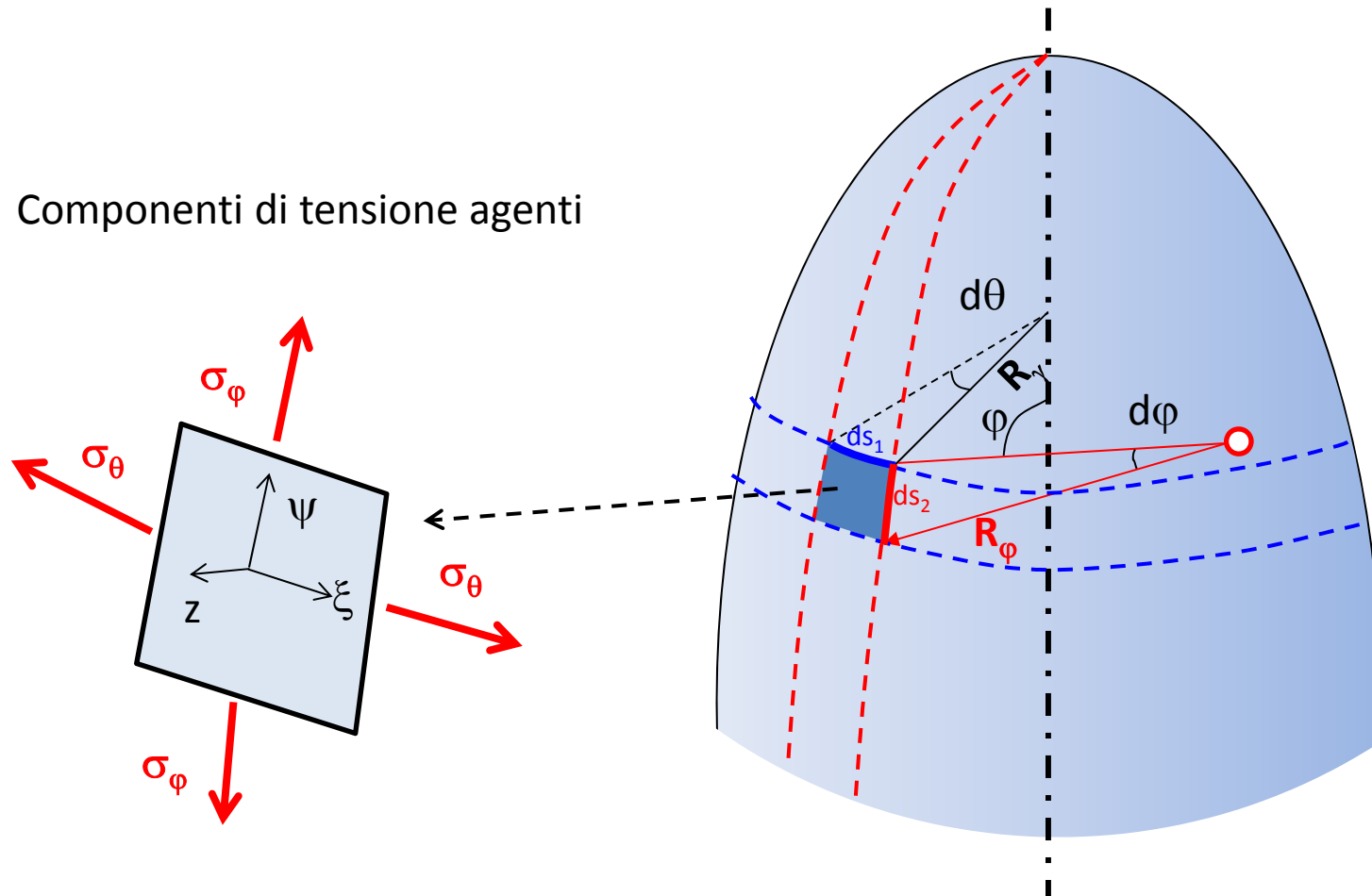
## Tensioni e caratteristiche di sollecitazione generalizzate membranali

Elemento di guscio compreso tra due piccoli incrementi delle coordinate azimutale ( $\varphi$ ) e meridiana ( $\theta$ ) ed interessante l'intero spessore.

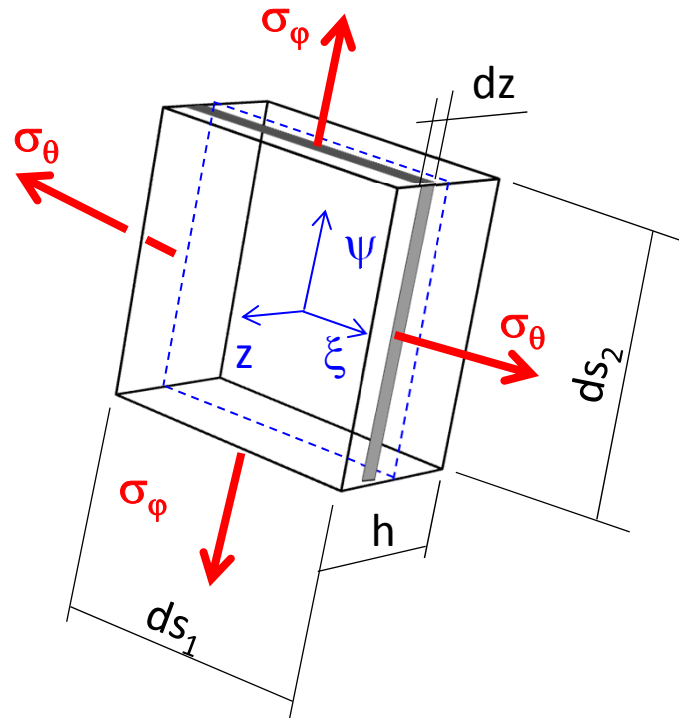


## Tensioni e caratteristiche di sollecitazione generalizzate membranali

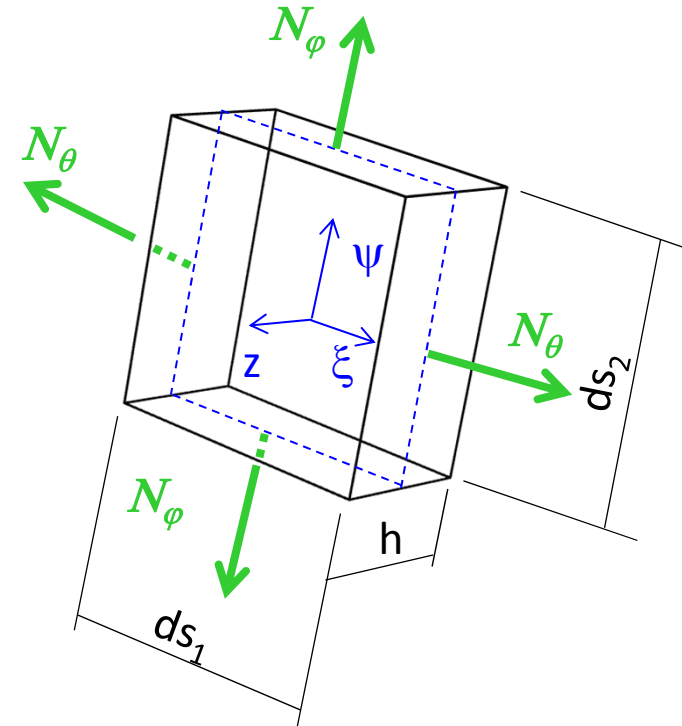
Componenti di tensione agenti



## Tensioni e caratteristiche di sollecitazione generalizzate membranali



Componenti di tensione agenti



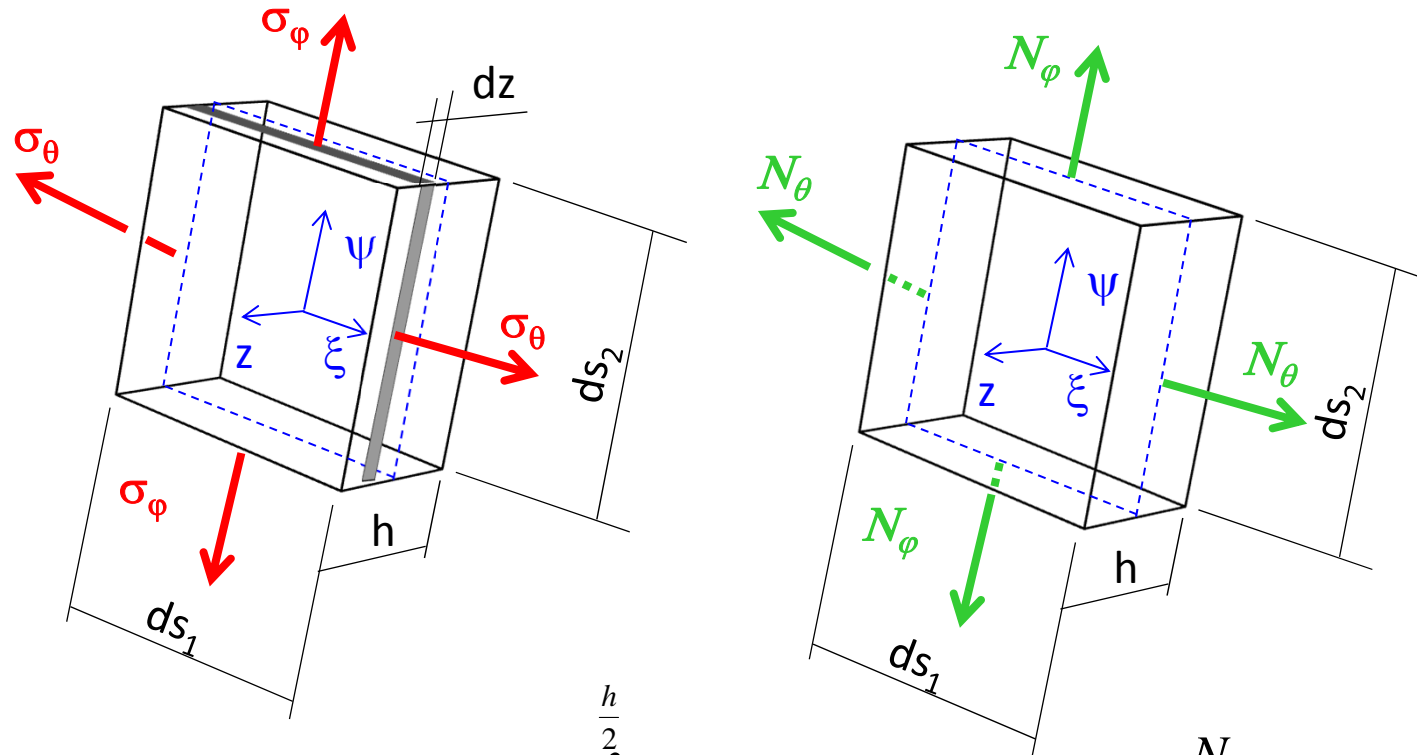
Caratteristiche di sollecitazione generalizzate membranali

$$N_{\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta} \cdot dz$$

$$N_{\phi} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\phi} \cdot dz$$



## Tensioni e caratteristiche di sollecitazione generalizzate membranali



$$N_{\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta} \cdot dz = \sigma_{\theta} \cdot h \quad \rightarrow \quad \sigma_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{h}$$

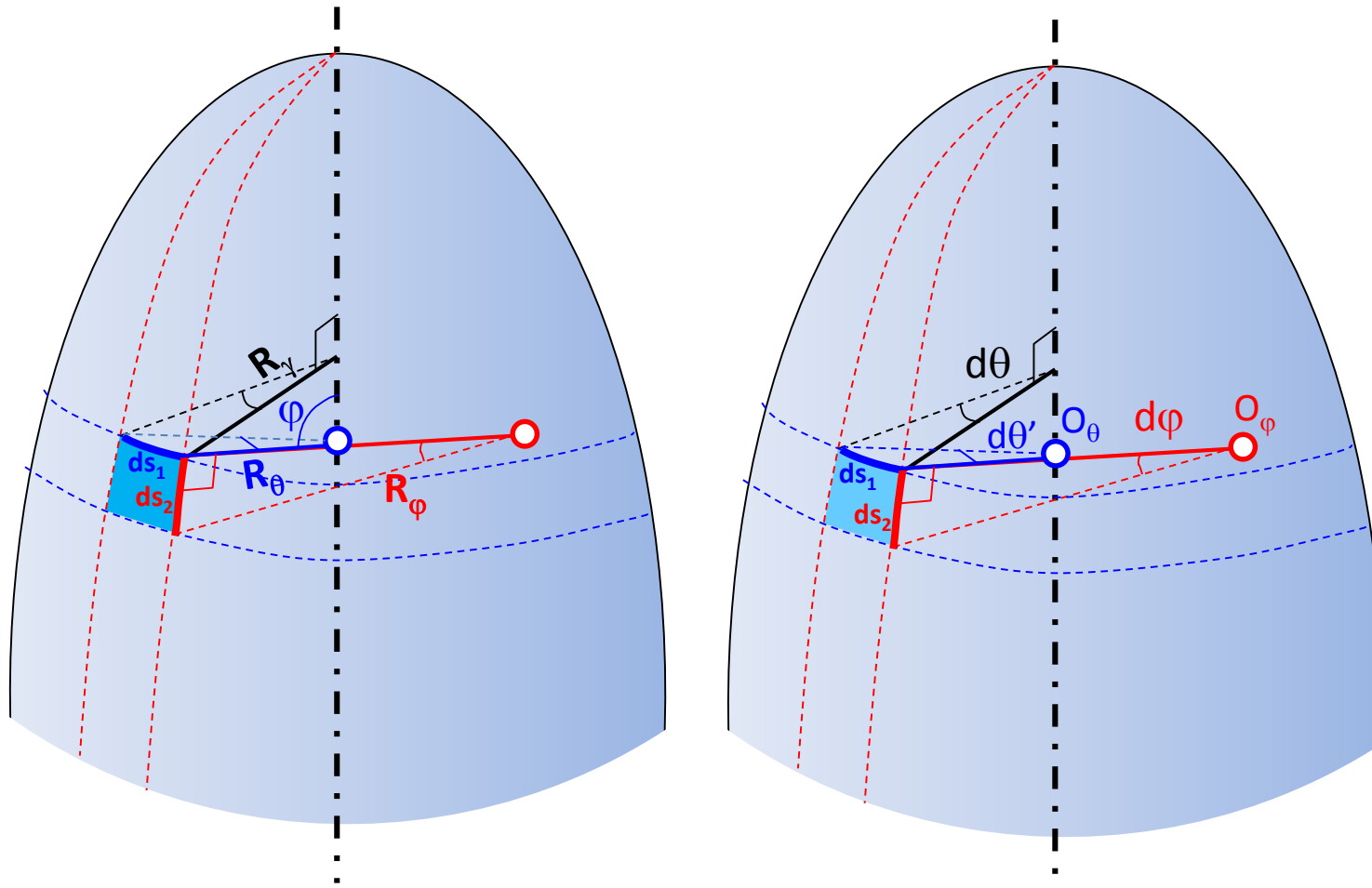
Ipotesi: tensioni costanti  
nello spessore

$$N_{\phi} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\phi} \cdot dz = \sigma_{\phi} \cdot h \quad \rightarrow \quad \sigma_{\phi} = \frac{N_{\phi}}{h}$$

## Equazioni di equilibrio/1

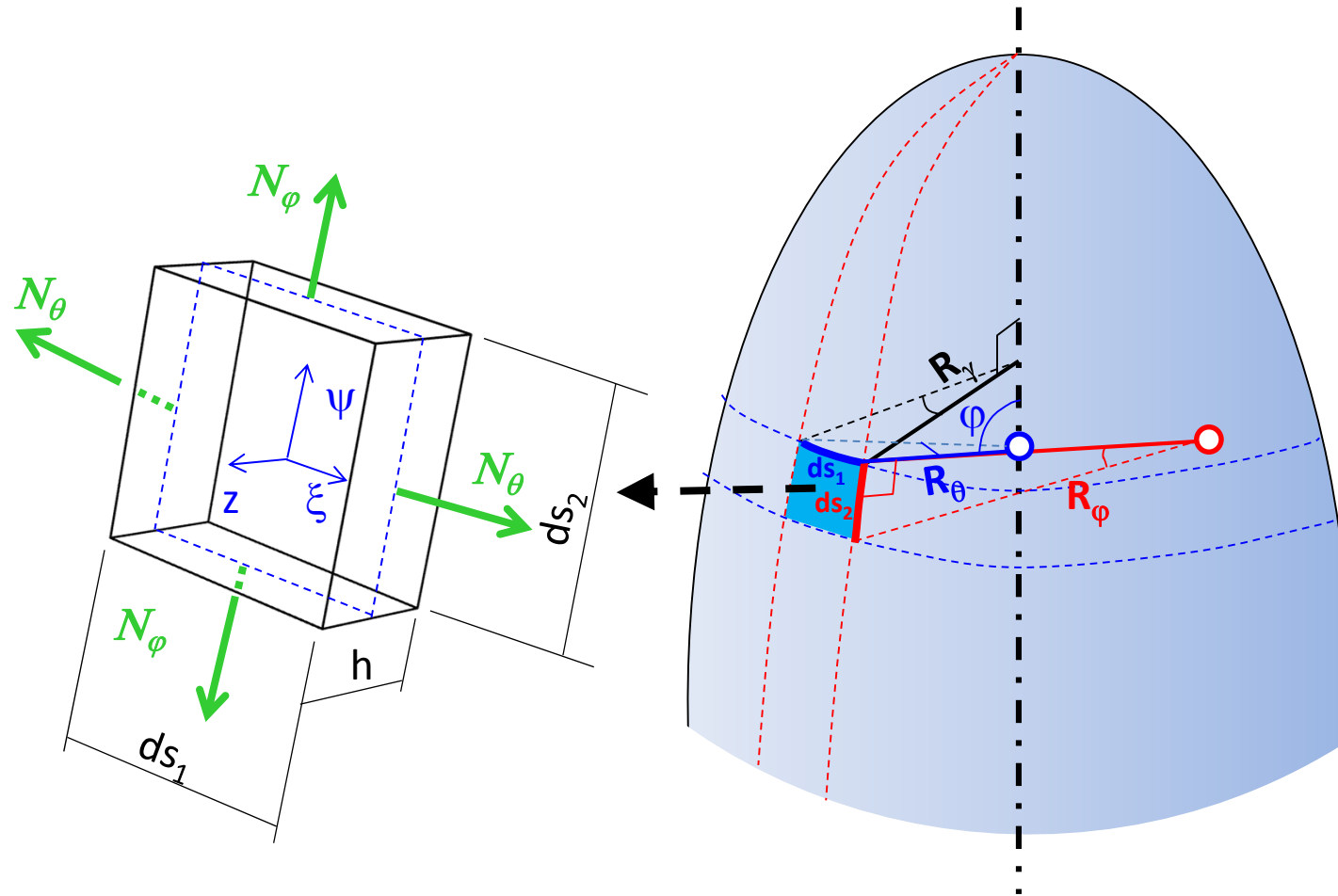
Grandezze geometriche:  $ds_1 = R_\gamma \cdot d\theta = R_\theta \cdot \sin(\varphi) \cdot d\theta = R_\theta \cdot d\theta'$

$$ds_2 = R_\varphi \cdot d\varphi$$



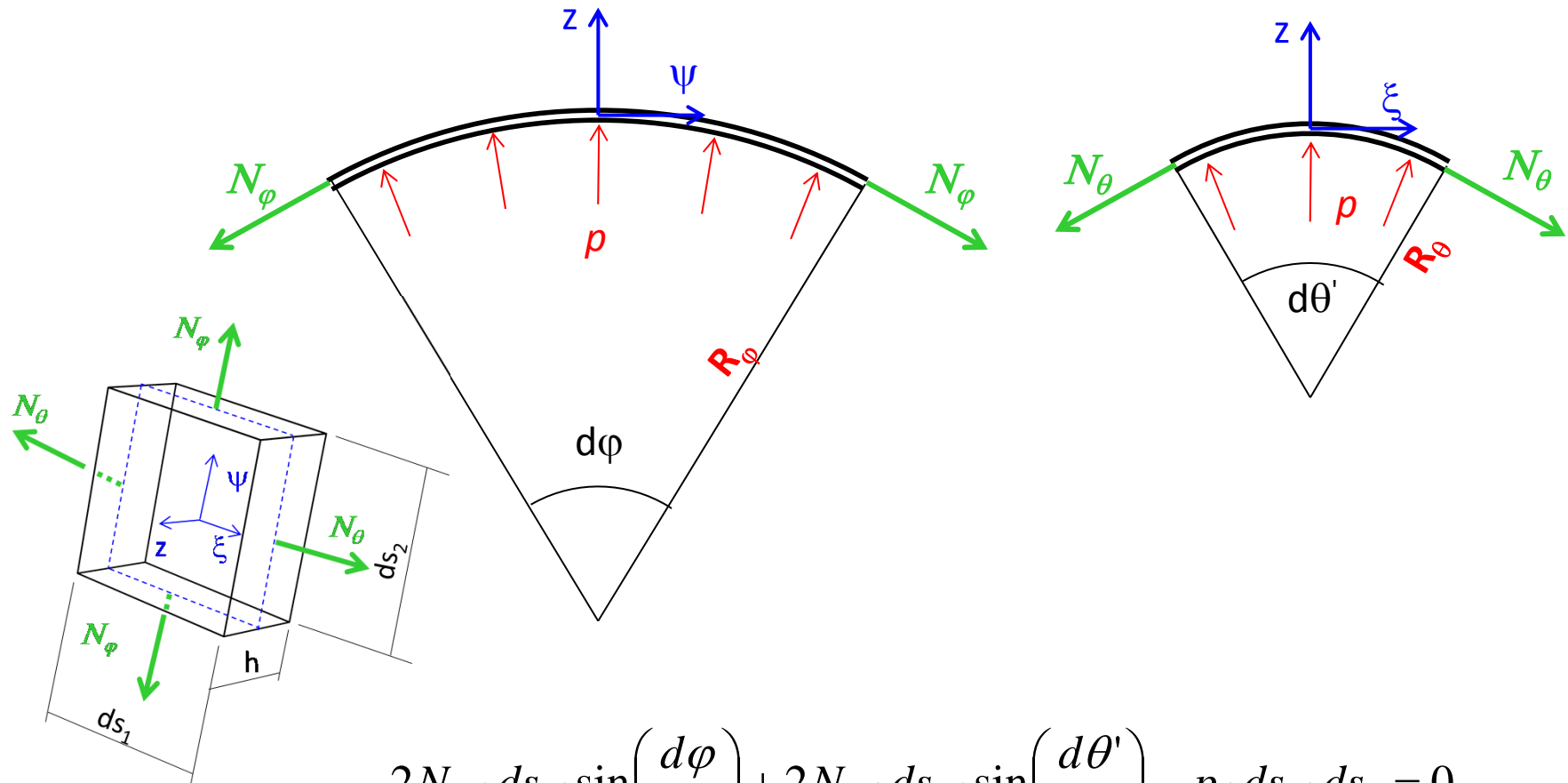
## Equazioni di equilibrio/2

Si considera l'equilibrio dell'elemento di guscio in direzione z:



## Equazioni di equilibrio/3

Si rappresenta l'elemento di guscio sui piani  $\Psi$ - $z$  e  $z$ - $\xi$ :



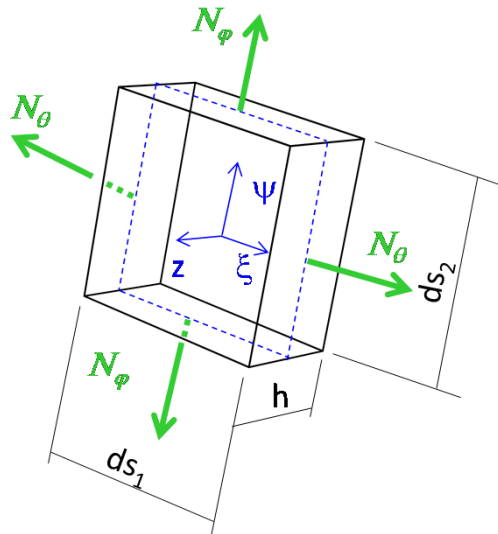
$$2N_\varphi \cdot ds_1 \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + 2N_\theta \cdot ds_2 \cdot \sin\left(\frac{d\theta'}{2}\right) - p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0$$

## Equazioni di equilibrio/4

Approssimando il seno con l'angolo

$$2N_{\varphi} \cdot ds_1 \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - 2N_{\theta} \cdot ds_2 \sin\left(\frac{d\theta'}{2}\right) - p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0$$

$$N_{\varphi} \cdot ds_1 \cdot d\varphi + N_{\theta} \cdot ds_2 \cdot d\theta' - p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0$$



## Equazioni di equilibrio/4

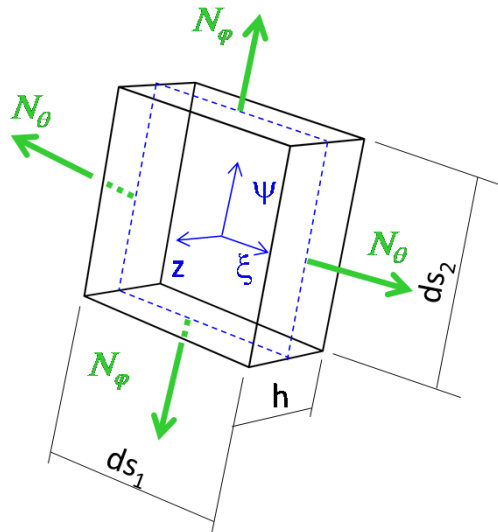
$$2N_{\varphi} \cdot ds_1 \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + 2N_{\theta} \cdot ds_2 \cdot \sin\left(\frac{d\theta'}{2}\right) - p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0$$

$$N_{\varphi} \cdot ds_1 \cdot d\varphi + N_{\theta} \cdot ds_2 \cdot d\theta' - p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0$$

Sostituendo

$$ds_1 = R_{\theta} \cdot d\theta'$$

$$ds_2 = R_{\varphi} \cdot d\varphi$$



$$N_{\varphi} \cdot R_{\theta} \cdot d\theta' \cdot d\varphi + N_{\theta} \cdot R_{\varphi} \cdot d\varphi \cdot d\theta' - p \cdot R_{\theta} \cdot R_{\varphi} \cdot d\theta' \cdot d\varphi = 0$$

## Equazioni di equilibrio/4

$$2N_\varphi \cdot ds_1 \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + 2N_\theta \cdot ds_2 \cdot \sin\left(\frac{d\theta'}{2}\right) - p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0$$

$$N_\varphi \cdot ds_1 \cdot d\varphi + N_\theta \cdot ds_2 \cdot d\theta' - p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0$$

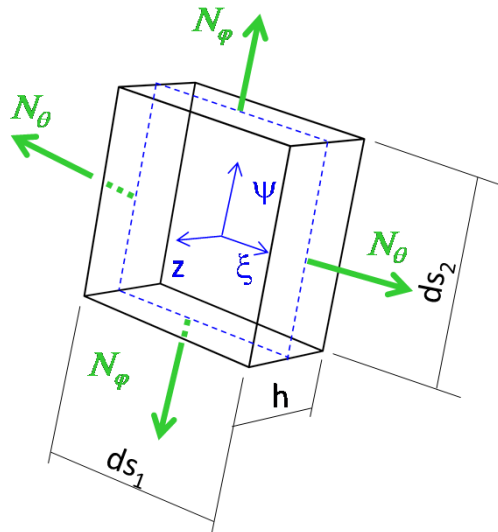
$$ds_1 = R_\theta \cdot d\theta'$$

$$ds_2 = R_\varphi \cdot d\varphi$$

Semplificando

$$N_\varphi \cdot R_\theta \cdot d\theta' \cdot d\varphi + N_\theta \cdot R_\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta' - p \cdot R_\theta \cdot R_\varphi \cdot d\theta' \cdot d\varphi = 0$$

$$N_\varphi \cdot R_\theta + N_\theta \cdot R_\varphi - p \cdot R_\theta \cdot R_\varphi = 0$$



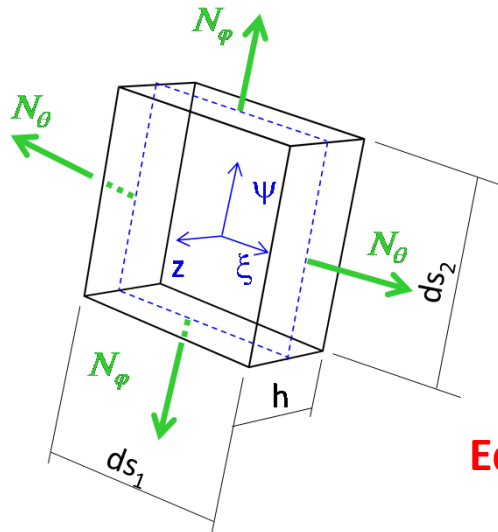
## Equazioni di equilibrio/4

$$2N_\varphi \cdot ds_1 \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + 2N_\theta \cdot ds_2 \cdot \sin\left(\frac{d\theta'}{2}\right) - p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0$$

$$N_\varphi \cdot ds_1 \cdot d\varphi + N_\theta \cdot ds_2 \cdot d\theta' - p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0$$

$$ds_1 = R_\theta \cdot d\theta'$$

$$ds_2 = R_\varphi \cdot d\varphi$$



$$N_\varphi \cdot R_\theta \cdot d\theta' \cdot d\varphi + N_\theta \cdot R_\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta' - p \cdot R_\theta \cdot R_\varphi \cdot d\theta' \cdot d\varphi = 0$$

$$N_\varphi \cdot R_\theta + N_\theta \cdot R_\varphi - p \cdot R_\theta \cdot R_\varphi = 0$$

**Equazione di Laplace**

$$\frac{N_\varphi}{R_\varphi} + \frac{N_\theta}{R_\theta} = p$$

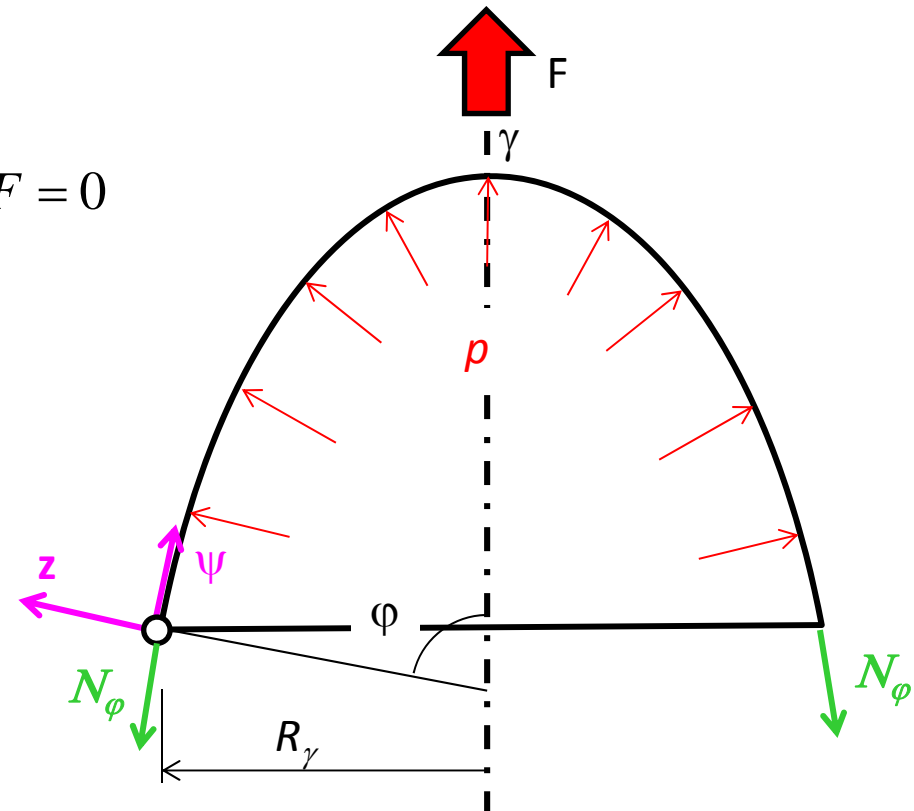


## Equazioni di equilibrio/5

Una seconda equazione di equilibrio può essere ottenuta sezionando il guscio con un piano ortogonale all'asse di simmetria  $\gamma$  e considerando l'equilibrio della porzione ottenuta in direzione  $\gamma$ . Le  $N_\theta$  evidentemente non contribuiscono, mentre le  $N_\varphi$  sono uniformemente distribuite.

$$N_\varphi \cdot \sin(\varphi) \cdot 2\pi \cdot R_\gamma - p \cdot \pi \cdot R_\gamma^2 - F = 0$$

$$N_\varphi = \frac{p \cdot R_\gamma}{2 \sin(\varphi)} + \frac{F}{2\pi R_\gamma \sin(\varphi)}$$





## Applicazioni/1

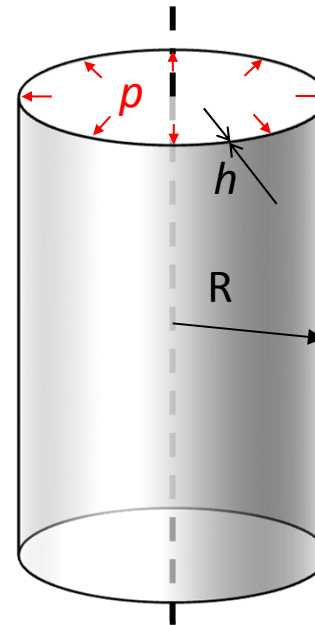
### Cilindro soggetto a pressione interna

Per un cilindro si ha:

$$R_{\theta} = R_{\gamma} = R$$

$$R_{\varphi} \rightarrow \infty$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$





## Applicazioni/1

### Cilindro soggetto a pressione interna

Per un cilindro si ha:

$$R_{\theta} = R_{\gamma} = R$$

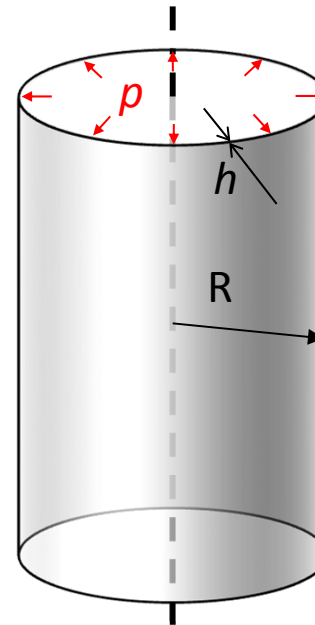
$$R_{\varphi} \rightarrow \infty$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Dalla equazione di Laplace si ricava:

$$\frac{N_{\theta}}{R_{\theta}} = p$$

$$N_{\theta} = p \cdot R$$



## Applicazioni/1

### Cilindro soggetto a pressione interna

Per un cilindro si ha:

$$R_{\theta} = R_{\gamma} = R$$

$$R_{\varphi} \rightarrow \infty$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

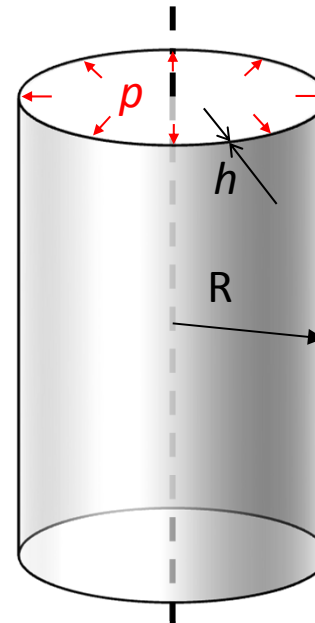
Dalla equazione di Laplace si ricava:

$$\frac{N_{\theta}}{R_{\theta}} = p$$

$$N_{\theta} = p \cdot R$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{h} = \frac{p \cdot R}{h}$$

Formula di Boyle e Mariotte



## Applicazioni/1

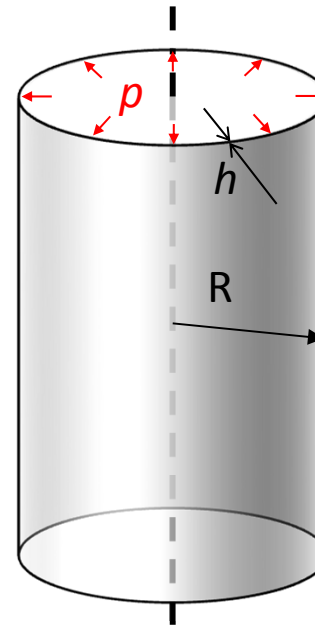
### Cilindro soggetto a pressione interna

Se il cilindro è chiuso si ha inoltre:

$$N_{\varphi} \cdot 2\pi R = p \cdot \pi R^2$$

$$N_{\varphi} = \frac{p \cdot R}{2}$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{h} = \frac{p \cdot R}{2h}$$



## Applicazioni/1

### Cilindro soggetto a pressione interna

Se il cilindro è chiuso si ha inoltre:

$$N_{\varphi} \cdot 2\pi R = p \cdot \pi R^2$$

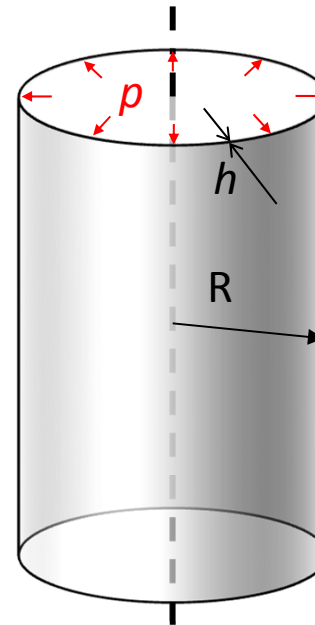
$$N_{\varphi} = \frac{p \cdot R}{2}$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{h} = \frac{p \cdot R}{2h}$$

Deformazioni

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta} - \nu\sigma_{\varphi}}{E} = \frac{p \cdot R(2 - \nu)}{2hE}$$

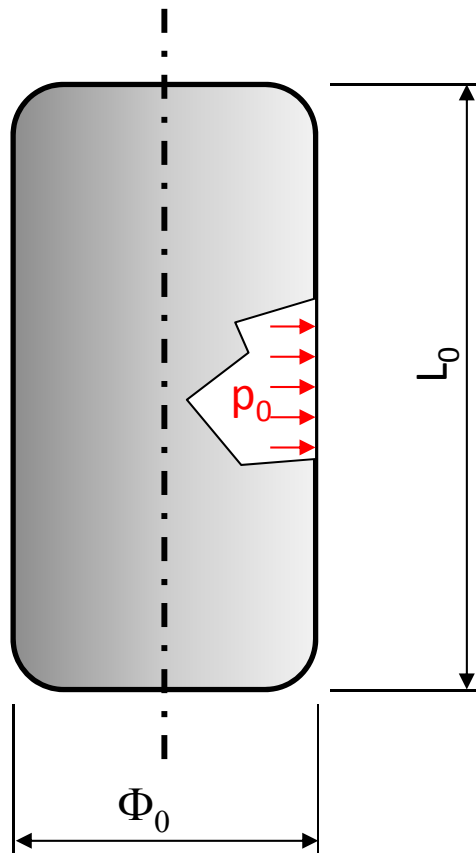
$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi} - \nu\sigma_{\theta}}{E} = \frac{p \cdot R(1 - 2\nu)}{2hE}$$



## Esercizio 3

Determinare lo spessore minimo richiesto per il mantello cilindrico del recipiente in acciaio pressurizzato internamente mostrato nella Figura.

Con il suddetto valore di spessore, determinare la variazione di diametro e di lunghezza prodotte dalla pressione.



$$\Phi_0 = 2000\text{-mm}$$

$$L_0 = 4000\text{-mm}$$

$$p_0 = 50\text{-bar}$$

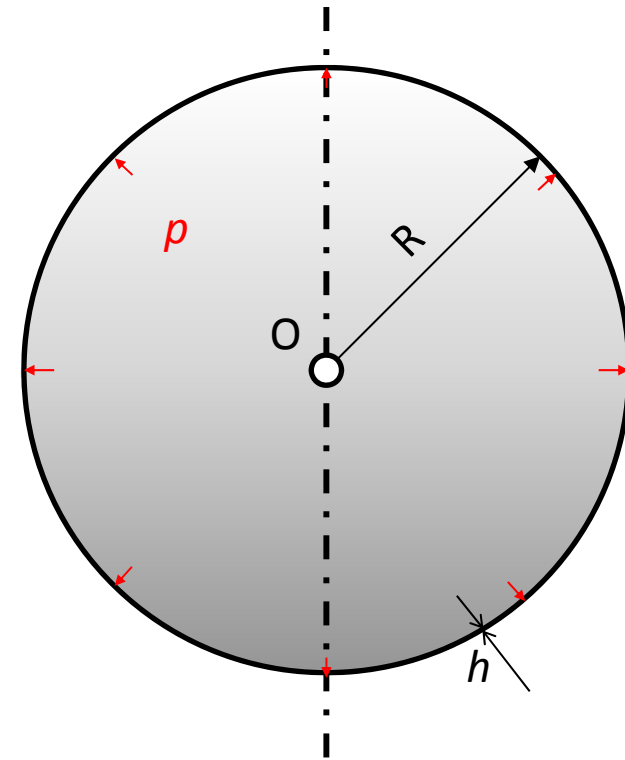
$$\sigma_{amm} = 550\text{-MPa}$$

## Applicazioni/2

### Sfera soggetta a pressione interna

Per una sfera si ha:

$$R_{\theta} = R_{\varphi} = R$$





## Applicazioni/2

### Sfera soggetta a pressione interna

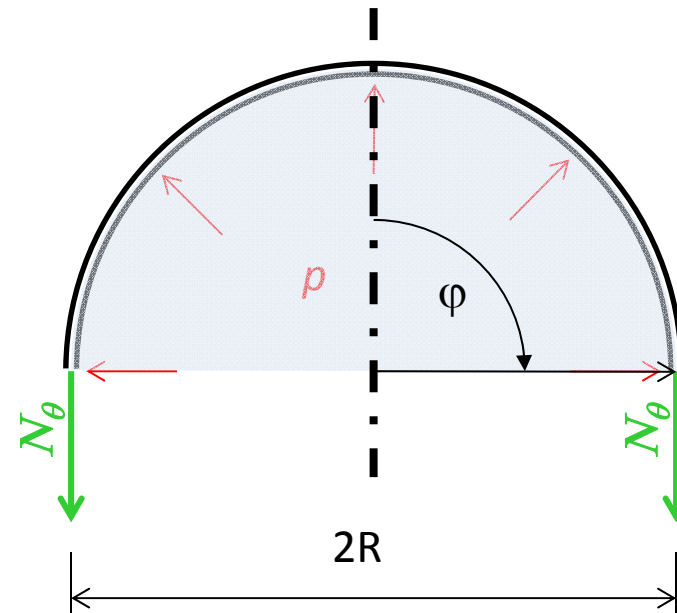
Per una sfera si ha:

$$R_{\theta} = R_{\varphi} = R$$

Considerando una sezione con un piano passante per il centro si ha:

$$N_{\varphi} \cdot 2\pi R = p \cdot \pi R^2$$

$$N_{\varphi} = \frac{p \cdot R}{2}$$



## Applicazioni/2

### Sfera soggetta a pressione interna

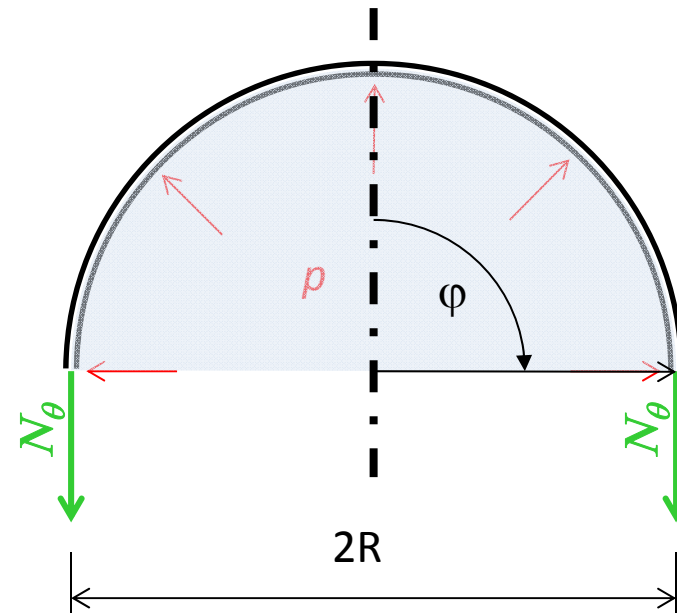
Per una sfera si ha:

$$R_{\theta} = R_{\varphi} = R$$

Considerando una sezione con un piano passante per il centro si ha:

$$N_{\varphi} \cdot 2\pi R = p \cdot \pi R^2$$

$$N_{\varphi} = \frac{p \cdot R}{2}$$



## Applicazioni/2

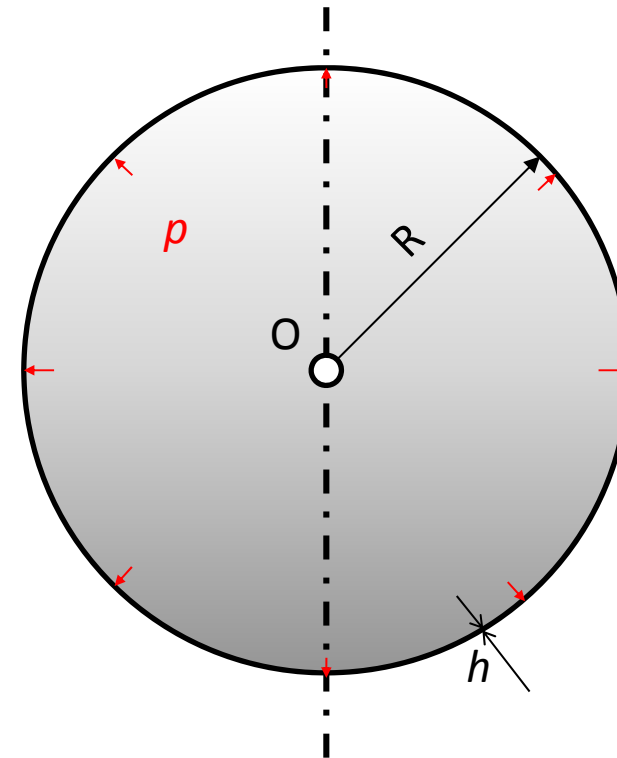
### Sfera soggetta a pressione interna

Dalla equazione di Laplace si ha inoltre:

$$\frac{N_{\theta}}{R_{\theta}} + \frac{N_{\varphi}}{R_{\varphi}} = \frac{N_{\theta}}{R} + \frac{N_{\varphi}}{R} = p$$

$$N_{\theta} = p \cdot R - \frac{p \cdot R}{2} = \frac{p \cdot R}{2}$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = \frac{p \cdot R}{2h}$$



## Applicazioni/2

### Sfera soggetta a pressione interna

Dalla equazione di Laplace si ha inoltre:

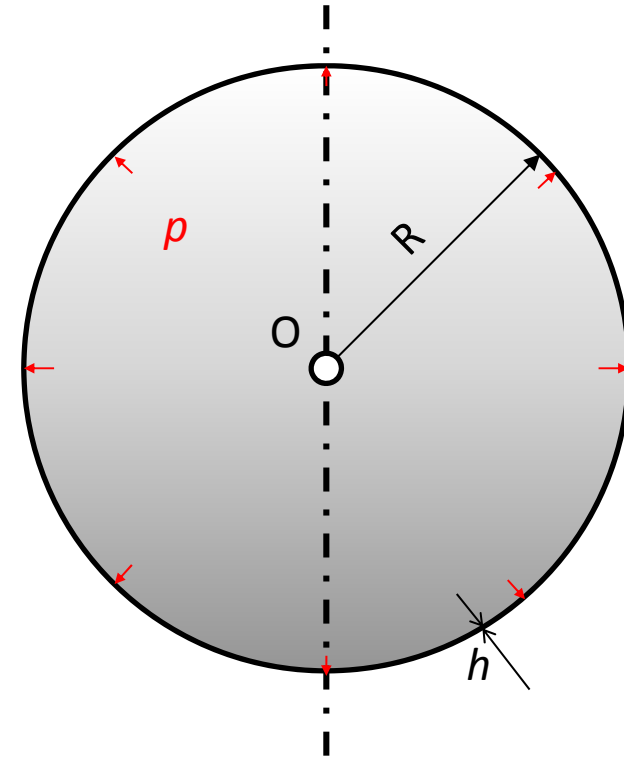
$$\frac{N_{\theta}}{R_{\theta}} + \frac{N_{\varphi}}{R_{\varphi}} = \frac{N_{\theta}}{R} + \frac{N_{\varphi}}{R} = p$$

$$N_{\theta} = p \cdot R - \frac{p \cdot R}{2} = \frac{p \cdot R}{2}$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} = \frac{p \cdot R}{2h}$$

Deformazioni

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\varphi} = \frac{\sigma_{\theta} - \nu\sigma_{\varphi}}{E} = \frac{p \cdot R(1-\nu)}{2hE}$$



## Esercizio 4

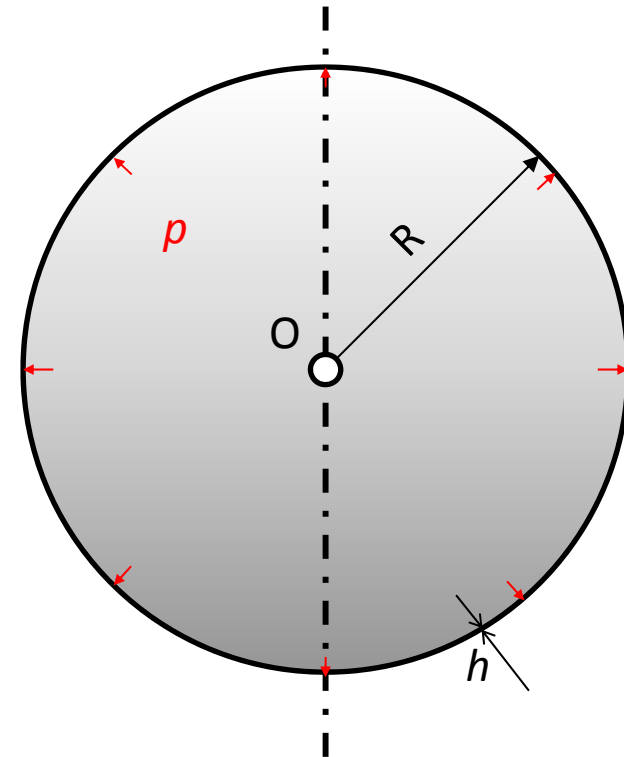
Data la sfera pressurizzata in acciaio mostrata in Figura, determinare la variazione di diametro prodotta dalla pressione.

Determinare inoltre lo spessore minimo richiesto e la variazione di diametro che si ottiene per tale valore minimo.

$$R = 1 \times 10^3 \text{ mm}$$

$$h = 9.091 \text{ mm}$$

$$p_0 = 50 \text{ bar}$$



## Applicazioni/3

### Cono soggetto a pressione interna

Per un cono si ha:

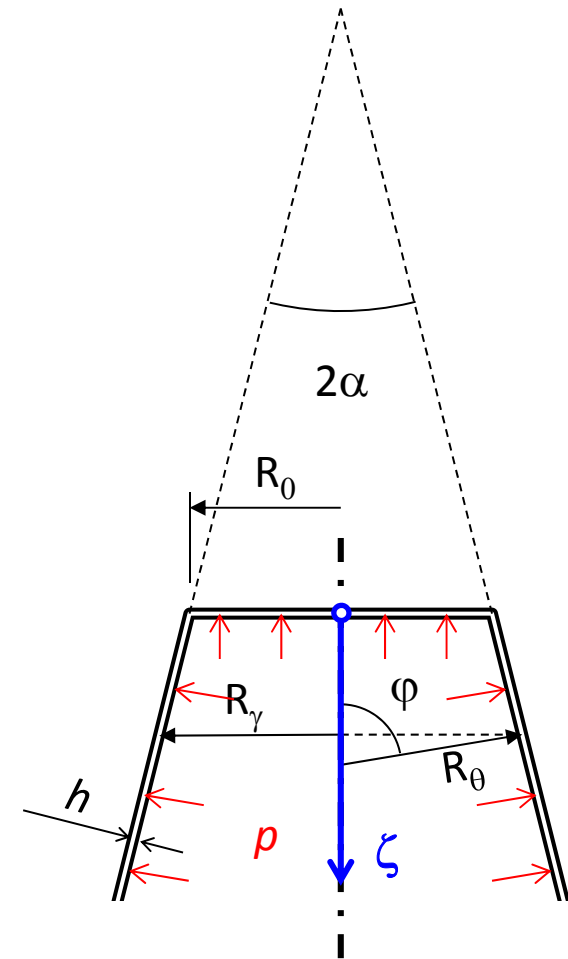
$$R_{\theta} = \frac{R_{\gamma}}{\sin(\varphi)} = \frac{R_{\gamma}}{\cos(\alpha)}$$

$$R_{\varphi} \rightarrow \infty$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Fissata la coordinata  $\zeta$  si ha:

$$R_{\gamma} = R_0 + \zeta \cdot \tan(\alpha)$$



## Applicazioni/3

### Cono soggetto a pressione interna

Per un cono si ha:

$$R_\theta = \frac{R_\gamma}{\cos(\alpha)}$$

$$R_\varphi \rightarrow \infty$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

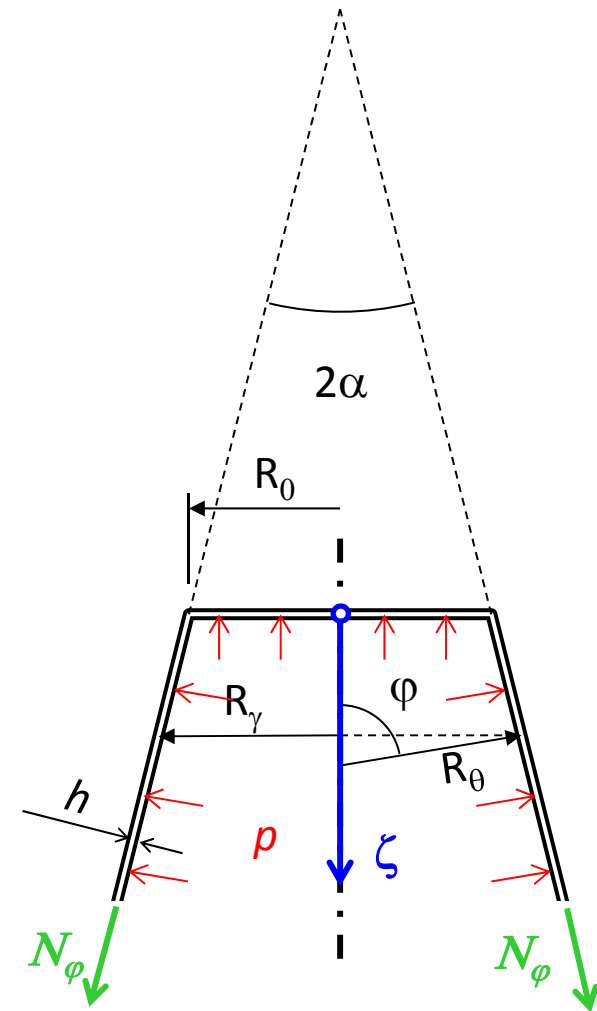
Fissata la coordinata  $\zeta$  si ha:

$$R_\gamma = R_0 + \zeta \cdot \tan(\alpha)$$

Equilibrio assiale:

$$N_\varphi \cdot \cos(\alpha) \cdot 2\pi R_\gamma = p \cdot \pi R_\gamma^2$$

$$N_\varphi = \frac{p \cdot R_\gamma}{2 \cos(\alpha)} = p \frac{R_0 + \zeta \cdot \tan(\alpha)}{2 \cos(\alpha)}$$



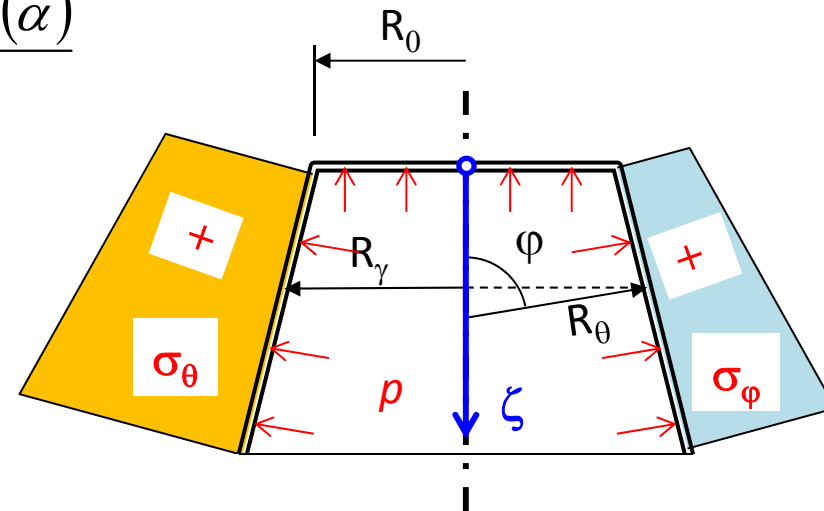
## Applicazioni/3

### Cono soggetto a pressione interna

Dalla equazione di Laplace si ha inoltre:

$$\frac{N_\theta}{R_\theta} = p$$

$$N_\theta = p \cdot R_\theta = \frac{p \cdot R_\gamma}{\cos(\alpha)} = p \frac{R_0 + \zeta \cdot \tan(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$





## Applicazioni/3

### Cono soggetto a pressione interna

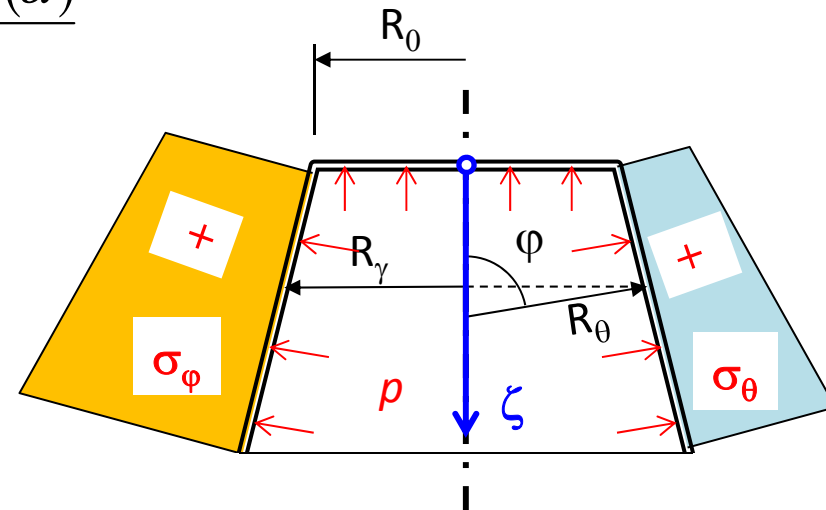
Dalla equazione di Laplace si ha inoltre:

$$\frac{N_\theta}{R_\theta} = p$$

$$N_\theta = p \cdot R_\theta = \frac{p \cdot R_\gamma}{\cos(\alpha)} = p \frac{R_0 + \zeta \cdot \tan(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} = \frac{p}{h} \frac{R_0 + \zeta \cdot \tan(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

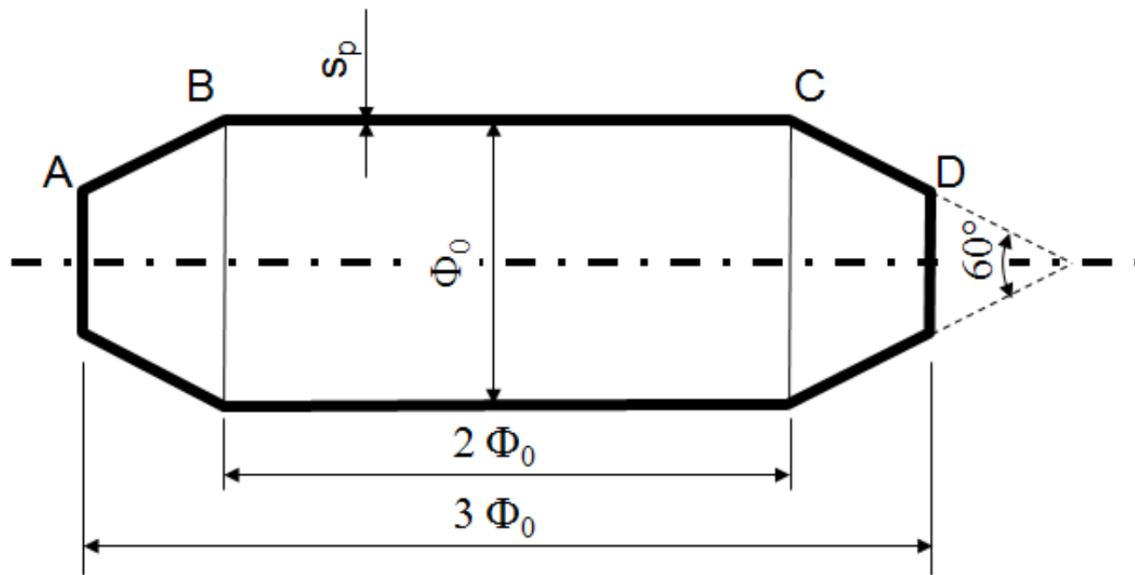
$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{h} = \frac{p}{h} \frac{R_0 + \zeta \cdot \tan(\alpha)}{2 \cos(\alpha)}$$



## Esercizio 5

Dato il recipiente pressurizzato in acciaio, cilindrico con estremità tronco-coniche, mostrato nella Figura, determinare lo spessore minimo richiesto per la porzione tronco conica.

Con tale valore di spessore, determinare la variazione di diametro del cono nel punto di tensione ideale massima.



$$\Phi_0 = 2 \times 10^3 \text{ mm}$$

$$p_0 = 50 \text{ bar}$$

$$\sigma_{\text{amm}} = 550 \text{ MPa}$$

$$\alpha := \frac{\pi}{3}$$

## Applicazioni/4

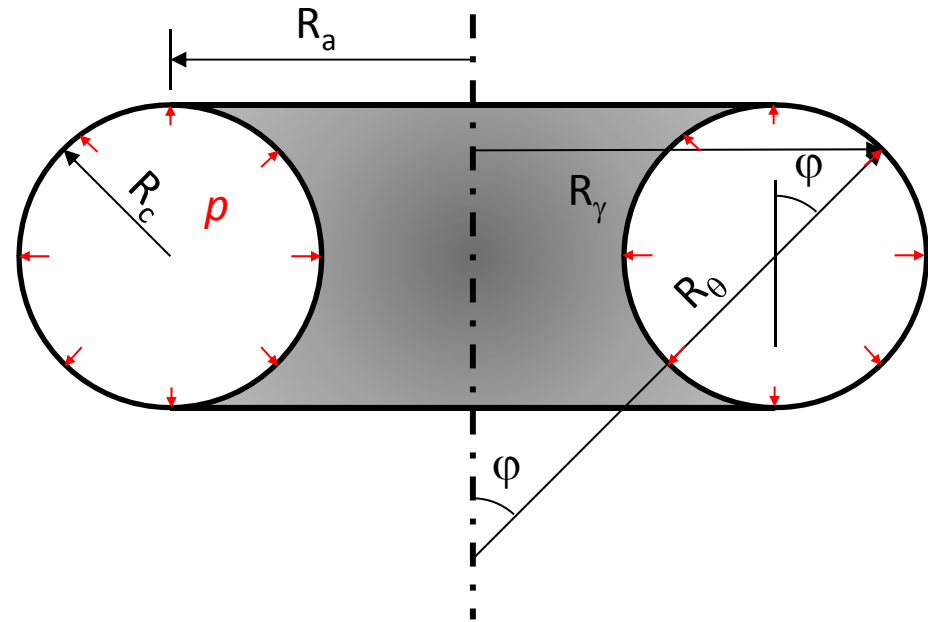
### Toro soggetto a pressione interna

Per un toro si ha:

$$R_{\varphi} = R_c$$

$$R_g \cdot \sin(\varphi) = R_{\gamma} = R_a + R_c \cdot \sin(\varphi)$$

$$R_g = \frac{R_a + R_c \cdot \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)}$$



## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

Per un toro si ha:

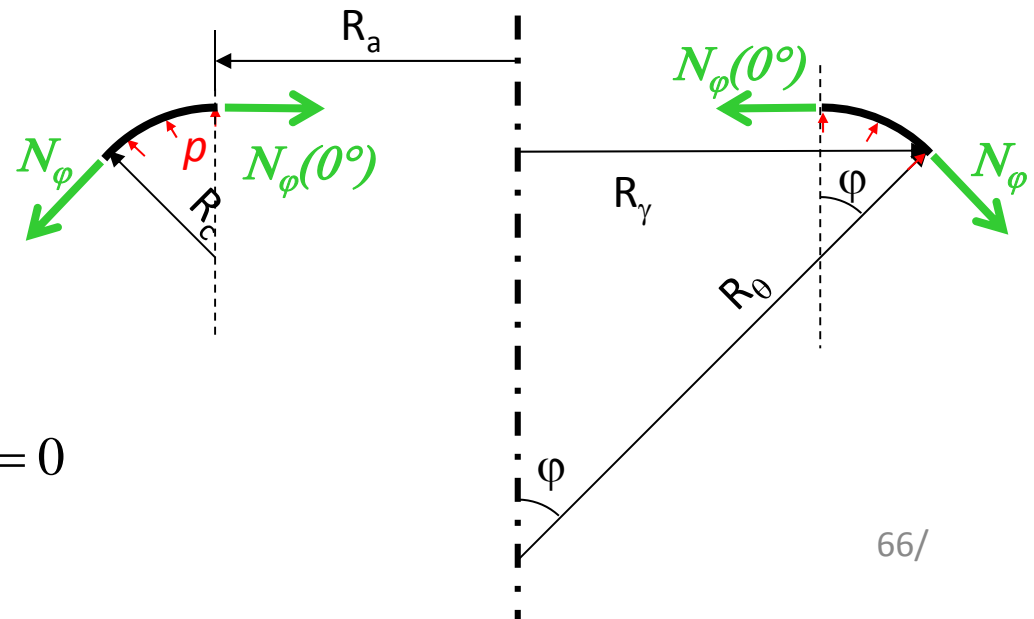
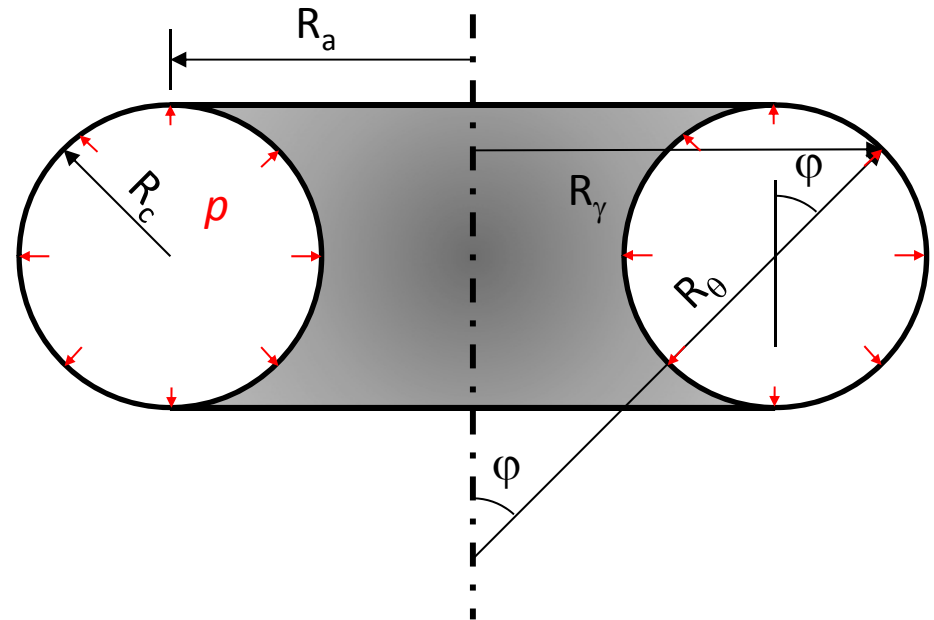
$$R_\varphi = R_c$$

$$R_g \cdot \sin(\varphi) = R_\gamma = R_a + R_c \cdot \sin(\varphi)$$

$$R_g = \frac{R_a + R_c \cdot \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

Si consideri adesso una porzione del toro compresa tra un cilindro di raggio  $R_a$  ed un cono di semi-apertura  $\varphi$  passante per il centro del cerchio. Imponendo l'equilibrio in direzione assiale si ha:

$$N_\varphi \cdot \sin(\varphi) \cdot 2\pi R_\gamma - p \cdot \pi(R_\gamma^2 - R_a^2) = 0$$





## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

$$N_{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \cdot 2\pi R_{\gamma} - p \cdot \pi(R_{\gamma}^2 - R_a^2) = 0$$

$$N_{\varphi} = \frac{p(R_{\gamma}^2 - R_a^2)}{2R_{\gamma} \cdot \sin(\varphi)}$$



## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

$$N_{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \cdot 2\pi R_{\gamma} - p \cdot \pi (R_{\gamma}^2 - R_a^2) = 0$$

$$N_{\varphi} = \frac{p(R_{\gamma}^2 - R_a^2)}{2R_{\gamma} \cdot \sin(\varphi)} = \frac{p((R_a + R_c \sin(\varphi))^2 - R_a^2)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi)) \cdot \sin(\varphi)} =$$

Sostituendo

$$R_{\gamma} = R_a + R_c \sin(\varphi)$$



## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

$$N_{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \cdot 2\pi R_{\gamma} - p \cdot \pi(R_{\gamma}^2 - R_a^2) = 0$$

$$N_{\varphi} = \frac{p(R_{\gamma}^2 - R_a^2)}{2R_{\gamma} \cdot \sin(\varphi)} = \frac{p((R_a + R_c \sin(\varphi))^2 - R_a^2)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi)) \cdot \sin(\varphi)} =$$

$$= \frac{p(R_a^2 + R_c^2 \sin^2(\varphi) + 2R_a R_c \sin(\varphi) - R_a^2)}{2(R_a \sin(\varphi) + R_c \sin^2(\varphi))} =$$

Svolgendo i calcoli



## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

$$N_\varphi \cdot \sin(\varphi) \cdot 2\pi R_\gamma - p \cdot \pi(R_\gamma^2 - R_a^2) = 0$$

$$N_\varphi = \frac{p(R_\gamma^2 - R_a^2)}{2R_\gamma \cdot \sin(\varphi)} = \frac{p((R_a + R_c \sin(\varphi))^2 - R_a^2)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi)) \cdot \sin(\varphi)} =$$

$$= \frac{p(R_a^2 + R_c^2 \sin^2(\varphi) + 2R_a R_c \sin(\varphi) - R_a^2)}{2(R_a \sin(\varphi) + R_c \sin^2(\varphi))} =$$

$$= \frac{pR_c(R_c \sin^2(\varphi) + 2R_a \sin(\varphi))}{2(R_a \sin(\varphi) + R_c \sin^2(\varphi))} =$$

Semplificando





## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

$$N_\varphi \cdot \sin(\varphi) \cdot 2\pi R_\gamma - p \cdot \pi(R_\gamma^2 - R_a^2) = 0$$

$$N_\varphi = \frac{p(R_\gamma^2 - R_a^2)}{2R_\gamma \cdot \sin(\varphi)} = \frac{p((R_a + R_c \sin(\varphi))^2 - R_a^2)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi)) \cdot \sin(\varphi)} =$$

$$= \frac{p(R_a^2 + R_c^2 \sin^2(\varphi) + 2R_a R_c \sin(\varphi) - R_a^2)}{2(R_a \sin(\varphi) + R_c \sin^2(\varphi))} =$$

$$= \frac{pR_c(R_c \sin^2(\varphi) + 2R_a \sin(\varphi))}{2(R_a \sin(\varphi) + R_c \sin^2(\varphi))} =$$

$$= \frac{pR_c(R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi))}$$

Dividendo per  $\sin(\varphi)$



## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

Dalla equazione di Laplace:

$$N_{\theta} = pR_{\theta} - N_{\varphi} \frac{R_{\theta}}{R_{\varphi}}$$



## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

Dalla equazione di Laplace:

$$N_{\theta} = pR_{\theta} - N_{\varphi} \frac{R_{\theta}}{R_{\varphi}} =$$

Sostituendo

$$N_{\varphi} = \frac{pR_c(R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi))}$$

$$R_{\theta} = \frac{R_a - R_c \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

$$= p \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{pR_c(R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi))} \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{R_c \sin(\varphi)} =$$



## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

Dalla equazione di Laplace:

$$\begin{aligned} N_{\theta} &= pR_{\theta} - N_{\varphi} \frac{R_{\theta}}{R_{\varphi}} = \\ &= p \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{pR_c (R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi))} \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{R_c \sin(\varphi)} = \\ &= p \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{p(R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2 \sin(\varphi)} \end{aligned}$$

Semplificando



## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

Dalla equazione di Laplace:

$$\begin{aligned} N_{\theta} &= pR_{\theta} - N_{\varphi} \frac{R_{\theta}}{R_{\varphi}} = \\ &= p \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{pR_c (R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi))} \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{R_c \sin(\varphi)} = \\ &= p \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{p(R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2 \sin(\varphi)} = \\ &= \frac{p}{\sin(\varphi)} \left[ R_a + R_c \sin(\varphi) - R_a - \frac{R_c \sin(\varphi)}{2} \right] \end{aligned}$$

Raccogliendo



## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

Dalla equazione di Laplace:

$$\begin{aligned} N_{\theta} &= pR_{\theta} - N_{\varphi} \frac{R_{\theta}}{R_{\varphi}} = \\ &= p \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{pR_c(R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi))} \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{R_c \sin(\varphi)} = \\ &= p \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{p(R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2 \sin(\varphi)} = \\ &= \frac{p}{\sin(\varphi)} \left[ R_a + R_c \sin(\varphi) - R_a - \frac{R_c \sin(\varphi)}{2} \right] = \\ &= \frac{p}{\sin(\varphi)} \left[ \frac{R_c \sin(\varphi)}{2} \right] \end{aligned}$$

Semplificando



## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

$$\begin{aligned} N_{\theta} &= pR_{\theta} - N_{\varphi} \frac{R_{\theta}}{R_{\varphi}} = \\ &= p \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{pR_c (R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2(R_a + R_c \sin(\varphi))} \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{R_c \sin(\varphi)} = \\ &= p \frac{R_a + R_c \sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \frac{p(R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2 \sin(\varphi)} = \\ &= \frac{p}{\sin(\varphi)} \left[ R_a + R_c \sin(\varphi) - R_a - \frac{R_c \sin(\varphi)}{2} \right] = \\ &= \frac{p}{\sin(\varphi)} \left[ \frac{R_c \sin(\varphi)}{2} \right] \end{aligned}$$

Semplificando

$$N_{\theta} = \frac{p \cdot R_c}{2}$$

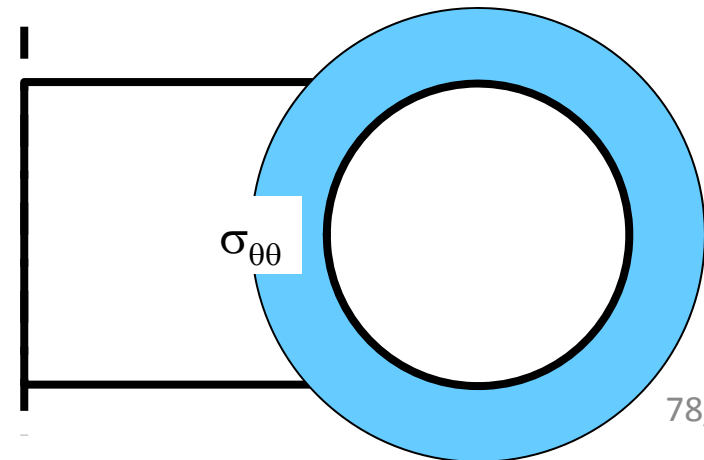
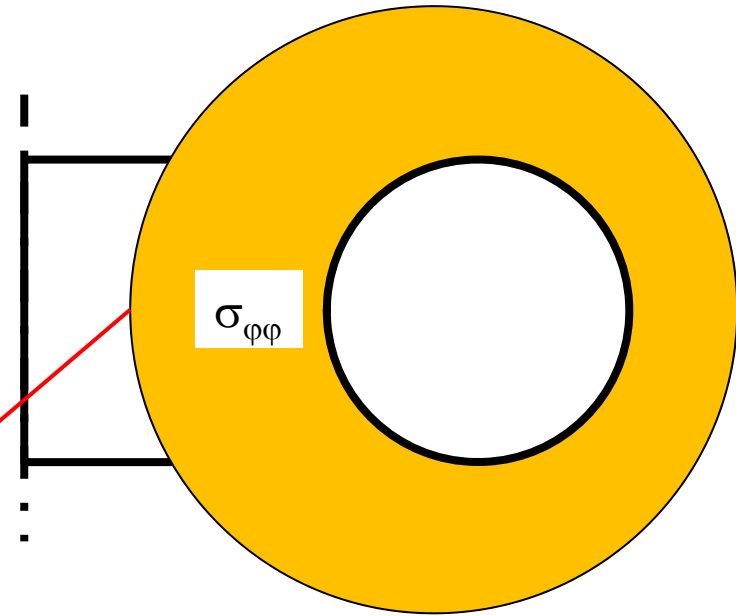
## Applicazioni/4

### Toro soggetto a pressione interna

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_c(R_c \sin(\varphi) + 2R_a)}{2h(R_a + R_c \sin(\varphi))}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p \cdot R_c}{2h}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi_{\max}} = \frac{pR_c(2R_a - R_c)}{2h(R_a - R_c)}$$





## Applicazioni/4

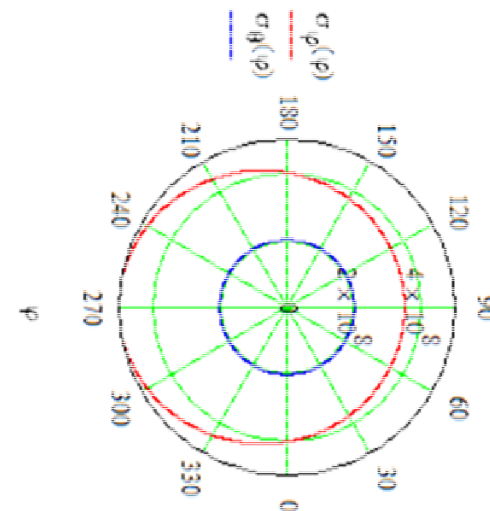
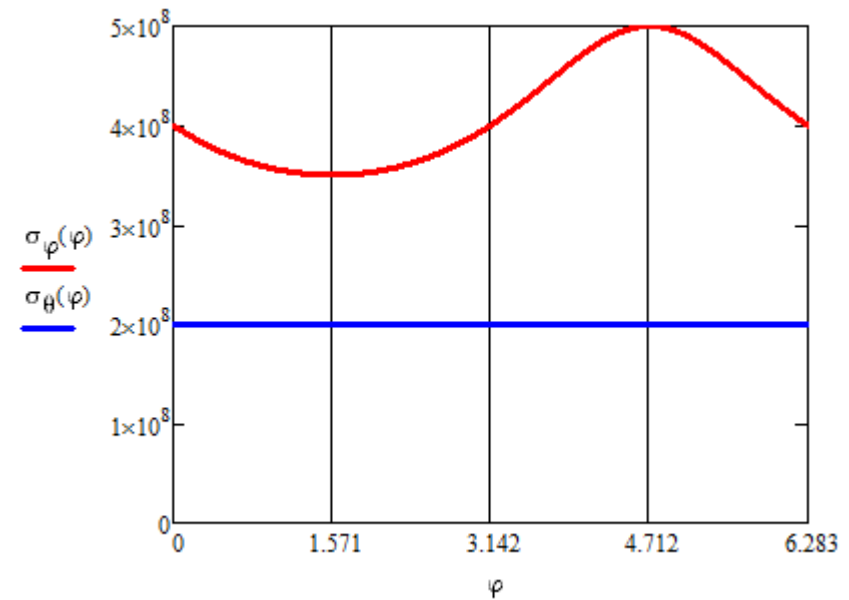
### Toro soggetto a pressione interna

$$p_0 = 20 \text{ bar}$$

$$R_a = 3 \text{ m}$$

$$R_c = 1 \text{ m}$$

$$h = 5 \text{ mm}$$



## Esercizio 6

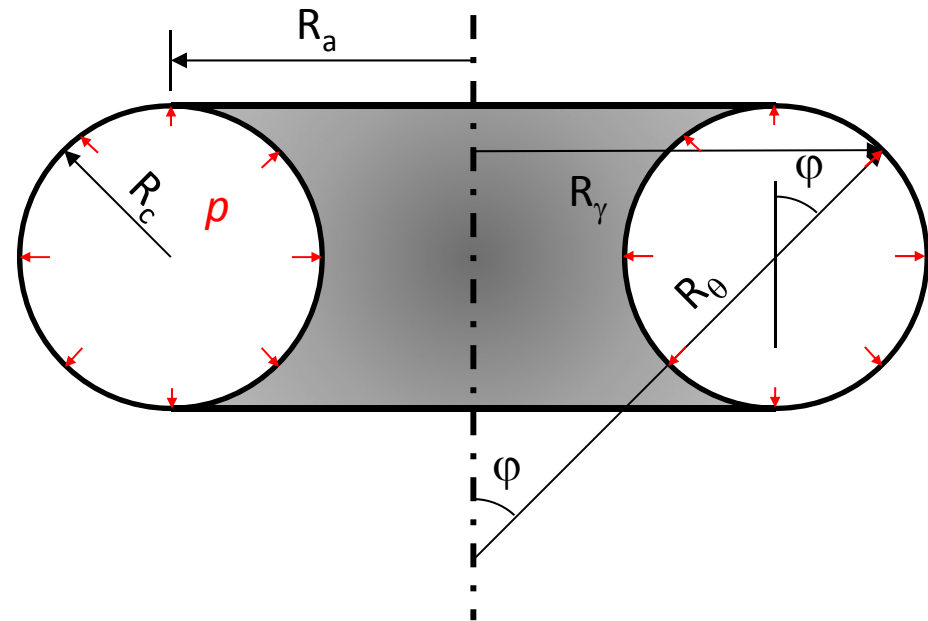
Data la camera d'aria in gomma naturale mostrata in Figura, utilizzabile come slittino, determinare la massima pressione di gonfiaggio ammissibile.

$$R_c = 425\text{-mm}$$

$$R_a = 175\text{-mm}$$

$$\sigma_{\text{max}} = 20\text{-MPa}$$

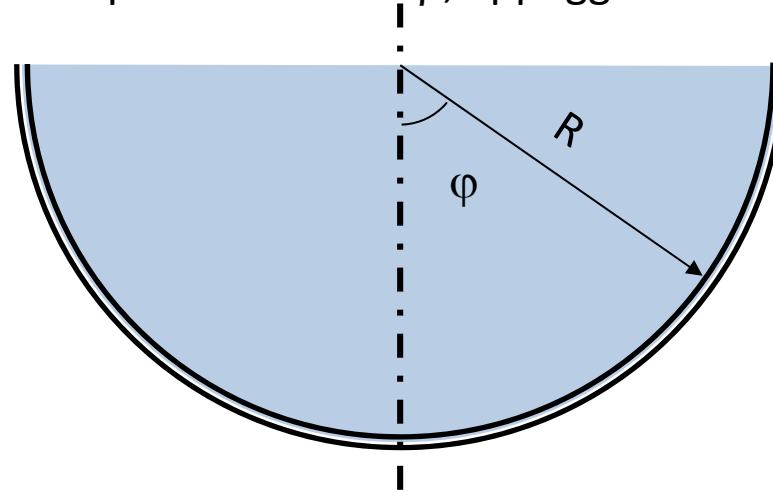
$$h = 2\text{-mm}$$



## Applicazioni/5

### Semisfera riempita di liquido

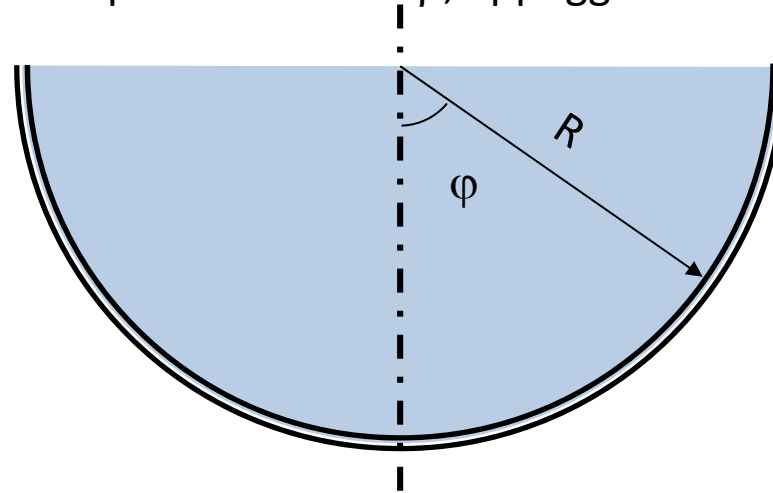
Semisfera riempita di un liquido di densità  $\rho$ , appoggiata al bordo superiore:



## Applicazioni/5

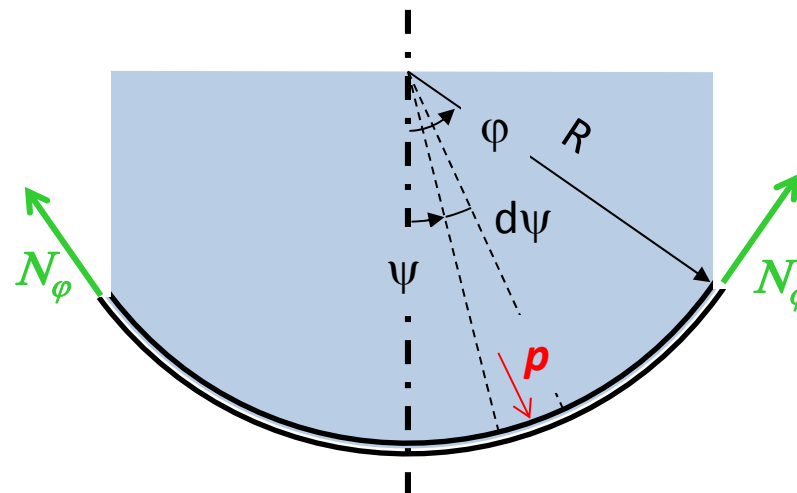
### Semisfera riempita di liquido

Semisfera riempita di un liquido di densità  $\rho$ , appoggiata al bordo superiore:



Sezione con cono di vertice nel centro della sfera e semiapertura  $\varphi$ .  
 Coordinata meridiana  $\Psi$ , valore di pressione:

$$p = \rho g R \cos(\psi)$$

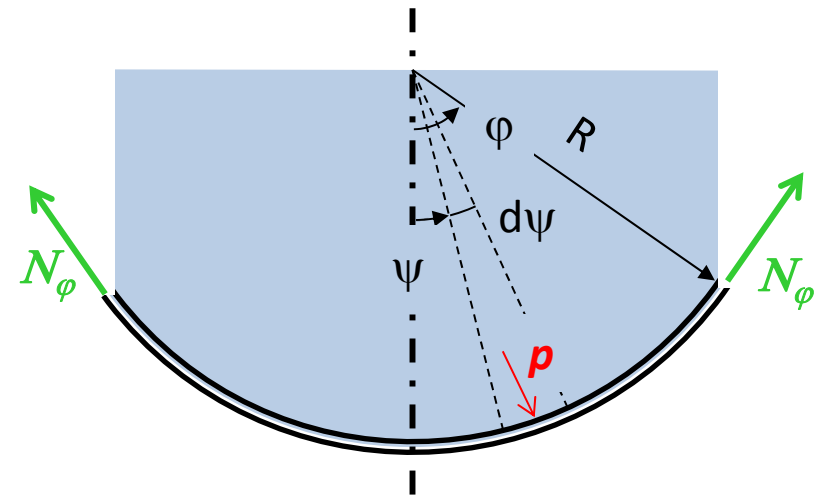


## Applicazioni/5

### Semisfera riempita di liquido

Imponendo l'equilibrio in direzione assiale:

$$N_{\varphi} 2\pi R \sin(\varphi) \sin(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho g R \cos(\psi) 2\pi R \sin(\psi) R \cos(\psi) d\psi$$



## Applicazioni/5

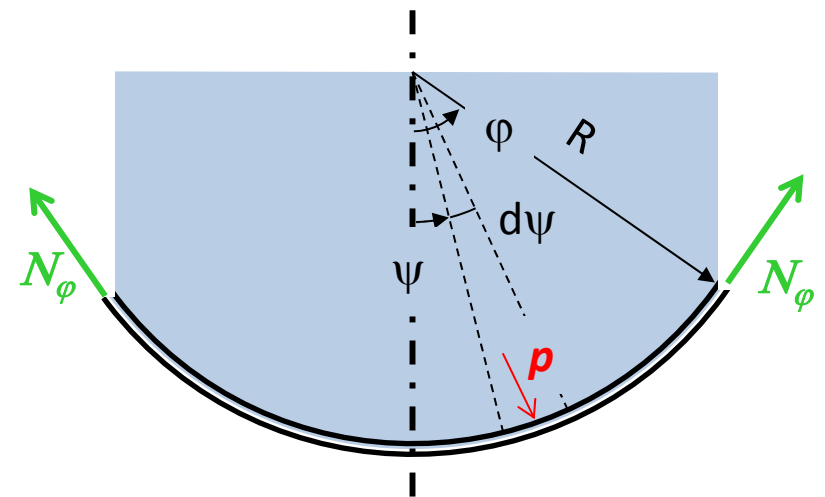
### Semisfera riempita di liquido

Imponendo l'equilibrio in direzione assiale:

$$N_{\varphi} 2\pi R \sin(\varphi) \sin(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho g R \cos(\psi) 2\pi R \sin(\psi) R \cos(\psi) d\psi =$$

$$= 2\pi \rho g R^3 \int_0^{\varphi} \cos^2(\psi) \sin(\psi) d\psi$$

Portando fuori integrale

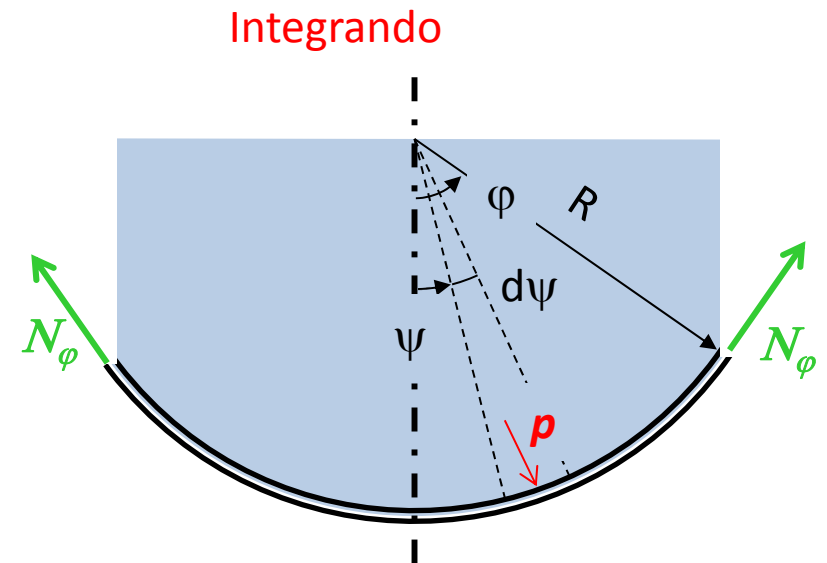


## Applicazioni/5

### Semisfera riempita di liquido

Imponendo l'equilibrio in direzione assiale:

$$\begin{aligned}
 N_\varphi 2\pi R \sin(\varphi) \sin(\varphi) &= \int_0^\varphi \rho g R \cos(\psi) 2\pi R \sin(\psi) R \cos(\psi) d\psi = \\
 &= 2\pi \rho g R^3 \int_0^\varphi \cos^2(\psi) \sin(\psi) d\psi = 2\pi \rho g R^3 \left| -\frac{\cos^3(\psi)}{3} \right|_0^\varphi
 \end{aligned}$$

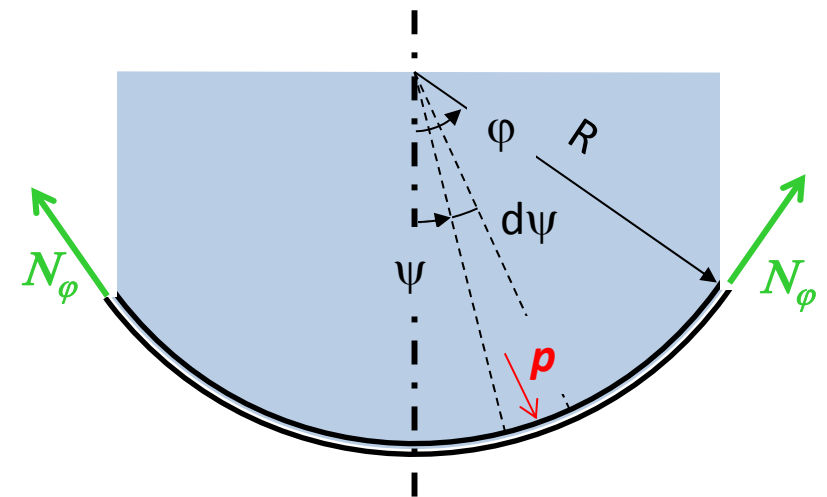


## Applicazioni/5

### Semisfera riempita di liquido

Imponendo l'equilibrio in direzione assiale:

$$\begin{aligned}
 N_\varphi 2\pi R \sin(\varphi) \sin(\varphi) &= \int_0^\varphi \rho g R \cos(\psi) 2\pi R \sin(\psi) R \cos(\psi) d\psi = \\
 &= 2\pi \rho g R^3 \int_0^\varphi \cos^2(\psi) \sin(\psi) d\psi = 2\pi \rho g R^3 \left[ -\frac{\cos^3(\psi)}{3} \right]_0^\varphi = \\
 &= \frac{2\pi \rho g R^3}{3} (1 - \cos^3(\varphi))
 \end{aligned}$$





## Applicazioni/5

### Semisfera riempita di liquido

Imponendo l'equilibrio in direzione assiale:

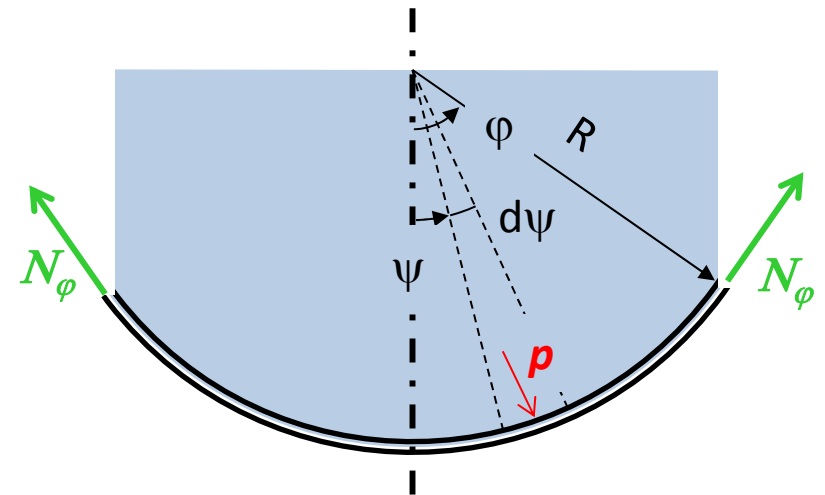
$$N_{\varphi} 2\pi R \sin(\varphi) \sin(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho g R \cos(\psi) 2\pi R \sin(\psi) R \cos(\psi) d\psi =$$

$$= 2\pi \rho g R^3 \int_0^{\varphi} \cos^2(\psi) \sin(\psi) d\psi = 2\pi \rho g R^3 \left| -\frac{\cos^3(\psi)}{3} \right|_0^{\varphi} =$$

$$= \frac{2\pi \rho g R^3}{3} (1 - \cos^3(\varphi))$$

Semplificando

$$N_{\varphi} = \frac{\rho g R^2}{3} \frac{(1 - \cos^3(\varphi))}{\sin^2(\varphi)}$$

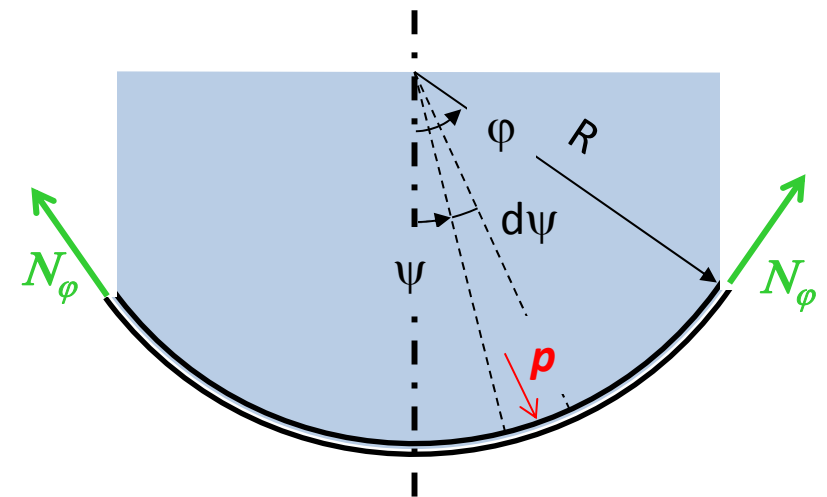


## Applicazioni/5

### Semisfera riempita di liquido

Impiegando l'equazione di Laplace:

$$N_{\theta} = pR - N_{\varphi}$$



## Applicazioni/5

### Semisfera riempita di liquido

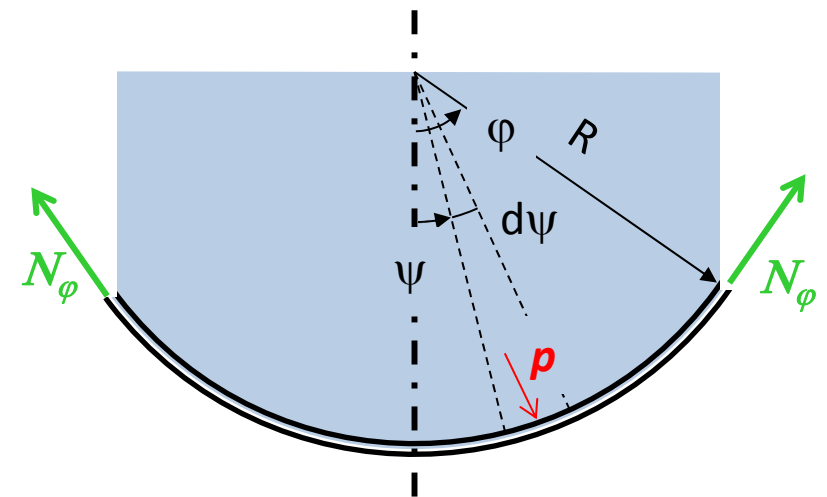
Impiegando l'equazione di Laplace:

Sostituendo

$$N_{\varphi} = \frac{\rho g R^2 (1 - \cos^3(\varphi))}{3 \sin^2(\varphi)}$$

$$N_g = pR - N_{\varphi} = \rho g R \cos(\varphi) R - \frac{\rho g R^2 (1 - \cos^3(\varphi))}{3 \sin^2(\varphi)}$$

$$p = \rho g R \cos(\psi)$$



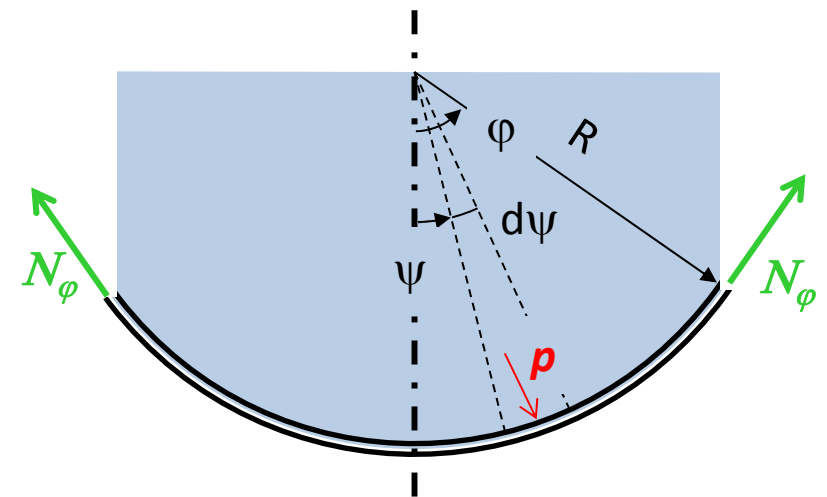
## Applicazioni/5

### Semisfera riempita di liquido

Impiegando l'equazione di Laplace:

$$N_g = pR - N_\varphi = \rho g R \cos(\varphi) R - \frac{\rho g R^2 (1 - \cos^3(\varphi))}{3 \sin^2(\varphi)} =$$

$$= \frac{\rho g R^2}{3} \left[ 3 \cos(\varphi) - \frac{(1 - \cos^3(\varphi))}{\sin^2(\varphi)} \right]$$





## Applicazioni/5

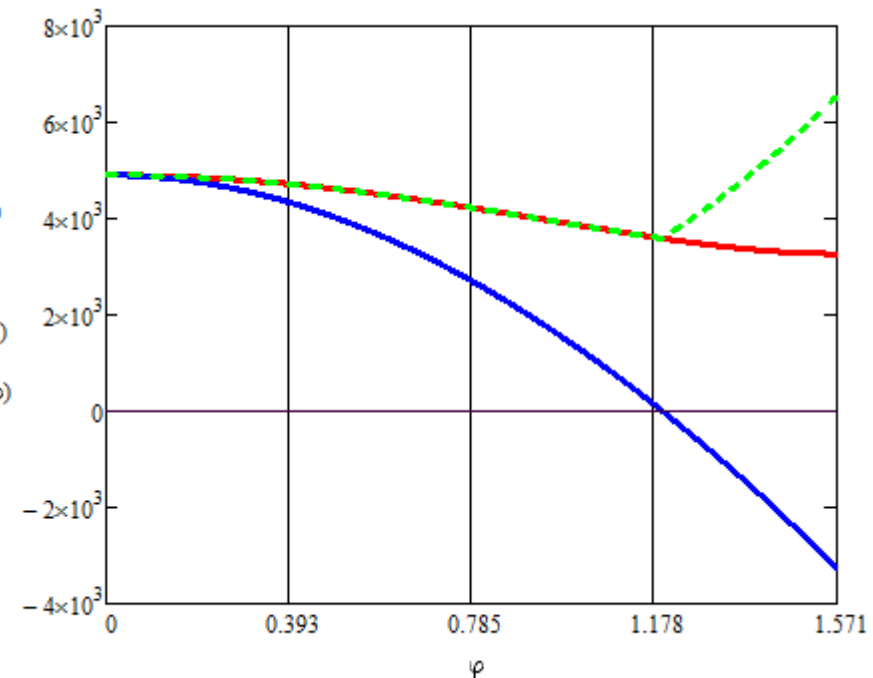
### Semisfera riempita di liquido

Andamento tensioni:

$$\rho = 1 \frac{kg}{dm^3}$$

$$R = 1m$$

$$h = 5mm$$



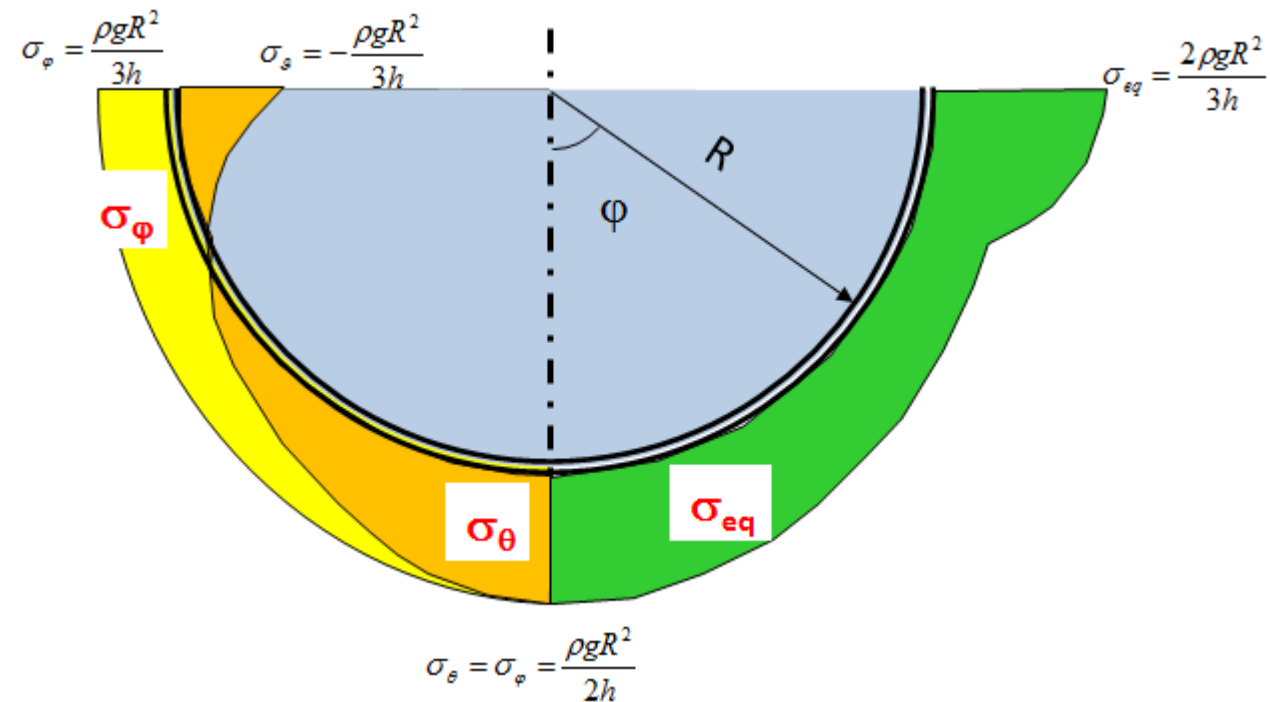
$$\sigma_\theta = \frac{\rho g R^2}{3h} \left[ 3 \cos(\varphi) - \frac{(1 - \cos^3(\varphi))}{\sin^2(\varphi)} \right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\rho g R^2}{3h} \frac{(1 - \cos^3(\varphi))}{\sin^2(\varphi)}$$

## Applicazioni

### Semisfera riempita di liquido

Andamento tensioni:



## Applicazioni/6

### Fondo semiellittico in pressione

Dato un punto di coordinate:

$$x_0 = a \cdot \cos(\alpha)$$

$$y_0 = b \cdot \sin(\alpha)$$

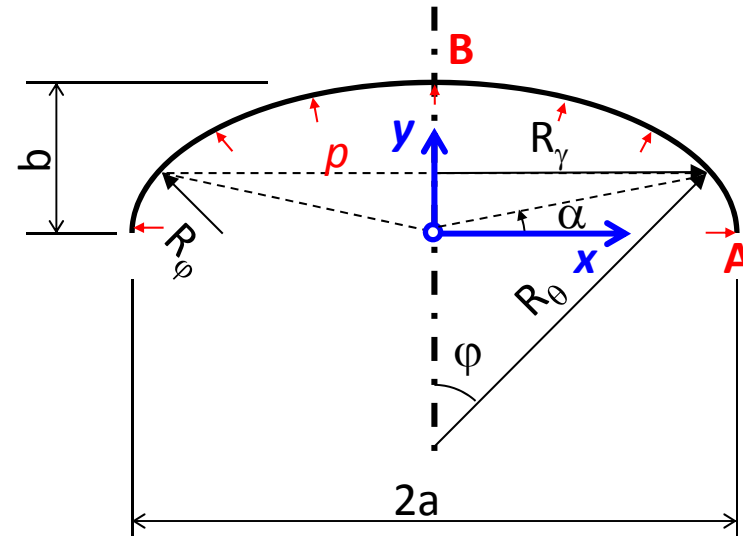
si ha:

$$R_\varphi = \frac{[a^2 \sin^2(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha)]^{\frac{3}{2}}}{a \cdot b}$$

$$R_\theta = a \sqrt{\cos^2(\alpha) + \frac{a^2}{b^2} \sin^2(\alpha)}$$

$$\varphi(\alpha) = \arccos \left[ \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \frac{a^2}{b^2} \sin^2(\alpha)}} \right]$$

$$R_\gamma = R_\theta \sin(\varphi)$$

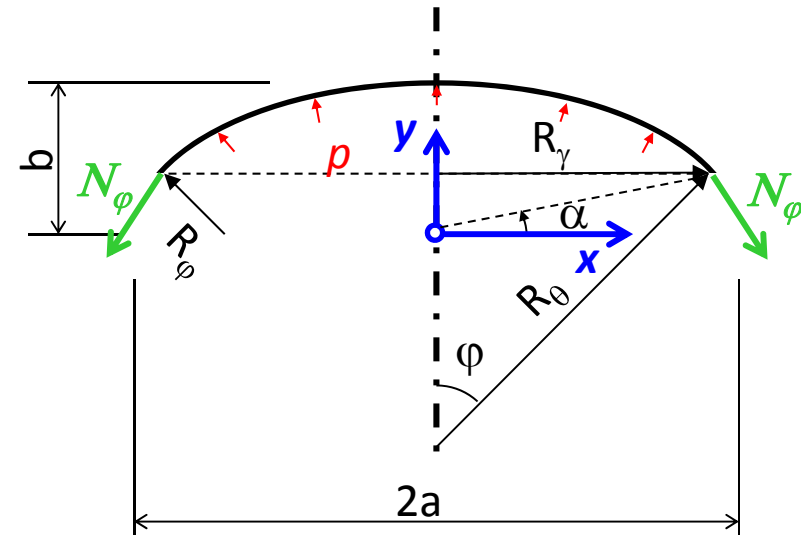


## Applicazioni/6

### Fondo semiellittico in pressione

Sezione lungo un parallelo.

Equilibrio assiale:



$$N_{\varphi} 2\pi R_{\gamma} \sin(\varphi) = p \pi R_{\gamma}^2$$

$$N_{\varphi} = \frac{pR_{\gamma}}{2 \sin(\varphi)} = \frac{px_0}{2 \sin(\varphi)} = \frac{pa \cos(\alpha)}{2 \sin\left(\arctan\left(\frac{b}{a \cdot \tan(\alpha)}\right)\right)}$$



## Applicazioni/6

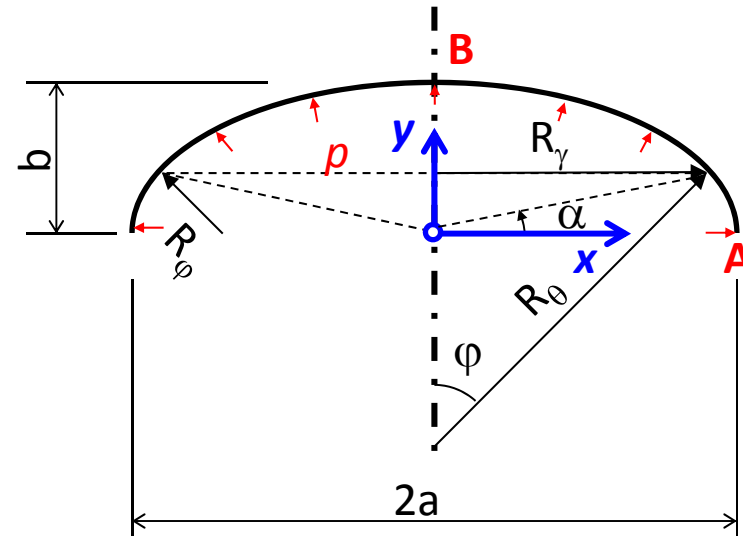
### Fondo semiellittico in pressione

Equazione di Laplace:

$$N_{\varphi} = R_{\varphi} \left[ p - \frac{N_{\theta}}{R_{\theta}} \right]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{h}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{N_{\theta}}{h}$$



## Applicazioni/6

### Fondo semiellittico in pressione

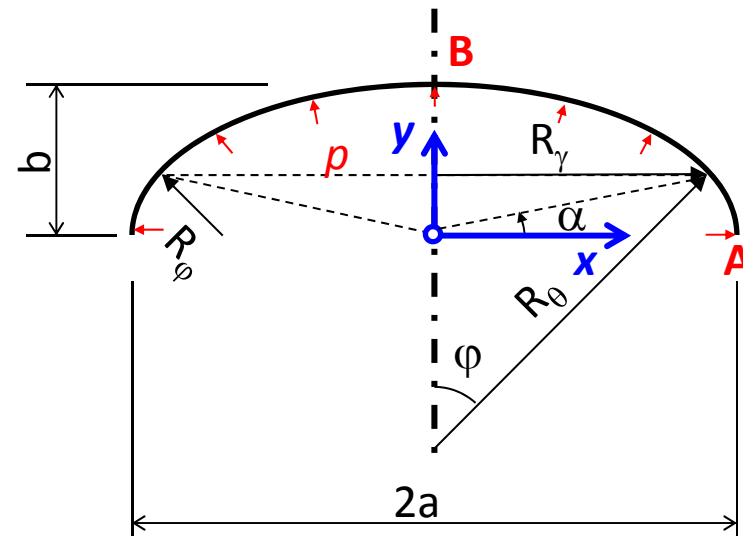
In particolare si ha :

$$A(\alpha = 0^\circ) \begin{cases} R_\varphi = \frac{b^2}{a} \\ R_\theta = a \end{cases}$$

$$B(\alpha = 90^\circ) \begin{cases} R_\varphi = R_\theta = \frac{a^2}{b} \end{cases}$$

$$A(\alpha = 0^\circ) \begin{cases} N_\varphi = \frac{p_0 a}{2} \rightarrow \sigma_\varphi = \frac{p_0 a}{2h} \\ N_\theta = \frac{p_0 a}{2} \left( 2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \rightarrow \sigma_\theta = \frac{p_0 a}{2h} \left( 2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \end{cases}$$

$$B(\alpha = 90^\circ) \begin{cases} N_\varphi = N_\theta = \frac{p_0 a^2}{2b} \rightarrow \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{p_0 a^2}{2bh} \end{cases}$$



## Applicazioni/6

### Fondo semiellittico in pressione

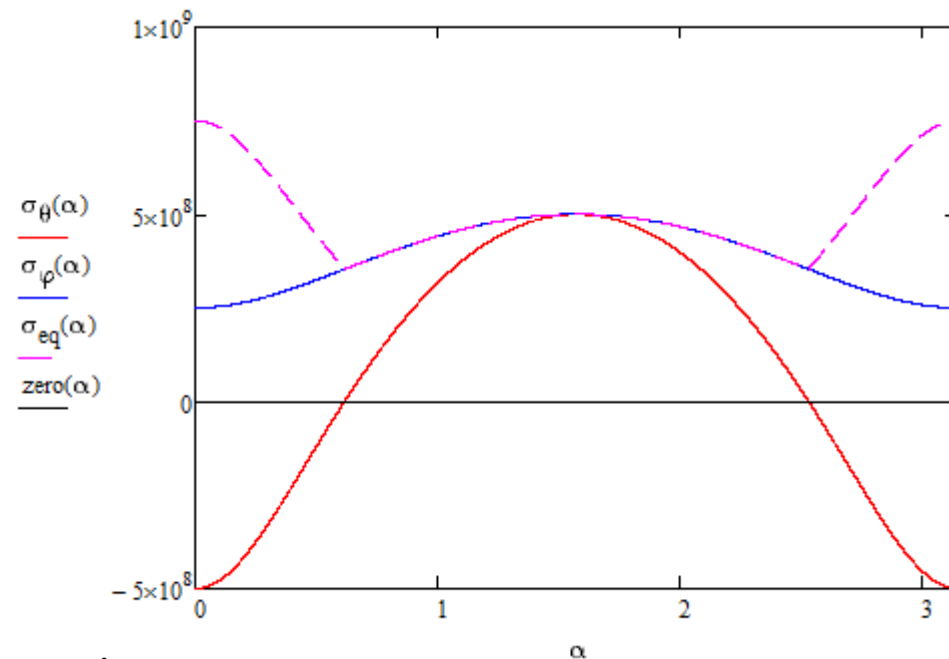
Andamento tensioni:

$$p_0 = 50 \text{ bar}$$

$$a = 2 \text{ m}$$

$$b = 1 \text{ m}$$

$$h = 20 \text{ mm}$$



Oss.ni:

- per  $a/b > \sqrt{2}$  la  $\sigma_\theta$  diviene negativa nel punto A
- le tensioni assumono valori estremi nei punti A e B, per cui, tenendo anche conto del segno della  $\sigma_\theta$  la tensione ideale massima, in funzione del rapporto tra i semiassi, è data da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{eq\_max} = \frac{p_0 a^2}{2hb} \quad 1 \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \sigma_\theta = \frac{p_0 a}{2h} \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \quad \frac{a}{b} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

## Applicazioni/6

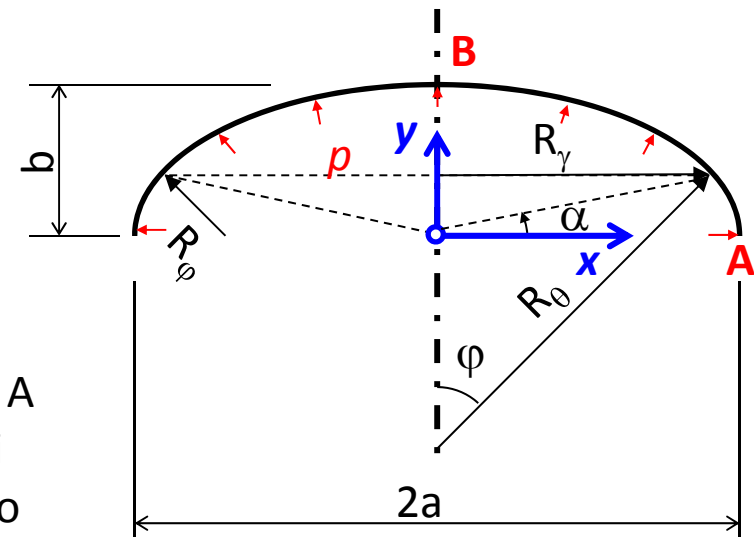
### Fondo semiellittico in pressione

In particolare si ha :

Oss.ni:

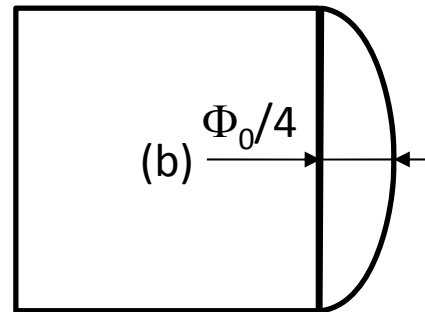
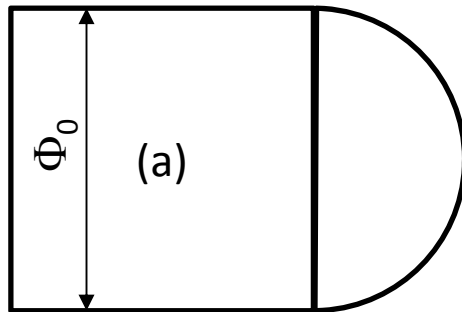
- per  $a/b > \sqrt{2}$  la  $\sigma_\theta$  diviene negativa nel punto A
- le tensioni assumono valori estremi nei punti A e B, per cui, tenendo anche conto del segno della  $\sigma_\theta$  la tensione ideale massima, in funzione del rapporto tra i semi-assi, è data da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{eq\_max} = \frac{p_0 a}{2h} \quad 1 \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \sigma_\theta = \frac{p_0 a}{2h} \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \quad \frac{a}{b} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$



## Esercizio 7

Dato il recipiente cilindrico mostrato in Figura, si confronti lo spessore necessario ed il peso del materiale per un fondo emisferico (a) o semiellittico, con rapporto tra i semiassi = 2 (b).



$$\Phi_0 = 2 \times 10^3 \text{ mm}$$

$$p_0 = 50 \text{ bar}$$

$$\sigma_{amm} = 550 \text{ MPa}$$