

Costruzione di macchine

Modulo di:

Progettazione probabilistica e affidabilità

Marco Beghini

Lezione 1:

Probabilità: fondamenti

Progettazione probabilistica:

Considerazione delle incertezze

- nelle proprietà dei materiali
- nelle caratteristiche geometriche
- nelle condizioni di carico
- nei modelli predittivi

Definizioni più razionali dei margini di sicurezza

Affidabilità strutturale:

Analisi statistico-probabilistica dei fenomeni di guasto

Affidabilità di sistemi

Disponibilità e manutenibilità

Basi di teoria della probabilità: richiami di combinatoria

Principio del calcolo combinatorio

una procedura composta, realizzata da un insieme ordinato di m procedure ognuna delle quali può essere realizzata in $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ modi diversi, ha il seguente numero di realizzazioni:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_m = \prod_{k=1}^m n_k$$

Esempio 1.1

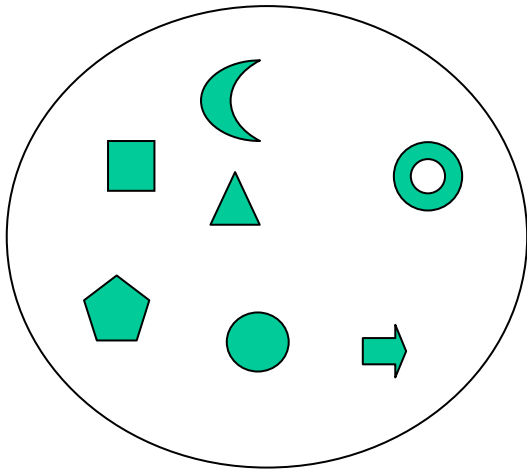
Quante targhe europee distinte si possono realizzare?

A A 0 0 0 A A

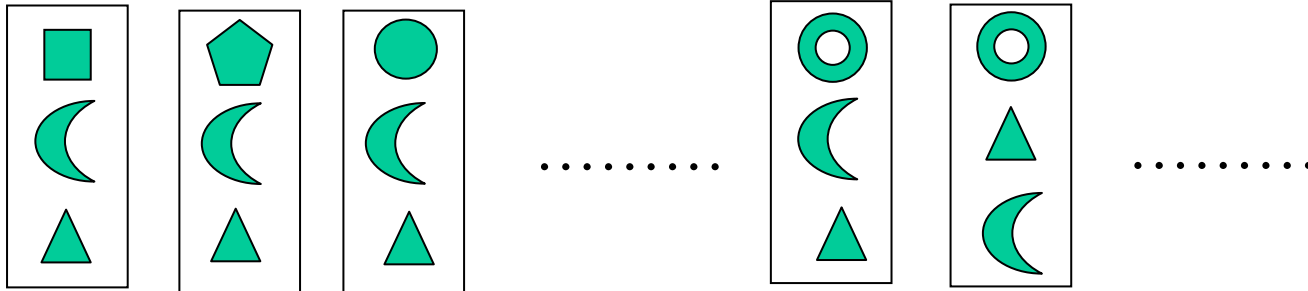
26 26 10 10 26 26

$$26^4 \cdot 10^3 \cong 457 \cdot 10^6$$

Disposizioni e permutazioni



Dato un insieme di 7 oggetti distinti:
Quanti insiemi ordinati distinti di 3
oggetti si possono fare?



Le terne differiscono per il contenuto ma anche per l'ordine

Definizione: **disposizioni** di 7 oggetti presi 3 a 3 $D(7,3)$

In generale: disposizioni di n oggetti presi k a k $D(n,k)$

Si può pensare a una realizzazione tramite procedura di estrazione senza reinbussolamento (come nel gioco del lotto):

- 1) Estraggo il primo: $n_1=7$
- 2) Estraggo il secondo: $n_2=6$
- 3) Estraggo il terzo: $n_3=5$

$$D(7,3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Generalizzando:

$$D(n,k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ fattori}}$$

Esercizio 1.1

Quante parole di 4 lettere si possono scrivere usando vocali distinte?

Caso particolare: $k = n$

In quanti modi distinti si possono elencare n oggetti diversi?

$$D(n, n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Permutazioni di n oggetti distinti

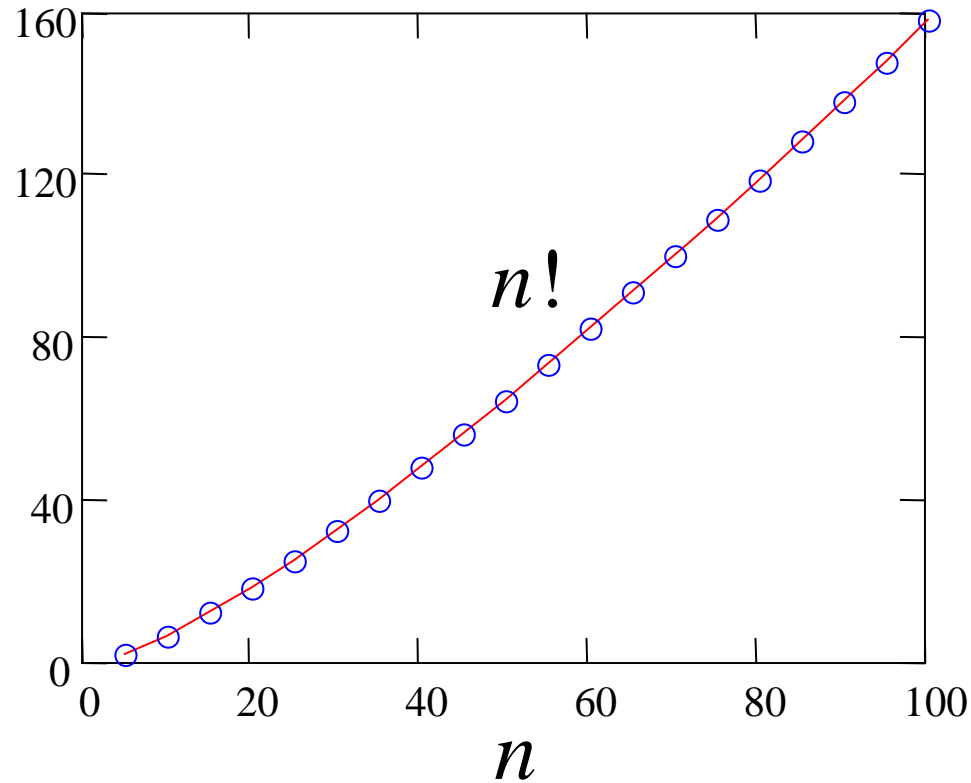
$$D(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definizione comoda:

$$0! = 1$$

Andamento del fattoriale:

$\log(n!)$



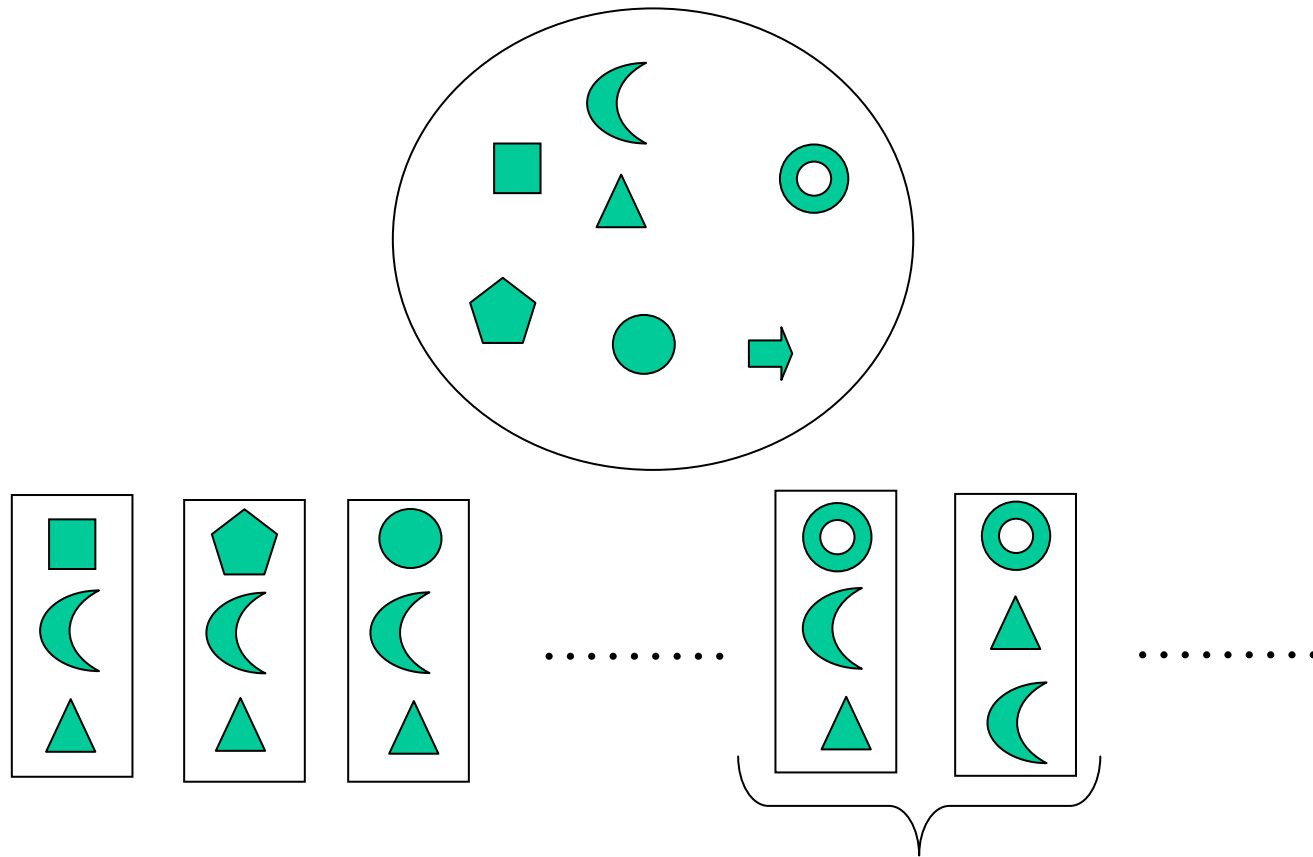
$100! \cong 10^{160}$

Formula asintotica di Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n$$

Combinazioni

Conteggio di gruppi presi k a k da n ma effettivamente distinti



stessa combinazione

Per una combinazione di k oggetti posso fare $k!$ permutazioni, le combinazioni di k oggetti presi da n distinti sono:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{D(n, k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Esempio 1.2

Quante terne di carte di bastoni possono essere fatte?

$$n = 10; k = 3$$

$$C(10, 3) = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

Proprietà delle combinazioni:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{0}{0} = 1$$

Coefficienti binomiali

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + n \cdot ab^{n-1} + b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Esempio 1.3

Quanti sono i sottoinsiemi distinti di un insieme con n oggetti?

Prima strategia

Consideriamo un elemento generico e un sottoinsieme, ci sono 2 possibilità: o l'elemento appartiene al sottoinsieme o non vi appartiene, per cui le possibilità complessive:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ oggetti}} = 2^n$$

Seconda strategia

Consideriamo il numero di sottoinsiemi composti da 0 elementi, da 1 elemento, da 2 ... da n elementi e facciamo la somma:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n$$

Probabilità

Consideriamo un **esperimento** che possa essere ripetuto in **condizioni nominalmente uguali**, esempi: l'estrazione da un'urna ben mescolata di biglie 'uguali', l'estrazione di una carta da un mazzo ben mischiato, il lancio di una moneta o di un dado (insomma tutto parte dai giochi di sorte)

Se l'esperimento è ripetuto n volte e l'evento A si verifica r volte allora diremo che, con un *elevato livello di certezza*, la probabilità del verificarsi dell'evento A : $P(A)$ o P_A è data da

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

quando n è *sufficientemente elevato*.

Probabilità

Definizione statistica:

Limite della frequenza relativa

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n}$$

Definizione classica:

Casi favorevoli su casi possibili (spazi equiprobabili)

Definizione assiomatica:

Teoria della misura applicata a sottoinsiemi (eventi) dell'insieme dei possibili esiti dell'esperimento (spazio campionario) con determinate regole (assiomi)

Discussione sulla definizione statistica:

Ho lanciato una moneta 100 volte e ho ottenuto 55 teste e 45 croci:
su cosa punto per il prossimo lancio?

- A) Punto su testa
- B) Punto di croce
- C) È lo stesso, non mi preoccupo

I numeri 'ritardatari'....

Discussione sulla definizione classica

Qual è la probabilità che esca un numero primo nel lancio di un dado equo (*a toss of a fair dice*)

Esperimento: lancio un dado e registro il valore dalla faccia superiore

Evento E : il numero uscito è primo

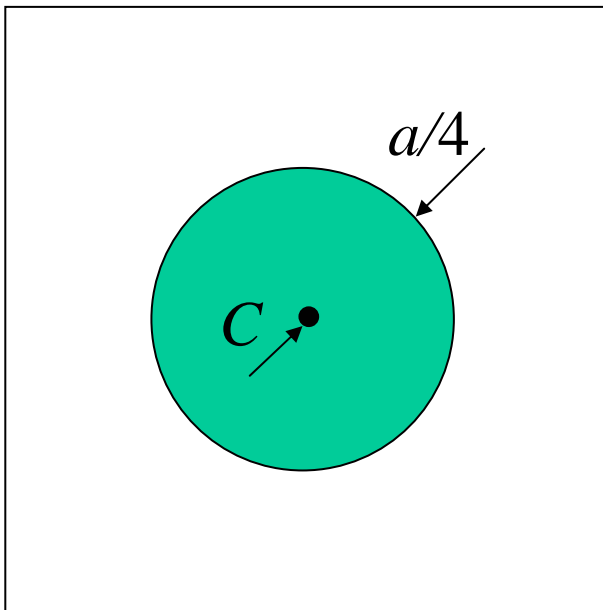
N = numero di esiti (equiprobabili) possibili $\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$

N_E = numero di esiti favorevoli $\#\{2, 3, 5\} = 3$

$$P(E) = \frac{N_E}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

Discussione sulla definizione classica

Preso a caso un punto in un quadrato di lato a (*randomly selected point*) determinare la probabilità che disti dal centro meno di $a/4$

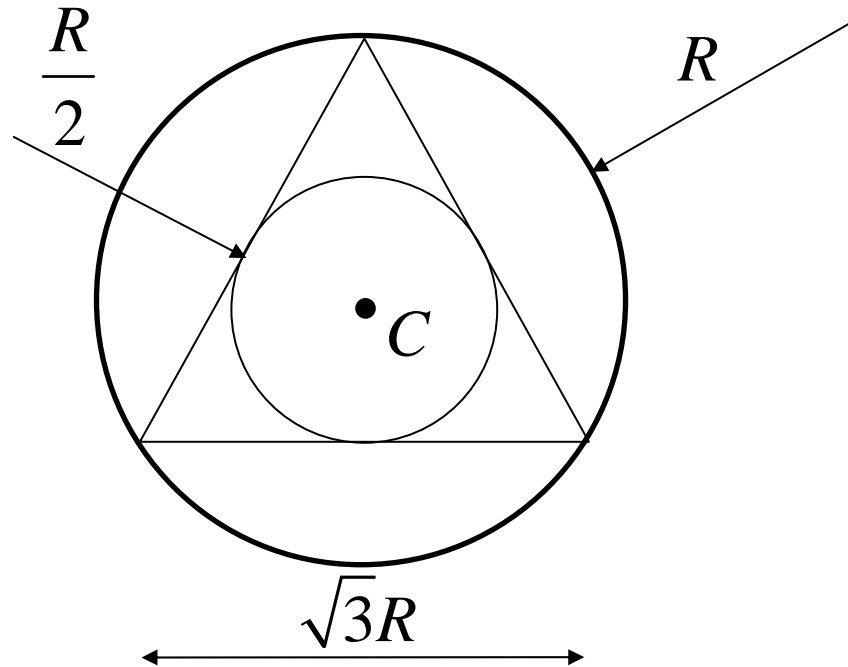


$$P(E) = \frac{\pi \left(\frac{a}{4}\right)^2}{a^2} = \frac{\pi}{16} = 0.196$$

NB: il numero di esiti non è finito!

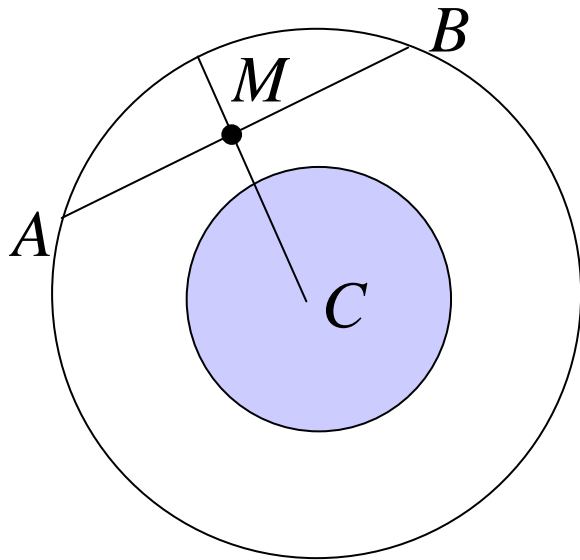
Discussione sulla definizione classica

Data la circonferenza di raggio R , determinare la probabilità che la lunghezza l di una corda AB presa a caso sia maggiore di $\sqrt{3}R$ (il lato del triangolo equilatero inscritto).



Scegliere una corda a caso?

Prima strategia: prendo a caso il centro M della corda tra i punti del cerchio esterno



Casi possibili il punto M è dentro il cerchio esterno

Casi favorevoli il punto M è nel cerchio interno

$$P(E) = \frac{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

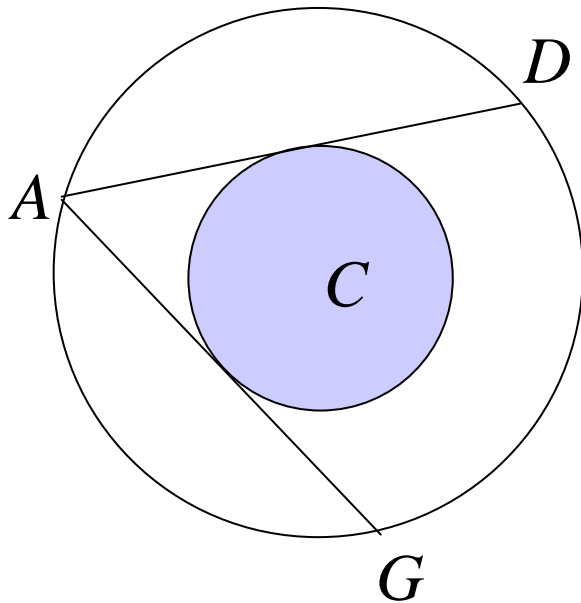
Scegliere una corda a caso?

Seconda strategia: prendo a caso l'estremo A della corda e poi l'estremo B , entrambi sulla circonferenza

La prima scelta non condiziona: conta la posizione relativa!

Casi possibili: il punto B è sulla circonferenza

Casi favorevoli: il punto B è nell'arco DG



$$P(E) = \frac{2\pi R}{3} = \frac{1}{3}$$

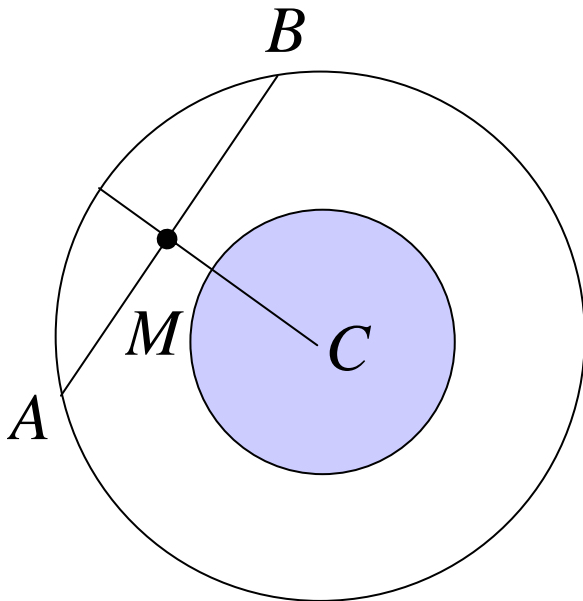
Scegliere una corda a caso?

Terza strategia: prendo a caso il centro della corda M su un qualunque raggio del cerchio

La posizione angolare non condiziona

Casi possibili: il punto M è nel raggio

Casi favorevoli: il punto M è raggio interno



$$P(E) = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

Paradosso di Bertrand

Cosa significa prendere a caso una corda?

Probabilità definizioni

Spazio campionario, esito, evento (*probability space, outcome, event*)

Esempio: esperimento di estrazione di un numero da un'urna che ne contiene 12

Lo **spazio campionario** è:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

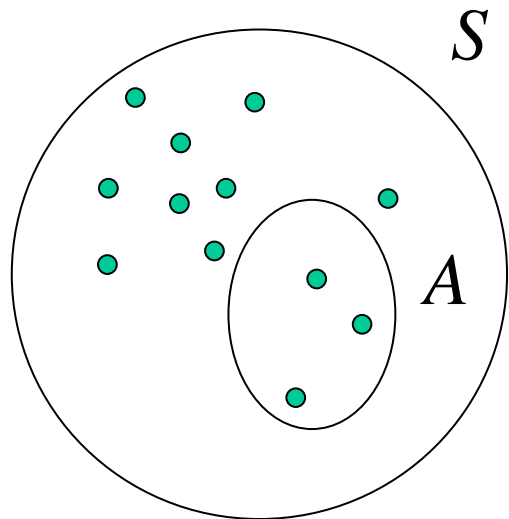
L'**esito** è un numero intero non maggiore di 12

Evento A: estrazione di un quadrato

$$A = \{1, 4, 9\}$$

Evento B: estrazione di un primo

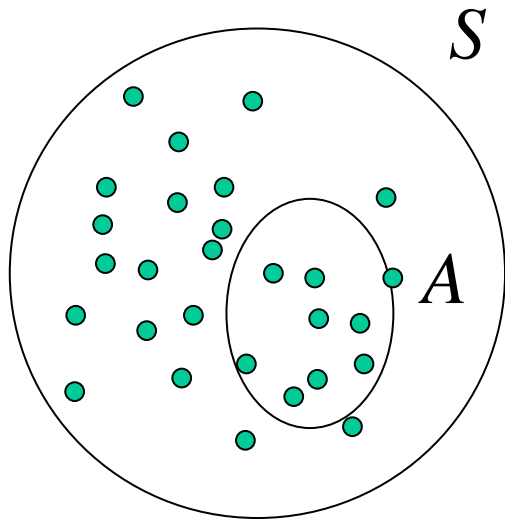
$$B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$



Spazio campionario finito

Probabilità definizioni: Spazio campionario non finito

Esempio: esperimento di lancio di una moneta fino a che non si presenta testa



S Lo spazio campionario è:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\dots\dots\}$$

L'**esito** è un singolo numero naturale

Evento A: l'esperimento si arresta dopo 4 lanci

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

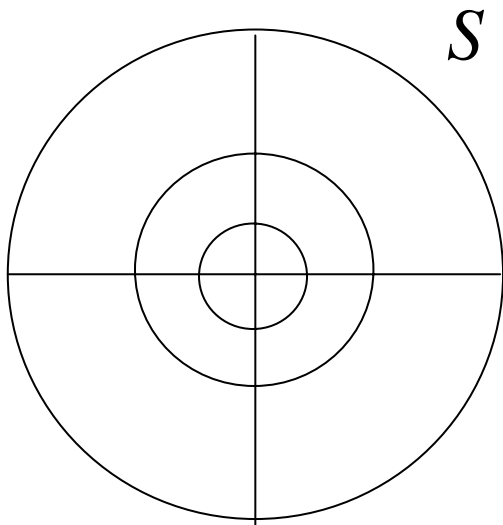
Evento B: l'esperimento si arresta per un numero di lanci multiplo di 7

$$B = \{7, 14, 21, \dots\dots\dots\}$$

Spazio campionario è **infinito** ma **numerabile**

Probabilità definizioni Spazio campionario non finito

Esempio: esperimento di lancio di una freccetta su un bersaglio con misura della distanza dal centro



$$S = \{r \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq R\}$$

L'esito è un numero reale in un intervallo

Evento A : la freccia si ferma nella metà superiore

Evento B : la freccia si ferma nel quarto in alto a destra

Evento C : la freccia si ferma nel centro

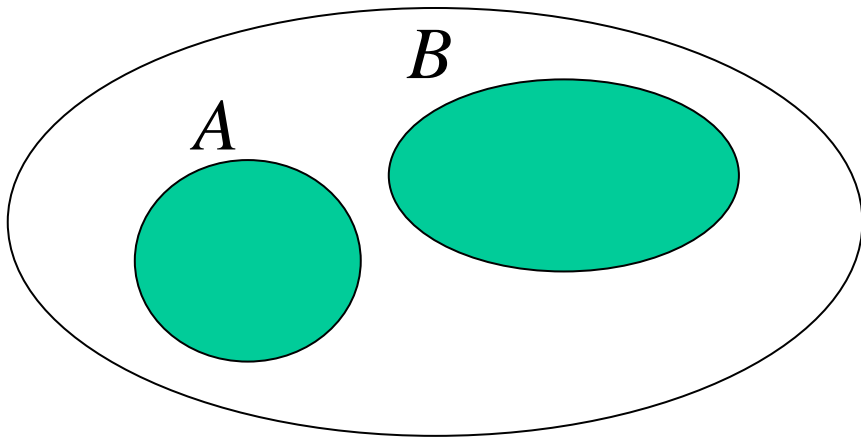
Spazio campionario **infinito non numerabile**

Probabilità assiomi

$$\forall A: 0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{Normalizzazione}$$

$$P(S) = 1 \quad \text{Evento certo: l'esperimento si compie}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



A e B eventi **incompatibili** (*mutually exclusive*): nessun esito in comune, se si compie l'uno non si compie l'altro

Probabilità teoremi

$$P(\emptyset) = 0$$

L'evento impossibile (che non si verifica)
ha probabilità 0

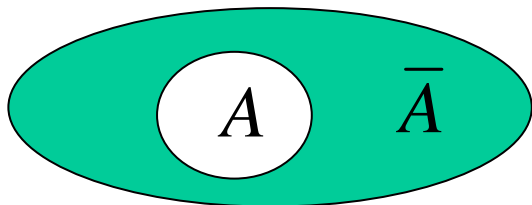
$S = S \cup \emptyset$ e $S \cap \emptyset = \emptyset$ S e \emptyset sono incompatibili

$$P(S) = P(S) + P(\emptyset)$$

$$1 = 1 + P(\emptyset)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Probabilità evento complementare o
non A



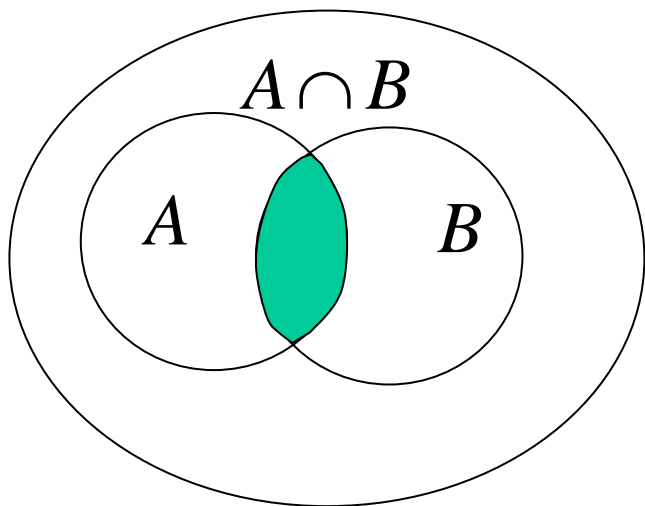
Probabilità teoremi

$$B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

Probabilità di un evento compreso

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilità dell'unione: o A o B (*vel or*
e non *out Xor*)



Probabilità semplice: spazi campionari finiti

Lancio tre monete e rilevo il numero di teste

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(\{0\}) = \frac{1}{8}; P(\{1\}) = \frac{3}{8}; P(\{2\}) = \frac{3}{8}; P(\{3\}) = \frac{1}{8}$$

Evento A : si ha almeno una testa (*head*)

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad P(A) = \frac{7}{8}$$

Evento B : si hanno tutte teste o tutte croci (*tails*)

$$B = \{0, 3\} \qquad P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Probabilità semplice: spazi campionari finiti equiprobabili

$$P(A) = \frac{\text{numero di eventi di } A}{\text{numero di eventi di } S}$$

Esercizio 1.2

Esperimento di estrazione ‘casuale’ di una carta da un mazzo di 52.

A = la carta è di picche

B = la carta è una figura.

Determinare: $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B), P(A \cap \bar{B})$

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(A \cup B) = \text{la carta è di picche o è una figura} = \frac{13+12-3}{52} = \frac{11}{26}$$

$$P(A \cap B) = \text{la carta è una figura di picche} = \frac{3}{52}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \text{la carta è picche ma non una figura} = \frac{10}{52} = \frac{5}{26}$$

Esercizio 1.3

Si estraggono a caso due elementi (prendendoli insieme) da un gruppo di 12 di cui 4 sono difettosi.

A = entrambi gli elementi sono difettosi

B = entrambi sono non difettosi

Determinare: $P(A)$, $P(B)$ e la probabilità che almeno uno degli elementi sia difettoso (evento C)

$$\text{casi possibili: } \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{66} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}; \quad P(B) = \frac{\binom{8}{2}}{66} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$$

$$C = \bar{B} \Rightarrow P(C) = \frac{19}{33}$$

Esercizio 1.4

Determinare la probabilità che in un gruppo di n individui i compleanni si festeggino in giorni distinti.

Hp: spazio equiprobabile, anni non bisestili.

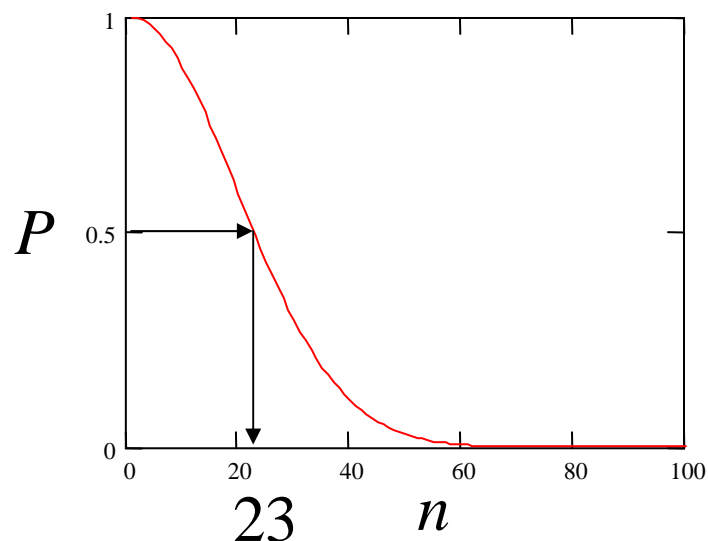
numero di modi in cui si possono presentare i compleanni:

esiti possibili: $365 \cdot 365 \cdot \dots = 365^n$

perchè l'evento si verifichi, il primo può scegliere 365, il secondo 364...

esiti favorevoli: $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365 - n)!}$

$$P = \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)!}$$

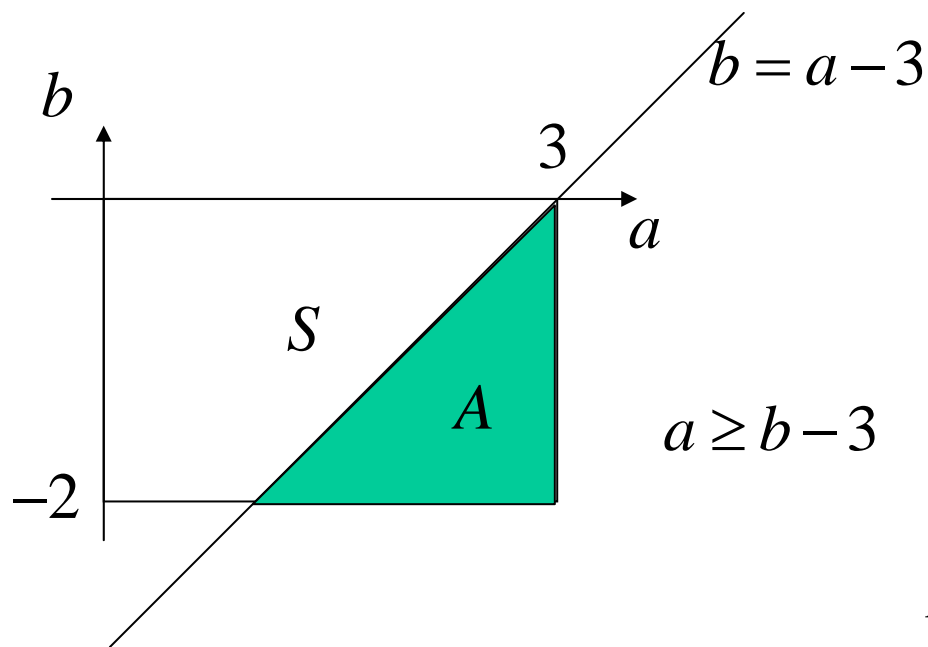


Esercizio 1.5

Preso un punto b a caso nel segmento $-2 \leq b \leq 0$ e a nel segmento $0 \leq a \leq 3$ determinare la probabilità che la distanza tra a e b sia maggiore di 3.

$$d = a - b$$

$$d = 3 \Rightarrow a - b = 3 \Rightarrow b = a - 3$$



$$P(A) = \frac{\text{area } A}{\text{area } S} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 1.6

In un concorso ippico corrono 8 cavalli, la vittoria di A è data 1 a 4 quella di B 2 a 7, trascurando il guadagno dell'agenzia di scommesse, determinare la probabilità che vinca:

- il cavallo A
- un cavallo che non sia A o B

La vittoria di A è data 1 a 4 significa che

$$\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{P_A}{1 - P_A} = \frac{1}{4} \Rightarrow P_A = \frac{1}{5}$$

$$P_B = \frac{2}{9} = 0.222$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P_A - P_B = 0.578$$